Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Hernández, P. Rey
Aux: M. Guajardo, M. Pereira, D. Yung

Pauta CTP 1

Miércoles 3 de Agosto de 2005

1. Para que *Cañoncito* tenga que costear su regreso, éste debe salir último en la competencia, es decir, su lanzamiento debe ser menor al mínimo de los otros 7 participantes. Se sabe que la distribución de la mínima distancia lanzada por los rivales de *Cañoncito* sigue una distribución exponencial de parámetro $7\mu[m^{-1}]$, luego:

$$P(D_c < D_{M_7}) = \int_0^\infty P(D_c < D_{M_7} | D_c = t) f_{D_c}(t) dt = \int_0^\infty e^{-7\mu\cdot t} \cdot \lambda e^{-\lambda\cdot t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + 7\mu}$$

$$D_{M_7} \rightsquigarrow e(7\mu)$$

Otra forma de obtener este resultado es:

$$P(D_c < D_{M_7}) = \int_0^\infty P(X > t)^7 f_{D_c}(t) dt = \int_0^\infty e^{-7\mu\cdot t} \cdot \lambda e^{-\lambda\cdot t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + 7\mu}$$

$$X \rightsquigarrow e(\mu)$$

2. Podemos notar que para que *Cañoncito* termine en la *k-ésima* posición es necesario que $k-1$ competidores lancen una mayor distancia que *Cañoncito* y que el resto, $8-k$, lance una distancia menor. De esta forma, condicionando en la distancia que lanza *Cañoncito*, se puede escribir la siguiente expresión para P_k:

$$P_k = \int_0^\infty \binom{7}{k-1} P(X > t)^{k-1} \cdot P(X < t)^{8-k} \cdot f_{D_c}(t) dt$$

$$P_k = \int_0^\infty \binom{7}{k-1} (e^{-\mu\cdot t})^{k-1} \cdot (1 - e^{-\mu\cdot t})^{8-k} \cdot \lambda e^{-\lambda\cdot t} dt$$

$$X \rightsquigarrow e(\mu)$$

Donde la combinatoria se debe a que los rivales de *Cañoncito* son indistinguibles y a que cualquier conjunto de exactamente $k-1$ de los 7 competidores que lo supere, provoca que *Cañoncito* termine en la *k-ésima* posición.

3. La utilidad de *Cañoncito*, en $US\$$, corresponde a:

$$E[U_c] = \sum_{k=1}^{8} P_k \cdot U_k = US\$(1.000.000P_1 + 100.000P_2 + 10.000P_3 - 2.000P_8)$$

4. Esta probabilidad difiere de P_1 debido a que, a diferencia del caso anterior, se conoce información sobre la distancia que ha lanzado uno de los rivales de *Cañoncito*. De esta forma, lo que se desea calcular es la probabilidad de que *Cañoncito* supere a los 6 competidores restantes con un lanzamiento de mayor distancia que d. Así:

$$P(\textit{Cañoncito} \text{ gane}|X_1 = d) = \int_d^\infty P(X < t)^6 \cdot f_{D_c}(t)dt$$

$$P(\textit{Cañoncito} \text{ gane}|X_1 = d) = \int_d^\infty (1 - e^{-\mu\cdot t})^6 \cdot \lambda e^{-\lambda\cdot t}dt$$

$$X \rightsquigarrow e(\mu)$$

Que es lo mismo que:

$$P(\textit{Cañoncito} \text{ gane}|X_1 = d) = \int_d^\infty \lambda e^{-\lambda\cdot t}\left(\int_0^t \mu e^{-\mu\cdot x_2}dx_2\right)\ldots\left(\int_0^t \mu e^{-\mu\cdot x_7}dx_7\right)dt$$

$$P(\textit{Cañoncito} \text{ gane}|X_1 = d) = \int_d^\infty \lambda e^{-\lambda\cdot t}\left(\int_0^t \mu e^{-\mu\cdot y}dy\right)^6 dt$$

5. Sea $R_{i,n}$ la probabilidad de que de un conjunto de n deportistas exactamente i salgan positivos en el examen anti-doping. De esta forma:

$$R_{i,n} = \begin{cases} \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} & \text{si} \quad 0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Luego,

$$r_{n-2,n} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=n-2}^{n} R_{i,n} & \text{si} \quad n > 2 \\ 1 & n \leqslant 2 \end{cases}$$

Notar que para $n \leqslant 2$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} R_{i,n} = 1$

6. Para esta pregunta es importante notar que *Cañoncito* puede obtener medalla aun si no realiza uno de los mejores tres lanzamientos, ya que existe la posibilidad de que quienes lo superaron sean descalificados por dopping positivo. Condicionando en la posición que ocupa *Cañoncito* antes del examen anti-dopping, se tiene:

$$P(\textit{Cañoncito} \text{ gane medalla}) = (1-q)\sum_{i=1}^{8} P(\text{Medalla}|k\textit{-ésimo} \text{ mejor lanzamiento})P_k$$

Cañoncito puede obtener medalla realizando el *k-ésimo* mejor lanzamiento si $k-3$ de los $k-1$ participantes que lanzaron mejor que él son eliminados por dopping positivo, así:

$$P(\text{Medalla}|k\textit{-ésimo} \text{ mejor lanzamiento}) = r_{k-3,k-1}$$

$$P(\textit{Cañoncito} \text{ gane medalla}) = (1-q)\sum_{i=1}^{8} r_{k-3,k-1} \cdot P_k$$

Nótese que $r_{k-3,k-1} = 1$ si $k \leqslant 3$, es decir, si *Cañoncito* realiza uno de los 3 mejores lanzamientos; ya que en este caso no depende de los resultados de los exámenes de sus rivales.

Procediendo de manera similar:

$$P(\textit{Cañoncito}\text{ gane}) = (1-q)\sum_{i=1}^{8} P(\text{Ganar}|k\text{-}\textit{ésimo}\text{ mejor lanzamiento})P_k$$

Si *Cañoncito* obtiene el k-*ésimo* mejor lanzamiento, puede ganar la competencia si los $k-1$ competidores que lo superaron son descalificados por dopping positivo, de esta forma:

$$P(\text{Ganar}|k\text{-}\textit{ésimo}\text{ mejor lanzamiento}) = p^{k-1}$$

$$P(\textit{Cañoncito}\text{ gane}) = (1-q)\sum_{i=1}^{8} p^{k-1}\cdot P_k$$

Dudas y/o errores:
Daniel Yung
dyung@ing.uchile.cl