



Universidad de Chile

Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa

Profs: P. Hernandez, P. Rey, A. Saure

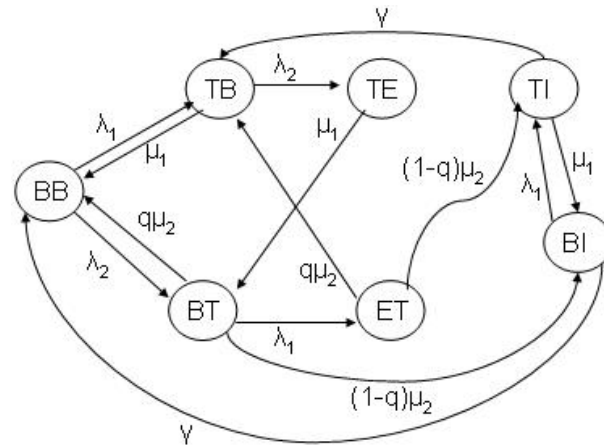
Aux: F. Castro, S. Maldonado, M. Pereira, L. Reus

Solución Clase Auxilliari 22, 20 de Junio 2006

Markov Continuo, Nacimiento y Muerte

Problema 1

1. Modelamos los estados como pares, indicando en cada componente el estado de cada máquina; adoptamos la siguiente notación: B= Buena; T= En reparación donde el técnico; E = En espera; I= En reparación donde el ingeniero.



La cadena es finita (7 estados) e irreducible (una sola clase), por lo tanto tiene probabilidades estacionarias.

2. Por la pérdida de memoria de la exponencial, claramente la respuesta no depende de t_1, t_2 . La probabilidad que se pide es igual a

$$q\mu_2\lambda_1 + \mu_2$$

3. Llamemos T_i al tiempo promedio del ciclo de reparación del servidor i ($i = 1, 2$) y denotemos por T_i^e al tiempo promedio del ciclo de reparación del servidor i dado que el sistema estaba en el estado e cuando se produjo la falla. Con esta notación, tenemos que:

$$T_1 = \frac{1}{\pi_{BB} + \pi_{BT} + \pi_{BI}} (\pi_{BB}T_1^{BB} + \pi_{BT}T_1^{BT} + \pi_{BI}T_1^{BI})$$

donde $T_1^{BB} = T_1^{BI} = 1/\mu_1$ y $T_1^{BT} = 1/\mu_1 + 1/\mu_2$ y

$$T_2 = \frac{1}{\pi_{BB} + \pi_{TB}} (\pi_{BB}T_2^{BB} + \pi_{TB}T_2^{TB})$$

donde $T_2^{BB} = 1/\mu_2 + q/\gamma$ y $T_2^{TB} = 1/\mu_1 + 1/\mu_2 + q/\gamma$.

4. Los pagos por hora que debe afrontar la empresa son:

- Ingeniero: $K_B(\pi_{BI} + \pi_{TI})$.
- Técnico: $K_{A_1}\lambda_1(\pi_{BB} + \pi_{BT} + \pi_{BI}) + K_{A_2}\lambda_2(\pi_{BB} + \pi_{TB})$

Problema 2

1. El modelo es un proceso de nacimiento y muerte con conjunto de estados $\{0, 1, 2, \dots, L\}$. Las tasas de transición son:

$$\begin{aligned}\lambda_i &= (E - i)\lambda \\ \mu_i &= i\mu.\end{aligned}$$

Este sistema de espera puede ser representado, en la notación de Kendall como $M/M/L/L/E$: un sistema con llegadas markovianas, con tiempos de atención exponenciales, L servidores (las líneas), capacidad L y llegadas originadas en una población de tamaño E .

Este sistema siempre tiene régimen estacionario ya que es un proceso de nacimiento y muerte (por lo tanto, una cadena irreducible) finito.

2. a) Fracción del tiempo promedio que pasa una línea desocupada: $\sum_{i=0}^L \frac{L-i}{L} \pi_i$.
- b) Llamadas no realizadas en una hora: $(E - L)\lambda\pi_L$.
- c) Se debe encontrar L ($0 \leq L \leq E$) que minimice el costo esperado por hora:

$$C \cdot L + K(E - L)\lambda\pi_L + \left(\mu \sum_{i=1}^L i\pi_i \right) Y$$

o

$$C \cdot L + K(E - L)\lambda\pi_L + \left(\lambda \sum_{i=0}^{L-1} (E - i)\pi_i \right) Y.$$

3. En el caso que $L = E$, se tiene que $\lambda_i = (E - i)\lambda$ y $\mu_{i+1} = (i + 1)\mu$, para $i \in \{0, 1, \dots, E - 1\}$. Entonces, para $k = 1, 2, \dots, E$,

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(E - i)\lambda}{(i + 1)\mu} = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{E(E - 1) \cdots (E - k + 1)}{k(k - 1) \cdots 1} = Ek \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \pi_0.$$

Por lo tanto,

$$1 = \pi_0 \left[1 + \sum_{k=1}^E Ek \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \right] = \left[\sum_{k=0}^E Ek \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \right] \pi_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right)^E \pi_0 = \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^E \pi_0$$

de donde concluimos que

$$\pi_0 = \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda} \right)^E.$$

4. Los estados siguen siendo los mismos.

Las tasas de nacimiento cambian a $\lambda_i = (E - i)\lambda + \delta$. Las tasas de muerte siguen siendo las mismas. El sistema cambia a un $M/M/L/L$; las llamadas se originan a partir de una población *infinita*. La cadena sigue siendo finita e irreducible, por lo que admite probabilidades estacionarias.