Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

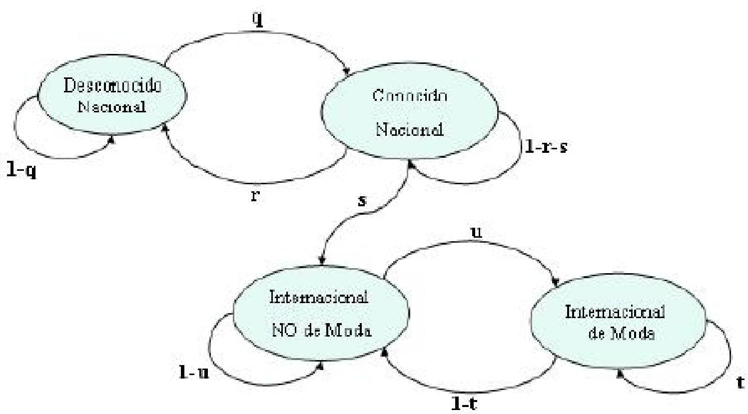
IN44A: Investigación Operativa
Profs: P. Hernandez, P. Rey, A. Saure
Aux: F. Castro, S. Maldonado, M. Pereira, L. Reus

Solución Clase Auxilliar 10, 18 de Abril de 2006

# Cadenas Markov Tiempo Discreto

## Problema 1

1. Para responder esta pregunta debemos modelar la trayectoria de la banda de Pepe como una cadena de Markov en tiempo discreto. Del enunciado se desprenden claramente tanto los estados como las probabilidades de transición:



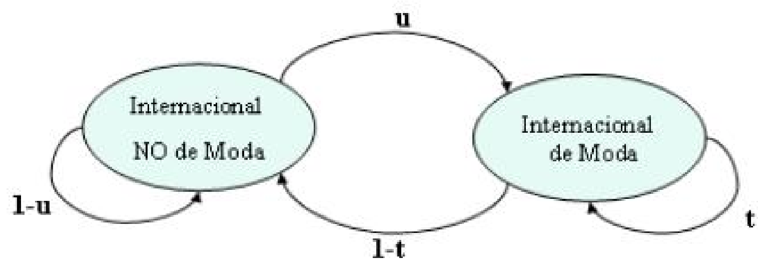

2. Para responder esta pregunta clasificaremos los estados de la cadena. Ambos estados del tipo "Nacional" son transientes y conforman una única clase transiente, por lo tanto en algún momento en el futuro el sistema abandonara esta clase para no volver más. Es así como obligatoriamente en el largo plazo el sistema se encontrará en alguno de los otros dos estados que conforman una única clase recurrente. Es decir Pepe alcanzará la fama irremediablemente.

3. Dado que la cadena posee una única clase recurrente aperíodica (es obvio dado que los estados de esta clase pueden "ciclar" sobre si mismos) existirá una ley de probabilidades estacionarias.

4. Los estados transientes necesariamente tendrán probabilidades estacionarias nulas. Es por esto que el sistema a resolver para calcular las probabilidades estacionarias es el asociado a la siguiente cadena:

   De esta forma simplemente calculamos:

$$\begin{aligned} P_{INM} &= (1-u) \cdot P_{INM} + t \cdot P_{IM} \\ P_{IM} &= u \cdot P_{INM} + (1-t) \cdot P_{IM} \\ 1 &= P_{IM} + P_{INM} \end{aligned}$$




Entonces:

$$P_{INM} = \frac{t}{t+u}$$

5. En el largo plazo (a esto se refiere la pregunta) la probabilidad de que la banda de Pepe sea famosa y este de moda es $P_{IM}$. Entonces las ganancias esperadas (mensuales) en el largo plazo son:

$$E[Utilidad] = K \cdot P_{IM}$$

## Problema 2

1. Es importante percatarse de que lo que se debe modelar en esta parte de la pregunta son el número de personas dentro del estadio en cada partido. En este sentido, pueden llegar hasta infinitas personas a un partido, pero solo entrarán a verlo un máximo de $N$. El número de asistentes puede ser modelado a través de una cadena de Markov, debido a que el número de asistentes (adultos y niños) en un partido sólo dependerá de cuantos adultos y niños entraron al estadio en el partido anterior (esta dependencia esta en la tasa de llegada de adultos $\lambda_l$)y la probabilidad $P_m$.

