



Universidad de Chile

Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa

Profs: P. Hernandez, P. Rey, A. Saure

Aux: F. Castro, S. Maldonado, M. Pereira, L. Reus

Clase Auxilliary 10, 18 de Abril de 2006

## Cadena Markov Tiempo Discreto

### Problema 1

Un auxiliar de este curso ha decidido dedicarse a la música, y junto a unos amigos formó el grupo “Pepe y los Markovianos”. Actualmente se limitan a tocar los fines de semana en algunos pub capitalinos, siendo una de tantas bandas desconocidas que existen en el país.

Cada mes existe una probabilidad  $q$  que un empresario de algún sello musical nacional los escuche y decida apoyarlos para grabar y realizar giras para cantar en todo el país. Si tal cosa ocurre pasarían a ser una banda conocida a nivel nacional.

Una banda que es conocida a nivel nacional corre el riesgo de perder el apoyo del sello nacional que la patrocina, con lo cual volvería a ser una banda desconocida. Cada mes, la probabilidad que esto ocurra es  $r$ . Por otro lado, una banda conocida a nivel nacional puede llegar a llamar la atención del representante de un sello musical internacional, el cual podría decidir patrocinarlos. De ser así la banda pasaría a ser conocida a nivel internacional. Cada mes existe una probabilidad  $s$  que esto ocurra ( $s + r < 1$ ).

Una banda que es conocida internacionalmente nunca dejará de serlo. Sin embargo podemos distinguir dos categorías entre ellas: las que están de moda y las que no. Una banda internacionalmente conocida que está de moda en un mes dado seguirá estando de moda al mes siguiente con probabilidad  $t$ . Una banda conocida a nivel internacional que no está de moda en un mes dado pasará a estar de moda al mes siguiente con probabilidad  $u$ . El primer mes que una banda se hace conocida a nivel internacional nunca está de moda. Una banda sólo percibe utilidades (equivalentes a  $K[\$]$ ) en los meses que es conocida internacionalmente y está de moda (parte de esas utilidades corresponden a una satisfacción de su ego).

Hint: Suponga  $0 < x < 1 \quad \forall x \in \{q, r, s, t, u\}$ .

1. Construya una cadena de Markov que represente la trayectoria de la banda de Pepe y que permita predecir si en un mes dado percibirán utilidades o no (defina estados adecuados, dibuje el grafo indicando las probabilidades de transición o bien escriba la matriz de prob. de transición).
2. ¿Llegarán “Pepe y los Markovianos” a tener éxito algún día?.
3. ¿Admite la cadena una ley de probabilidades estacionarias?.
4. ¿Qué estados tienen necesariamente una probabilidad estacionaria igual a 0?. Calcule las probabilidades estacionarias.
5. ¿Cuál es (aprox.) el valor esperado de las utilidades percibidas por “Pepe y los Markovianos” en febrero del año 2048?.

## Problema 2, Control 2 Primavera 2004

Christiano Bernotti, el futuro mejor jugador de todos los tiempos, ha sido contratado para la temporada 2005 por la Universidad de Chile. Dado que lo anterior provocará que la venta de entradas para esta temporada se eleve hasta niveles nunca antes vistos en el fútbol chileno, es que el Dr. Chanté Chantosco ha decidido estudiar la venta de entradas durante la temporada 2005.

El Dr. sabe que el estadio donde se jugarán los  $K$  partidos de la temporada ( $K$  muy grande), tiene una capacidad de  $N$  asientos ( $N$  par). Sabe además, que el número de adultos que llega a presenciar un partido se distribuye poisson de tasa  $\lambda_l$ , donde  $l$  es el número de adultos que llegó al estadio en el partido anterior. Además, existe una probabilidad  $P_m$  de que cada adulto por separado llegue al estadio acompañado de un niño, donde  $m$  es el número de niños en el partido anterior. Un niño, ocupa el mismo espacio que un adulto y además cada adulto puede llegar con máximo un niño. Considere que todas las llegadas al estadio son simultáneas y que por política del plantel, tendrán preferencia de entrada los adultos acompañados de niños. El Dr. Chantosco le ha pedido a usted que haga el estudio pertinente y que responda las siguientes preguntas:

1. (3.0 Ptos) ¿Por qué esta situación puede ser modelada como una Cadena de Markov en tiempo discreto? Construya un modelo de la situación, especificando estados, clases y probabilidades de transición. Además clasifique las clases. Cuántas leyes estables existen para esta cadena?
2. (0.5 Ptos) ¿Cuál es el número esperado de asistentes a uno de los últimos encuentros?
3. (0.5 Ptos) ¿Cuál es la utilidad esperada por concepto de venta de entradas en el último partido de la temporada, sabiendo que a este encuentro entran exactamente  $W$  niños?. Para esto considere que cada adulto paga un precio  $D_A$  y que cada niño paga  $D_N$ .

