



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: P. Hernández, P. Rey, A. Sauré
Aux: F. Castro, S. Maldonado, L. Reus

Clase Auxiliar 16, 10 de mayo de 2006

Repaso Control 2

Problema 1

A un terminal de autobuses llegan pasajeros de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda \frac{\text{pasajeros}}{\text{minuto}}$. Estos pasajeros esperan que salga un bus en una fila ordenada por estricto orden de llegada. Los buses salen cada 15 minutos y pueden ser de 2 tipos: Los *rápidos* y los *lentos*. La probabilidad que el siguiente bus sea rápido es p_r , mientras que con probabilidad p_l será lento. Los buses rápido demoran un tiempo fijo de T_r minutos en llegar a su destino, mientras que los buses lentos demoran T_l , con $T_r < T_l$. La capacidad de ambos tipos de buses es K y si hay más de N personas esperando en el terminal no puede entrar nadie más ($N \gg K$).

Cada vez que va a salir un bus *rápido* todos los que están esperando intentan subir a él, mientras que en el caso de un bus *lento* existirá una probabilidad d que una persona de la fila quiera irse en este bus, independiente de lo que hagan los demás y de cuanto tiempo lleven esperando.

1. Modele el número de pasajeros que hay en el terminal justo antes de la salida de un bus como una cadena de Markov en tiempo discreto, poniendo atención en los casos interesantes. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias. Escriba explícitamente las probabilidades de transición para cualquier par de estados.
2. Si cuando un pasajero llega al terminal hay menos de K personas, ¿Cuál es el tiempo esperado hasta llegar al destino?.

Problema 2

En un cine del sector céntrico se está exhibiendo un exitoso show rotativo, con funciones de exactamente 1 hora de duración y una capacidad de N asientos.

Los espectadores que están dentro de la sala pueden decidir quedarse y repetirse la función, lo que ocurre con una probabilidad r independiente de lo que hagan los demás. Cada vez que termina una función, y se retiran los espectadores que ya se aburrieron del show, se permite la entrada de quienes están esperando afuera, mientras haya capacidad disponible. Si no hay lugar para todos, los que no pueden ingresar se retiran indignados. Los espectadores llegan a la puerta de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ_1 [espectadores/minuto]. Modele el número de espectadores dentro del cine como una cadena de Markov. Explícite las probabilidades de transición de una etapa, comente la existencia de probabilidades estacionarias.

Problema 3

Un alfarero muy meticuloso en su trabajo y en todo lo que lo rodea, se dedica a fabricar ollas de greda. Un día en que usted paseaba su vecindario, se encontró con este alfarero. Él le dijo que según mediciones que había realizado, el número de ollas que fabrica en un intervalo de largo h [horas] sigue una distribución de Poisson de media $\lambda_1 h$, para cualquier valor de h e independiente del número de ollas que haya fabricado antes o después de ese lapso. Además, él debe despachar a Santiago toda su producción diaria (de T horas de trabajo) al final del día. Sabiendo que usted realiza estudios de ingeniería, él le consultó si podía contestarle algunas preguntas que son las siguientes:

1. Conteste cada uno de los siguiente puntos:

- Se sabe que en un día se produjo una olla. Condicional a ese evento, calcule la esperanza del tiempo de “espera” de esa olla. Considere que la “espera” de cada olla es el tiempo entre su producción y su despacho a Santiago.
- Si en un día se produjeron N ollas (y condicional a ese evento), ¿cuál es el valor esperado del tiempo total de espera de las N ollas?. El “total” se refiere a la suma de los tiempos de espera de cada una de las ollas.
- ¿Cuál es la esperanza del tiempo total de espera, de todas las ollas producidas en un día?.
- Suponga que ahora, además de despachar al final del día, el alfarero puede hacerlo en algún instante t durante el día ($0 < t < T$). Es decir, se realizarán dos despachos: uno en el instante t y el otro en T , al final del día. Escriba ahora, en función de t , la nueva esperanza del tiempo total de espera, de todas las ollas producidas en un día.
- ¿Qué instante t^* elegiría para realizar el nuevo despacho durante el día, de modo de minimizar el tiempo medio total de espera?.

Su conocido alfarero ha decidido asociarse con un vecino, el cual fabricará las tapas de las ollas. El tiempo de fabricación de cada tapa se distribuye exponencialmente con tasa λ_2 . Al final del día (después de T horas de trabajo), se mandan a Santiago las “parejas” ollas - tapas que se lograron producir (en este caso sólo existe un único despacho). Si hay más ollas que tapas, éstas se guardan para el día siguiente y viceversa.

2. ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer día de sociedad se despachen K ollas con sus respectivas tapas?.
3. Suponga que al comienzo del día, en el taller del alfarero no hay ni ollas ni tapas. En promedio, ¿cuántas ollas (que no lograron ser despachadas con sus respectivas tapas) habrá disponible al comienzo del día siguiente?.