   Para modelar la cadena cada estado debe tener la información necesaria: El número de niños y de adultos. Así cada estado será de la forma $(A, B)$, donde $A$=número de niños dentro del estadio y $B$= número de adultos dentro del estadio. Como la cadena conecta demasiados estados y plantea muchas combinaciones es que no tiene mucho sentido dibujarla. Sin embargo, podemos generalizar las probabilidades de transición:

   Suponemos que estamos en el estado $(k, l)$ y queremos pasar al $(i, j)$ entonces :

$$P_{k,l\to i,j} = \frac{e^{-\lambda_l}\lambda_l^j}{j!} \cdot \binom{j}{i} P_k^i(1-P_k)^{j-i} \quad si \quad i+j<N$$

$$P_{k,l\to i,j} = \sum_{w=\frac{N}{2}}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_l}\lambda_l^w}{w!} \cdot \sum_{x=\frac{N}{2}}^{w} \binom{w}{x} P_k^x(1-P_k)^{w-x} \quad si \quad i+j=N \quad o \quad bien \quad i=j=\frac{N}{2}$$

$$P_{k,l\to i,j} = \sum_{w=j}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_l}\lambda_l^w}{w!} \cdot \binom{w}{i} P_k^i(1-P_k)^{w-i} \quad si \quad i \neq j; \quad i<j$$

$$P_{k,l\to i,j} = 0 \quad si \quad i>j \quad \vee \quad i+j>N.$$

El primero, es el caso en que llega un total de personas que no copará el estadio, por lo que no quedará nadie fuera. Es por esto que se asume llegan $j$ adultos y se multiplica por la probabilidad que lleguen $i$ de ellos con un niño.

El segundo es el caso en que llegan más de $\frac{N}{2}$ adultos con más de $\frac{N}{2}$ niños, con lo que así entrarán las mismas cantidades para los distintos tipos de personas.

El tercer caso es que lleguen más de $j$ adultos, pero que lleguen exactamente $i$ niños.

Sabemos que existirá una conección entre cada par de estados. En este sentido sólo basta saber que desde todos los estados puedo conectarme al estado (0;0) y desde este último hacia cualquier otro estado. Es por esto, que todos los estados están *comunicados* entre sí (en terminos de *comunicación*, no de transición) y que por ende hay solo una gran clase recurrente aperiódica. Es fácil chequear esta última propiedad viendo que de cada estado existe una probabilidad mayor a cero de transición hacia si mismo.

Con lo anterior llegamos a que el sistema admite una ley de probabilidades estacionarias, y que por ende, su ley estable es única y equivalente a la ley estacionaria.

2. Considerando que el sistema no es más que una cadena compuesta por una sola clase recurrente y aperiódica, sabemos que existe una ley de probabilidades estacionarias. Se debe considerar asdemás, que debido a que es uno de lo últimos partidos, el sistema se encuentra en estado estacionario. Dado lo anterior, se tiene:

$$E[asistentes] = \sum_{k,l} \pi_{k,l} \cdot (k + l)$$

donde la suma es sobre todos los pares $(k, l)$ tal que:

$$(k, l) \in \{(x, y)/ \quad x \leq y; x + y \leq N\}$$

3. En esta parte debemos considerar que el sistema está en estado estacionario y que entran exactamente $w$ niños. Ahora, como existen varios estados en la cadena que consideran la entrada de $w$ niños, siendo $w \leq \frac{N}{2}$, se tiene:

$$E[utilidad] = \frac{\sum_l \pi_{w,l} \cdot (w \cdot P_N + l \cdot P_A)}{\sum_l \pi_{w,l}}$$

Es necesario normalizar, debido a que no se consideran los estados totales como la suma de todos los estados de la cadena, si no solo los que consideran $w$ niños.