Otro problema que aqueja a Chantosco es la violencia en los estadios. Se sabe que la violencia ( $V$ ) puede tomar valores discretos desde 1 hasta  $F$ . En un partido cualquiera  $i$ , la violencia depende del resultado que obtuvo la U. de Chile en el partido anterior. En este sentido, la probabilidad de que en un partido la violencia llegue a nivel  $v$  será  $q_v(z)$  (con  $z \in \{\text{ganó } (G), \text{perdió } (P), \text{empató } (E)\}$ ). Asimismo, se sabe que el desempeño del equipo en un partido cualquiera depende del nivel de violencia en el partido anterior, es decir, si el partido pasado hubo un nivel de violencia  $v$ , la probabilidad que este partido se gane es  $r_g(v)$ , de que se empate es  $r_e(v)$  y de que se pierda es  $r_p(v)$ .

1. (1.0 Ptos) Modele la situación anterior como una cadena de Markov en tiempo discreto, especificando probabilidades de transición, sus clases y pertinente clasificación. Existen probabilidades estacionarias?
2. (1.0 Ptos) Suponiendo que la asistencia al estadio depende de la violencia en éste y del desempeño que ha tenido el equipo en el partido anterior Existe la posibilidad de modelar esta situación mediante una cadena de Markov en tiempo discreto? Cómo lo haría?. Explícite los estados, probabilidades de transición, clases y posibles leyes estables. Sea preciso y esquematice si lo considera necesario.

## Problema 3 (Control 2, Otoño 2003)

Giusseppe Mandinga, un dedicado estudiante de nuestra escuela, está preocupado con el estrés que le está produciendo tanto estudio este semestre. Para mantener su salud, ha decidido dedicar las noches de los viernes para salir y “ventilar la mente”. Para ello ha elegido cuatro locales de entretenimiento nocturna de una conocida zona de Santiago. Los locales que ha elegido son “L1”, “L2”, “L3” y “L4”.

Según información que nos proporcionó un amigo cercano, Giusseppe decide a qué local dirigirse cada fin de semana de acuerdo a los siguientes criterios: - Si el show de la semana anterior le gustó, este

viernes se dirige al mismo local. - Si el espectáculo al que acudió la semana anterior no le gustó, este semana concurrirá a otro local. En este caso el próximo local a visitar (de los tres posibles) es escogido equiprobablemente.

Además, nuestro informante nos comentó, a partir de su experiencia como compañero de salidas de Mandinga, que él sale satisfecho del local “Li” con una probabilidad  $p_i$ , que es igual todas las semanas e independiente de todas las salidas anteriores. En particular, nos garantiza con certeza absoluta que el espectáculo de “L4” le gustará a Giuseppe siempre (es decir  $p_4 = 1$ ).

1. Construya una cadena de Markov que represente las salidas de los viernes de Giuseppe Mandinga. Construya un grafo que la represente. Identifique las clases de estados de esta cadena y clasifíquelas en transientes y recurrentes. Para las clases recurrentes determine el período de cada una. Identifique las probabilidades de transición entre estados.
2. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y calcúlelas. ¿Podemos afirmar, que a partir de algún momento, Mandinga concurrirá todas las semanas a mismo local? En caso afirmativo, ¿a cuál de ellos lo hará? Justifique.

## Problema 4

Un inversionista extranjero desea invertir su capital en el mercado accionario nacional. De acuerdo a un estudio que realizó, el comportamiento mensual de este mercado puede clasificarse en 3 categorías: En alza (A), estable (E) y en baja (B). Además, este comportamiento mensual es una variable aleatoria que depende únicamente del comportamiento en el mes anterior. La siguiente matriz representa las probabilidades de transición en el mercado accionario:

	A	E	B
A	0.7	0.2	0.1
E	0.3	0.5	0.2
B	0.1	0.4	0.5

Como el inversionista tiene la posibilidad de ubicar su capital en otro país, por lo que ha decidido observar el mercado nacional. La política de inversión que seguirá es tal que si durante 3 meses consecutivos observa al mercado nacional en alza, invierte sin retirar su dinero, sin embargo, si durante 2 meses consecutivos observa que el mercado está en baja invierte en el extranjero sin la posibilidad de reconsiderar su decisión. Si invierte en el mercado accionario nacional obtendrá un ingreso esperado mensual de \$MA, \$ME o \$MB, si el comportamiento es en alza, estable o baja respectivamente.

Si inicialmente el mercado accionario nacional se encuentra estable, responda:

1. Explique porqué este problema de inversión puede formularse como una cadena de Markov. Represente-lo con un grafo, identifique y clasifique sus estados.
2. ¿Existen probabilidades estacionarias?, justifique.
3. Suponga que el inversionista finalmente invierte en el mercado nacional, ¿Cómo cambia su respuesta de la parte anterior?, ¿Cuál es el ingreso promedio mensual que espera obtener el inversionista en esta situación?.