Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: P. Rey, A. Sauré
Aux : P. Hernández, J. Muñoz, D. Sauré.

Solución CTP 1
19 de Marzo, 2002

1. La nota de cada uno de los alumnos (n_i) sigue una exponencial de parámetro λ_s y en la semana s quedan $K-s+1$ participantes. Como vimos en la clase auxiliar 1 la distribución del mínimo M variables aleatorias exponenciales es una exponecial que tiene como parámetro la suma de los parámetros de las M variables aleatorias originales. Aplicando lo anterior a este caso se tiene que:

$$min(n_1, n_2, ..., n_{(K-s+1)}) \rightsquigarrow \exp((K-s+1)\cdot\lambda_s)$$

La probabilidad de que Tony Valero sea el amenazado por conocimientos de la semana s es igual a la probabilidad de que su nota sea la menor de entre los $(K-s+1)$ participantes. Dado que su nota $(\exp(\lambda_s))$ compite con otra la peor del resto $(\exp((K-s+1)\cdot\lambda_s))$, nuevamente utilizamos un resultado visto en la clase auxiliar 1. Denotando a esta probabilidad por a_s se tiene que:

$$a_s = P(\text{Nota de Tony} < \text{Todas las demás notas}) = \frac{\lambda_s}{(K-s+1)\cdot\lambda_s} = \frac{1}{K-s+1}$$

Otra forma de justificar este resultado es decir que dado que todos los participantes tienen la misma distribución para su nota es igualmente probable que cualquiera de ellos resulte amenazado. Por esto la probabilidad que cualquiera de ellos sea amenazado, en particular para valero, es la misma, es decir:

$$a_s = \frac{1}{K-s+1}$$

2. La probabilidad de que Tony sea el eliminado de la semana s esta condicionado a lo sucedido en las $s-1$ semanas anteriores. Para ello definamos el siguiente evento:

B_{s-1} = Valero no ha sido eliminado en las $s-1$ primeras semanas.

Condicionanado sobre este evento se tiene que:

$$F_s = (F_s|B_{s-1})\cdot P(B_{s-1}) + (F_s|\sim B_{s-1})\cdot P(\sim B_{s-1})$$
$$F_s = (F_s|B_{s-1})\cdot P(B_{s-1}) + 0$$

La probabilidad que nuestro protagonista sea el eliminado en la semana s dado que todavía está en competencia, está dada por la probabilidad de que sea el amenazado por conocimientos y el eliminado sea el amenazado por conocimientos o que sea no sea el amenazado por conocimientos, sea amenazado por convivencia y el eliminado sea el amenazado por convivencia. Esto es:

$$(F_s|B_{s-1}) = a_s\cdot q_s + (1-a_s)\cdot p_s\cdot(1-q_s)$$

Por otro lado para no ser eliminado en las primeras $s-1$ semanas se tiene que dar en cada una de dichas semanas uno de los siguientes eventos:

- No ser amenazado por conocimientos, ni por convivencia
- Ser amenazado por conocimientos y el eliminado sea el amenazado por convivencia.
- Ser amenazado por convivencia y el eliminado sea el amenazado por conocimientos.

Luego :

$$\begin{aligned} P(B_{s-1}) &= \prod_{i=1}^{s-1} P[\text{No ser eliminado la semana i}] \\ &= \prod_{i=1}^{s-1} [(1-a_i)\cdot(1-p_i) + a_i\cdot(1-q_i) + (1-a_i)\cdot p_i\cdot q_i] \end{aligned}$$

o utilizando el resultado de la parte anterior:

$$P(B_{s-1}) = \prod_{i=1}^{s-1}(1-(F_i|B_{i-1}))$$

Finalmente:

$$F_s = [a_s\cdot q_s + (1-a_s)\cdot p_s\cdot(1-q_s)]\cdot\prod_{i=1}^{s-1}[(1-a_i)\cdot(1-p_i)+a_i\cdot(1-q_i)+(1-a_i)\cdot p_i\cdot q_i]$$