4. En esta parte de debe hacer una nueva cadena, en la cual cada estado guarde dos tipos de información, la vilonecia y el resultado de un partido dado. Así, los estados serán de la forma $(C, D)$ donde $C$ será el resultado obtenido por el equipo en un partido dado (ganar, perder o empatar) y $D$ será el nivel de violencia visto en ese partido.

Tampoco tiene mucho sentido dibujar esta cadena de $3 \cdot F$ estados, ya que hay probabilidades de transición mayores que cero que conectan a cada estado con todos los demás. Es decir, todos los estados se conectan en transición con todos los estados y por ende todos los estados están *comunicados* entre sí. Con esta información podemos decir que si se desea pasar desde un estado $(k, l)$ a un estado $(i, j)$:

$$P_{k,l \to i,j} = q_j(k) \cdot r_i(l) \quad \forall k, i \in \{ganar, perder, empatar\}; \quad \forall l, j = 1, 2, , F$$

Vale destacar, que debido a que todos los estados están comunicados entre sí, es que se puede decir que el sistema presenta solo una gran clase recurrente. además debido a que cada estado se conecta en probabilidad con si mismo, es que llegamos a concluir que esta única clase recurrente es además aperiódica y que por ende acepta una ley de probabilidades estacionarias.

5. De las partes anteriores sabemos que la asistencia a los estadios dependen de los niños y adultos en el partido anterior. si se desea modelar ahora que éstos dependan además de la violencia y del resultado del equipo obtenido en el partido anterior, esto es perfectamente modelable mediante una cadena de markov en que cada estado posea 4 tipos de información: el número de niños en el partido, el número de adultos, el nivel de violencia y resultado obtenido por el equipo en el partido anterior. Además abría que considerar que ahora la asistencia al estadio depende de la violencia y el resultado al partido anterior por lo que tendría sentido hacer algo como redefinir $\lambda_l$ y $P_m$ como sigue:

- $\lambda_{lvz}$= Tasa de llegada de adultos a ver un partido, dado que el partido anterior entraron al estadio $l$ adultos, se produjo un resultado $z$ y hubo un nivel de violencia $v$.
- $P_{mvz}$ = Probabilidad de que un adulto en particular llegue acompañado de un niño al estadio,dado que el partido anterior entraron al estadio $m$ niños, se produjo un resultado $z$ y hubo un nivel de violencia $v$.

Las dos proposiciones anteriores son válidas si $\quad l+m \leq N; \quad \forall z \in \{ganar, perder, empatar\}; \quad \forall v = 1,2,,F$.

Realizado lo anterior,es que se declara la dependencia de la asistencia al estadio con respecto al nivel de violencia y el resultado anterior. Así es que se puede decir que si estamos en el estado $(k,l,m,n)$ y queremos pasar al estado $(i,j,x,y)$ donde cada estado tiene la información ordenada de la forma (número de niños en un patido, número de adultos en un partido, resultado del partido, violencia en el partido)lo siguiente:

$$P_{k,l,m,n \to i,j\ ,x,y} = q_y(m) \cdot r_x(n) \cdot \frac{e^{-\lambda_{lnm}} \lambda_{lnm}^{\ j}}{j!} \cdot \binom{j}{i} P_{kmn}^{\ i} (1-P_{kmn})^{j-i}$$
$$si \quad i+j < N; \quad \forall m,x \in \{ganar, perder, empatar\}; \quad \forall n,y = 1,2,,F$$

Vale destacar que es incorrecto pensar que los partidos son independientes de la violencia y resultado del partido anterior. En este sentido seria erróneo declarar:

$$P_{k,l,m,n \to i,j\ ,x,y} = q_y(m) \cdot r_x(n) \cdot \frac{e^{-\lambda_l} \lambda_l^j}{j!} \cdot \binom{j}{i} P_k^i (1-P_k)^{j-i}$$

ya que no se declara la dependencia antes descrita.

