CTP 1 Primavera 2002

Considere una carrera de la Fórmula Pindy en la cual compiten **C** pilotos de diferentes escuderías. En cada una de las **V** vueltas de la carrera, un piloto independiente de todo lo demás, con probabilidad $\mathbf{q} = \mathbf{q_1}$ puede tener un accidente y quedar fuera de competencia. Esta probabilidad es la misma para todos los pilotos, excepto para nuestro querido Feliceo Baltazar, para el cual $\mathbf{q} = \mathbf{q_2}$, con $\mathbf{q_2} > \mathbf{q_1}$.

Si un piloto logra terminar la carrera, el tiempo que transcurre desde que parte, en la primera vuelta, hasta que cruza la meta, en la vuelta V, se distribuye según una $\mathbf{exp}(\mu)$ para Feliceo, y $\mathbf{exp}(\lambda)$ para el resto de los conductores.

Por el solo hecho de que Baltazar termine la carrera, la escudería recibe **T** u.m., y si gana recibe adicionalmente **W** u.m. Por otra parte si nuestro piloto no termina la carrera la escudería debe pagar a la organización **R** u.m.

La intención de esta pregunta es encontrar el valor esperado de los beneficios que reporta a la escudería A.J Floppy, contar con los servicios del experimentado Feliceo. Para ello responda las siguientes preguntas.

1. (1.0 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un piloto en particular logre dar más de **k** vueltas sin chocar ? ¿Cuál es la probabilidad de que termine la carrera? (trabaje en términos de un q genérico).
2. (1.5 puntos) Sin considerar a Feliceo,¿Cuál es la probabilidad de que $(\mathbf{M} - \mathbf{1})$ de los $(\mathbf{C} - \mathbf{1})$ pilotos restantes, terminen la carrera?
3. (1.0 puntos) Dado que **M** pilotos terminan la carrera(incluido Feliceo) ¿Cuál es la probabilidad de que F.Baltazar sea el ganador?
4. (1.5 puntos) Usando los resultados de las partes 2 y 3 ,encuentre una expresión para la probabilidad de que Feliceo gane la carrera.
5. (1.0 punto) Finalmente, en función de los resultados de todas las partes anteriores, indique ¿Cuál es el valor esperado del beneficio que reporta a la escudería A.J Floppy contar con los servicios de Feliceo Baltazar?.

Solución

1. Para lograr dar k sin chocar es necesario que cada una de esas vueltas no resulten en un choque. Dado que la probabilidad de no chocar en una vuelta x es independiente de todo lo demás, se tendrá que:
$$P[\text{Dar más de k vueltas}] = (1 - q)^k$$
De esta forma, la probabilidad de terminar la carrera será:
$$P[\text{Dar V vueltas sin chocar}] = (1 - q)^V$$
2. Sin considerar a Feliceo, la probabilidad que (M-1) pilotos terminen la carrera, será:
$$P[\text{Terminen (M-1) de (C-1)}] = C - 1M - 1((1 - q_1)^V)^{M-1}(1 - (1 - q_1)^V)^{C-M}$$
3. Utilizando un resultado conocido:
$$P[\text{Gane Feliceo }|\text{M}] = P[Exp(\mu)\text{le gane a minimo de M-1}Exp[\lambda]] = \frac{\mu}{\mu + (M-1)\lambda}$$

4. Siguiendo la indicación del enunciado:

$$\begin{aligned}
P[\text{Feliceo gane}] &= P[\text{Gane Feliceo}|\text{llega}]P[\text{llega}] + P[\text{Gane Feliceo}|\text{No lLega}]P[\text{No llega}] \\
&= P[\text{Gane Feliceo }|\text{llega}](1-q_2)^V + 0 \\
&= (1-q_2)^V \cdot \sum_{M=1}^{C} P[\text{Gane Feliceo}|\text{llega}|\text{llegan otros M - 1}]P[\text{llegan otros M - 1}] \\
&= (1-q_2)^V \cdot \sum_{M=1}^{C} \frac{\mu}{\mu+(M-1)\lambda} C-1M-1((1-q_1)^V)^{M-1}(1-(1-q_1)^V)^{C-M}
\end{aligned}$$

5. Notemos que:

$$\begin{aligned}
E[\text{Utilidades}] &= E[\text{U(Ganar)}] + E[\text{U(Terminar)}] - E[\text{U(Chocar)}] \\
&= W \cdot (1-q_2)^V \cdot \sum_{M=1}^{C} \frac{\mu}{\mu+(M-1)\lambda} C-1M-1((1-q_1)^V)^{M-1}(1-(1-q_1)^V)^{C-M} \\
&\quad +T \cdot (1-q_2)^V - R \cdot (1-(1-q_2)^V)
\end{aligned}$$