3. Sea N el número de semanas dentro de la sala-estudio luego la esperanza viene dada por:

$$E(N) = \sum_{j=1}^{K-4} E(N|\text{Es eliminado en j})\cdot P(\text{Es eliminado en j}) = (\sum_{j=1}^{K-4} j\cdot F_j)$$

4. Utilizando el resultado de la parte 2, se tiene que :

$$P(\text{ser finalista}) = P(B_{K-4}) = \prod_{i=1}^{K-4}[(1-a_i)\cdot(1-p_i)+a_i\cdot(1-q_i)+(1-a_i)\cdot p_i\cdot q_i]$$

5. La probabilidad de ser el ganador depende de si Valero está o no entre los finalistas concurso. Condicionando sobre este evento:

$$P(\text{ganar}) = P(\text{ganar}|\text{es finalista})\cdot P(\text{es finalista}) + P(\text{ganar}|\text{no es finalista})\cdot P(\text{no es finalista})$$
$$P(\text{ganar}) = P(\text{ganar}|\text{es finalista})\cdot P(\text{es finalista}) + 0$$

La probabilidad de ser finalista fue calculada en la parte 4. La probabilidad de ganar dado que está en la final se calcula de la siguiente manera. Definamos la variable t_i como el tiempo que demora el alumno i en terminar el examen.

Para ser el ganador se pueden dar las siguientes situaciones:

- Ser el primero en terminar y contestar correctamente :

$$P_1 = P(t_{Tony} < \text{resto de los } t_i)\cdot P(\text{conteste bien}) = \frac{\mu}{4\cdot\mu}\cdot(1-r) = \frac{1}{4}\cdot(1-r)$$

- Ser el segundo en terminar, que el primero responda mal y Valero bien :

$$P_2 = \frac{3 \cdot \mu}{4 \cdot \mu} \cdot r \cdot \frac{\mu}{3 \cdot \mu} \cdot (1-r) = \frac{1}{4} \cdot r \cdot (1-r)$$

- Ser el tercero en terminar, que los dos primeros repongan mal y Valero bien :

$$P_3 = \frac{3 \cdot \mu}{4 \cdot \mu} \cdot r \cdot \frac{2 \cdot \mu}{3 \cdot \mu} \cdot r \cdot \frac{\mu}{2 \cdot \mu} \cdot (1-r) = \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot (1-r)$$

- Ser el último en terminar, que los 3 primeros respondan mal y Valero bien:

$$P_4 = \frac{3 \cdot \mu}{4 \cdot \mu} \cdot r \cdot \frac{2 \cdot \mu}{3 \cdot \mu} \cdot r \cdot \frac{\mu}{2 \cdot \mu} \cdot r \ (1-r) = \frac{1}{4} \cdot r^3 \cdot (1-r)$$

Notemos que para la obtención de cada uno de estos resultados hemos utilizado 3 resultados conocidos:

- La distribución del menor tiempo de respuesta entre i alumnos se distribuye $\exp(i \cdot \lambda)$.
- La prob que una $\exp(\lambda_s)$ sea menor que una $\exp(i \cdot \lambda_s)$ es $\frac{\lambda_s}{\lambda_s + i \cdot \lambda_s}$
- La perdida de memoria de la exponencial. Esto es, cada vez que un alumno termina de contestar y lo hace mal, todas las distribuciones se reinician y las exponenciales compiten desde 0 nuevamente.

Los dos primeros resultados pueden ser reemplazados por el argumento de equiprobabilidad en el termino de la prueba, pero la perdida de memoria es un resultado crucial. Luego:

$$P(\mathsf{ganar}|\mathsf{es\ finalista}) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

Finalmente:

$$P(\mathsf{ganar}) = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \cdot \prod_{i=1}^{K-4} [(1-a_i) \cdot (1-p_i) + a_i \cdot (1-q_i) + (1-a_i) \cdot p_i \cdot q_i]$$

Consultas y/o errores a :
shernand@ing.uchile.cl
dsaure@dii.uchile.cl