Vale destacar que hay dos casos más de probabilidades de transición, pero para conocerlos, basta multiplicar $q_y(m) \cdot r_x(n)$ por las otras probabilidades de transición vistas en la parte 1, poniéndose en los mismos casos sobre los valores que pueden tomar las variables $k,l,i,j$, junto con incorporar las nuevas definiciones para $\lambda$ y $P$.

En cuanto a las clases, debido al tipo de conexión es que nuevamente nos encontramos con una cadena con todos los estados comunicados entre si y que poseen una probabilidad de transición hacia ellos mismos mayor a cero, por lo que esta gran clase recurrente es además aperiódica, por lo que la cadena es ergódica y admite una ley de probabilidades estacionarias única.

## Problema 3

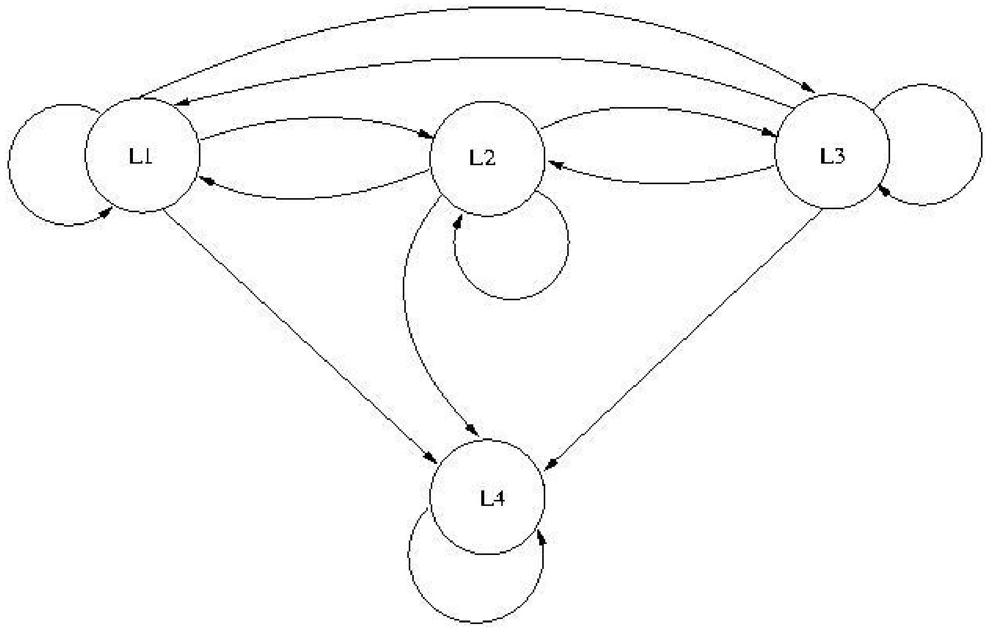
1. La cadena de Markov tiene cuatro estados, uno asociado a cada local. El grafo que la representa es el siguiente:

   Los estados pueden ser separados en las siguientes clases:

   - {L1, L2, L3}: clase transiente.
   - {L4}: clase recurrente aperiódica.

   La matriz de probabilidades de transición es (con filas y columnas ordenadas según los estados L1, L2, L3, L4, en este orden, y este orden utilizaremos para todos los vectores y matrices en esta pauta):

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \frac{1-p_1}{3} & \frac{1-p_1}{3} & \frac{1-p_1}{3} \\ \frac{1-p_2}{3} & p_2 & \frac{1-p_2}{3} & \frac{1-p_2}{3} \\ \frac{1-p_3}{3} & \frac{1-p_3}{3} & p_3 & \frac{1-p_1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



