



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: P. Hernandez, P. Rey, A. Saure
Aux: F. Castro, S. Maldonado, M. Pereira, L. Reus

PAUTA CTP 5

Problema

Debido a la gran expectativa que genera la final del fútbol chileno entre albos y azules, se han vendido las N entradas disponibles para dicho evento a través de la empresa Ticket Master. Por motivos de seguridad, el ingreso al estadio se hará por una única entrada, en donde una persona corta los tickets en un tiempo exponencialmente distribuido de tasa μ . Con probabilidad q revisará al espectador para evitar la entrada de artículos peligrosos al evento. Esta revisión, incluido el tiempo en cortar el ticket, toma un tiempo exponencial de media $\frac{1}{\beta}$. La llegada de cada hincha se puede modelar según un proceso de Poisson de tasa λ y su manera de entrar a la cola es la siguiente:

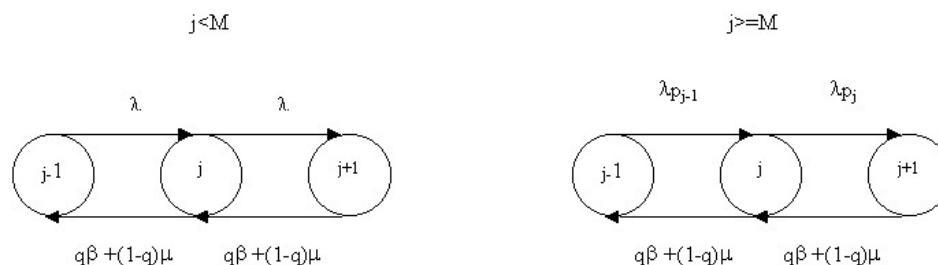
Si hay menos de M personas esperando por entrar, la persona se pondrá al final de la cola. Pero si hay M o más personas, el hincha se desesperará y buscará un amigo para colarse. La búsqueda de éste comienza desde el origen. Cada persona en la fila es amigo con probabilidad p . Si ninguno de los que está esperando lo es, la persona se retira indignada y renuncia a entrar. Considere que el tiempo para buscar a un amigo es despreciable y que existe un costo para la empresa de C_j si hay j personas en la fila. Por otra parte, hay un costo asociado al tiempo promedio que demora una persona en ingresar al estadio (dado que se mete en la fila) de K por unidad de tiempo

1. Calcule la probabilidad de que una persona se pueda colar al llegar, cuando el número de personas en la cola es igual a j . ($j \geq M$).

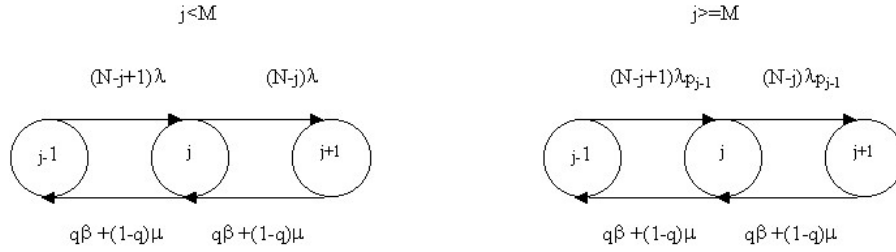
$$p_j = 1 - (1 - p)^j$$

2. Modele el número de personas en la fila como un proceso de Markov, indicando las transiciones para estados genéricos. Indique bajo qué condiciones existen probabilidades estacionarias.

Existen 2 opciones de respuesta para esta pregunta dado lo dicho en enunciado y en ctp sobre la tasa de llegada.



La otra alternativa:



Para ambas alternativas existen probabilidades estacionarias ya que la cadena es finita. (Estados de 0 a N)

3. Calcular los siguientes datos, para el modelo en el largo plazo. Asuma conocidas las probabilidades estacionarias:

- a) Tasa efectiva de entrada

$$\text{Caso1} : \lambda_E = \lambda \sum_{j=0}^{M-1} \Pi_j + \sum_{j=M}^N \lambda p_j \Pi_j$$

$$\text{Caso2} : \lambda_E = \lambda \sum_{j=0}^{M-1} \Pi_j + \sum_{j=M}^N \lambda p_j \Pi_j$$

- b) Tiempo esperado en el sistema

$$W = \frac{L}{\lambda_E} \text{ Donde } L = \sum_{j=0}^N j \Pi_j$$

- c) Costo esperado para la empresa

$$CE = WK + \sum_{j=0}^N \Pi_j C_j$$

El gurú del fútbol indicó que modelar el ingreso de esta forma estadios es poco realista, pues en Chile la gente siempre trata de colarse al llegar, no importando el número de personas en la fila. Además generalmente hay dos personas revisando los tickets.

4. Modele nuevamente el número de personas en la fila para ingresar al estadio, considerando las observaciones del gurú y suponiendo que el hincha nunca se irá sin ingresar. Indique las transiciones para estados genéricos y calcule las probabilidades estacionarias cuando N tiende a infinito.

Respuesta:

Bajo esta nueva situación, la tasa de entrada ya no depende de la probabilidad de colarse, pues el que llega siempre se coloca en la fila. Esto quiere decir que la tasa de llegada es igual a la de entrada. La tasa de muerte para cada estado es simplemente el doble para cada estado, a excepción de pasar del estado donde hay una sola persona a ninguna, la cual sigue siendo $q\beta + (1-q)\mu$. Si N tiende infinito la cadena se transforma en una M/M/2

Las probabilidades estacionarias son las siguientes:

$$\Pi_j = 2\rho^j \pi_0 \text{ con } \rho = \frac{\lambda}{2(q\beta + (1-q)\mu)} \text{ y } \pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

5. Usando lo anterior calcule en el largo plazo

- a) Tasa efectiva de entrada a la cola

Como se dijo anteriormente, es igual a la de llegada que es λ

- b) Número de personas en el sistema

$$L = \frac{2 \cdot \rho}{1 - \rho^2}$$

- c) Tiempo esperado en la cola sin ser atendido

$$\text{Esto es } W_{\text{sistema}} - W_{\text{atencion}} = \frac{L}{\lambda} - \frac{1}{q\beta + (1-q)\mu}$$