



Universidad de Chile

Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa

Profs: P. Hernandez, P. Rey, A. Saure

Aux: F. Castro, S. Maldonado, M. Pereira, L. Reus

Solución Clase Auxilliary 14, 5 de Mayo de 2006

## Cadenas Markov Decisiones y Procesos Poisson

### Problema 1

1. La cadena queda se muestra en la figura 1.

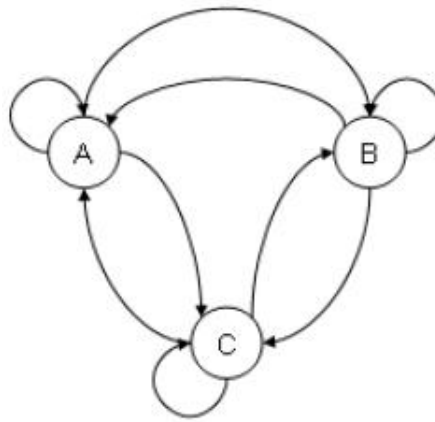


Figura 1: Cadena problema 1-1

Las políticas de decisión pueden ser especificadas como combinaciones de las políticas puras de publicidad y no publicidad. Sólo basta con especificar las matrices de transición para estas últimas (ver el enunciado).

Respecto a los beneficios asociados a las políticas estos serán:

$$r^{Sin} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad r^{Pub} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Esto no es más que resolver una programación dinámica donde el estado son las ventas y las decisiones son hacer o no publicidad. Esto queda de la siguiente forma (ojo, que el número de estados es 3 por lo que podemos especificar la función de beneficios para cada uno):

**Etapas** 0 (contando desde el final hacia atrás):

$$V(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Etapla k:

$$V_A(k) = \max \left\{ 3 + (0,5 \quad 0,3 \quad 0,2) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix}, 5 + (0,2 \quad 0,5 \quad 0,3) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_M(k) = \max \left\{ 1 + (0,4 \quad 0,4 \quad 0,2) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix}, 3 + (0,1 \quad 0,4 \quad 0,5) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_B(k) = \max \left\{ -1 + (0,4 \quad 0,6 \quad 0,0) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix}, 1 + (0,0 \quad 0,3 \quad 0,7) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix} \right\}$$

3. Utilizaremos el algoritmo de Howard:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} A \rightarrow Sin \\ M \rightarrow Sin \\ B \rightarrow Pub \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a esta política es la siguiente:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 & 0,0 \end{pmatrix} \quad y \quad \bar{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el vector  $\bar{W}$ :

$$\bar{W} + g \cdot \vec{e} = \bar{r} + \bar{M} \cdot \bar{W}$$

Desde  $\Pi = \Pi \cdot \bar{M}$  y  $\sum_i \Pi_i = 1$  tenemos que:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0,22 \\ 0,48 \\ 0,30 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$g = \sum_i \Pi_i \cdot \bar{r}_i = 2,2$$

Por lo tanto:

$$(I - \bar{M})\bar{W} = \bar{r} - g \cdot e$$

$$\begin{pmatrix} 0,8 & -0,5 & -0,3 \\ -0,1 & 0,6 & -0,5 \\ -0,4 & -0,6 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_A \\ W_M \\ W_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,79 \\ 0,79 \\ -3,2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} W_A = 5,2 \\ W_M = 2,4 \\ W_B = 0,0 \end{matrix}$$

Ahora debemos construir la próxima política estacionaria.

$$\begin{aligned}
S(A) &= \begin{cases} 5 + (0,2 \quad 0,5 \quad 0,3) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} &= 7,2 \\ 3 + (0,5 \quad 0,3 \quad 0,2) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} &= 6,34 \end{cases} \Rightarrow Sin \\
S(M) &= \begin{cases} 3 + (0,1 \quad 0,4 \quad 0,5) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} &= 4,5 \\ 1 + (0,4 \quad 0,4 \quad 0,2) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} &= 4,06 \end{cases} \Rightarrow Sin \\
S(B) &= \begin{cases} 1 + (0,0 \quad 0,3 \quad 0,7) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} &= 1,7 \\ -1 + (0,4 \quad 0,6 \quad 0,0) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} &= 2,5 \end{cases} \Rightarrow Pub
\end{aligned}$$

Pero hemos reconstruido la política  $\bar{S} \Rightarrow \bar{S}$  es la política óptima.

## Problema 2

Denotemos por  $\{N_A(t), t > 0\}$  y por  $\{N_B(t), t > 0\}$  los procesos de conteo de automóviles y buses que llegan a la plaza de peajes, respectivamente.

De esta forma, el proceso  $\{N(t) \equiv N_A(t) + N_B(t), t > 0\}$  que cuenta el número de vehículos en llegar a la plaza de peaje hasta un tiempo de  $t$  horas es un proceso de Poisson de tasa  $\alpha + \beta$  [vehículos/hora].