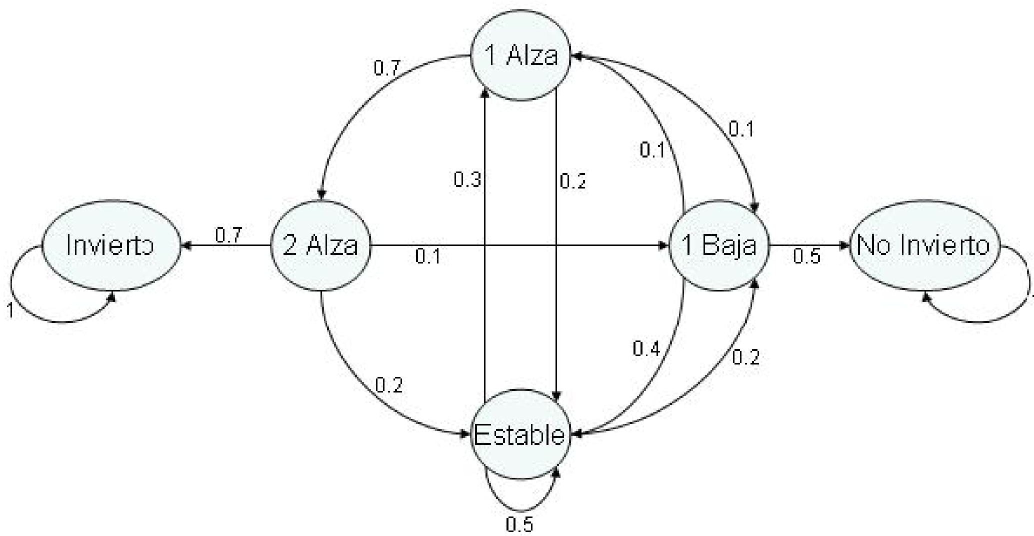

2. Esta cadena tiene probabilidades estacionarias ya que es una cadena del tipo "ergódica más transiente" (o equivalentemente, porque tiene una sola clase recurrente, la cual es aperiódica).

   Como la clase recurrente tiene apenas un estado, las probabilidades estacionarias se determinan sin necesidad de cálculos:
   $$\pi = [0, 0, 0, 1] \, .$$

   De aquí podemos concluir que, a partir de un cierto momento, Mandinga irá siempre a L4, ya que es el único estado recurrente de la cadena (que es finita).

## Problema 4

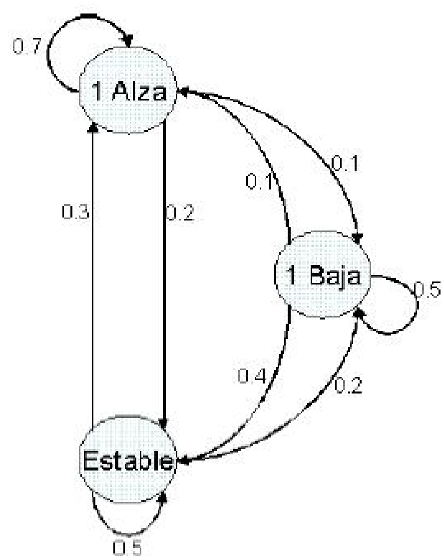
1. Podemos formular el problema de inversión como una cadena de markov debido a que la probabilidad de evolución entre estados del mercado (en alza, estable o en baja) depende solamente del estado actual. Con un pequeño truco seremos capaces de adaptar una cadena que indique cuando invierto. La cadena es la siguiente:




Vemos que existen 3 clases, 2 recurrentes y una transiente. Los estados invierto y no invierto conforman clases recurrentes aperiódicas pr si mismos, mientras que el resto de los estados conforman una clase transiente.

2. Claramente no existirán probabilidades estacionarias dado que tenemos 2 clases recurrentes.

3. Si finalmente se invierte tendremos que el problema puede representarse con el siguiente grafo:




En esta caso existe una única clase recurrente aperiódica.

4. Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias (provenientes de resolver el sistema tendremos que la ganancia diaria esperada en el largo plazo será:

$$E[\text{Ganancias}] = ME \cdot \pi_E + MA \cdot \pi_A + MB \cdot \pi_B$$