1. La probabilidad pedida corresponde a:

$$\begin{aligned}
P[N_A(4, 7) = 3 \wedge N_B(4, 7) = 7] &= P[N_A(3) = 3 \wedge N_B(3) = 7] \\
&= P[N_A(3) = 3] \cdot P[N_B(3) = 7] \\
&= \frac{e^{-3\alpha}(3\alpha)^3}{3!} \cdot \frac{e^{-3\beta}(3\beta)^7}{7!}
\end{aligned}$$

Ya que ambos procesos son independientes y poseen incrementos estacionarios.

2. En este caso se pide calcular:

$$\begin{aligned}
 P[N_B(3) = 7 \mid N(3) = 10] &= \frac{P[N_B(3) = 7 \wedge N(3) = 10]}{P[N(3) = 10]} \\
 &= \frac{P[N_B(3) = 7 \wedge N_A(3) = 3]}{P[N(3) = 10]} \\
 &= \frac{\frac{e^{-3\alpha}(3\alpha)^3}{3!} \cdot \frac{e^{-3\beta}(3\beta)^7}{7!}}{\frac{e^{-3(\alpha+\beta)}(3(\alpha+\beta))^{10}}{10!}} \\
 &= \binom{10}{3} \left( \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^3 \left( \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right)^7
 \end{aligned}$$

3. La probabilidad pedida corresponde a que 3 veces llegue un automóvil antes que un bus y a que 7 veces suceda lo contrario. De esta forma, exactamente 3 de los próximos 10 vehículos serán automóviles. La probabilidad de que un auto llegue antes que un bus es  $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$  ya que los tiempos entre llegadas de automóviles son exponenciales de parámetro  $\alpha$  y los tiempos entre llegadas de buses exponenciales de parámetro  $\beta$ . Así:

$$P[3 \text{ automóviles entre los próximos 10 vehículos}] = \binom{10}{3} \left( \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^3 \left( \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right)^7$$

Ya que las llegadas pueden ocurrir en cualquier orden. Nótese además que es el mismo valor de la parte anterior. La intuición de esto es que ya que se consideran sólo los próximos 10 vehículos en llegar, no es relevante si las llegadas ocurrieron o están por ocurrir, ya que el evento es el mismo antes de la primera de las 10 llegadas que después de la última.

4. Llamemos  $P[n]$  a la probabilidad de que hayan  $n$  vehículos en la fila justo al finalizar la atención del automóvil. Condicionando en la duración de la atención de este automóvil, se tiene:

$$P[n] = \int_0^\infty P[n|\text{atención dura } t] \gamma e^{-t\gamma} dt$$

Además, ya que hay 1 bus esperando, para que hayan  $n$  vehículos en la fila al finalizar la atención, deben llegar  $n-1$  vehículos durante la misma. Así:

$$P[n|\text{atención dura } t] = \frac{e^{-t(\alpha+\beta)}(t(\alpha+\beta))^{n-1}}{(n-1)!}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 P[n] &= \int_0^\infty \frac{e^{-t(\alpha+\beta)}(t(\alpha+\beta))^{n-1}}{(n-1)!} \gamma e^{-t\gamma} dt \\
 &= \frac{(\alpha+\beta)^{n-1} \gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^n} \int_0^\infty \frac{e^{-t(\alpha+\beta+\gamma)}(\alpha+\beta+\gamma)^n t^{n-1}}{(n-1)!} dt \\
 &= \frac{(\alpha+\beta)^{n-1} \gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^n}
 \end{aligned}$$

Ya que dentro de la integral queda la densidad de una distribución gamma de parámetros  $n$  y  $\alpha+\beta+\gamma$ .

5. Como los distintos tipos de vehículos pagan distintas tarifas, es necesario condicionar en el número de buses que llegaron en las primeras 13 horas.

$$E[\text{Ingresos} \mid n \text{ vehículos}] = \sum_{i=0}^n E[\text{Ingresos} \mid i \text{ buses} \mid n \text{ vehículos}] P[i \text{ buses} \mid n \text{ vehículos}]$$

De la parte 2 se sabe que:

$$P[i \text{ buses} \mid n \text{ vehículos}] = \binom{n}{i} \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^{n-i} \left( \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^i$$

Dado que llegaron 10 vehículos e  $i$  de ellos son buses, la esperanza del ingreso corresponde a:

$$E[\text{Ingresos} \mid i \text{ buses} \mid n \text{ vehículos}] = i \cdot E[\text{Pago bus primeras 13 horas}] + (n-i) \cdot E[\text{Pago auto primeras 13 horas}]$$

La distribución condicional de los tiempos de llegada corresponde a una uniforme entre 0 y 13, así:

$$E[\text{Pago bus primeras 13 horas}] = \int_0^{13} C_b t^2 \frac{dt}{13} = C_b \frac{13^2}{3}$$

$$E[\text{Pago auto primeras 13 horas}] = \int_0^{13} C_a t^3 \frac{dt}{13} = C_a \frac{13^3}{4}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} E[\text{Ingresos} \mid n \text{ vehículos}] &= \sum_{i=0}^n \left( i \frac{C_b 13^2}{3} + (n-i) \frac{C_a 13^3}{4} \right) \binom{n}{i} \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^{n-i} \left( \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^i \\ &= \frac{n\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{C_b 13^2}{3} + \frac{n\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{C_a 13^3}{4} \end{aligned}$$