



Universidad de Chile

Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa

Profs: P. Hernandez, P. Rey, A. Saure

Aux: F. Castro, S. Maldonado, M. Pereira, L. Reus

Solución Clase Auxilliary 7, 4 de Abril de 2006

## Programación Dinámica Determinística y Estocástica

### Problema 1

#### 1. MODELO DETERMINÍSTICO

##### Variable de estado:

$S_t$  = años de uso de la máquina disponible al inicio del período  $t$ .

##### Variable de decisión:

$$X_t = \begin{cases} - & \text{No reemplazo} \\ 0 & \text{Reemplazo por máquina de 0 años,} \\ 1 & \text{Reemplazo por máquina de 1 año,} \\ \vdots & \\ n & \text{Reemplazo por máquina de n años,} \end{cases}$$

##### Función de beneficio:

$$f_t(S_t, X_t) = \begin{cases} C_{S_t} + f_{t+1}^*(S_t + 1) & \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ C_{X_t} + I_{X_t} - V_{S_t} + f_{t+1}^*(X_t + 1) & \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f_t^*(S_t) = \min_{X_t} f_t(S_t, X_t)$$

Donde  $f_t^*(S_t)$  = costo mínimo de la operación de la máquina desde el inicio del período  $t$  hasta el final, es decir, hasta  $T$  si la antigüedad del equipo es  $S_t$ .

##### Condiciones de borde y función objetivo

$$\begin{aligned} f_{T+1}(S_{T+1}) &= -V_{S_{T+1}} \\ f_1^* &= \min_{X_1=0,1,2,\dots} \left\{ I_{X_1} + C_{X_1} + f_2^*(X_1 + 1) \right\} \end{aligned}$$

## Problema 2

a) Siguiendo los pasos característicos tendremos:

- **Etapas:** Cada uno de los hoteles.

- **Variable de estado:**

$$n_i = \begin{cases} 1 & \text{Si ya encontré habitación en algún hotel} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Variable de decisión:**

$$q_i = \begin{cases} 1 & \text{Si entro a preguntar al hotel i-ésimo} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Variable aleatoria:**

$$w_i = \begin{cases} 1 & P_i & \text{Si hay habitación} \\ 0 & 1 - P_i & \text{Si no} \end{cases}$$

- **Condición de borde:**

$$\begin{aligned} V_k^*(1) &= 0 \\ V_{N+1}^*(0) &= K \end{aligned}$$

- **Recurrencia:**

$$V_k(0, q_k) = q_k(Q + P_k \cdot S_k + (1 - P_k) \cdot (C_k + V_{k+1}^*(0))) + (1 - q_k) \cdot (V_{k+1}^*(0) + C_k)$$

Asumiendo  $C_N = 0$ . Entonces:

$$V_k^*(0) = \min_{q \in \{0,1\}} V(0, q)$$

b) Resolvemos:

- **Etapas 4:**

$$V_4^*(0) = 450$$

- **Etapas 3:**

$$\begin{aligned} V_3(0, 1) &= 100 + 0,4 \cdot 150 + 0,6 \cdot 450 = 430 \\ V_3(0, 0) &= 450 \end{aligned}$$

Implica que  $q_3^* = 1$  y que  $V_3^*(0) = 430$

- **Etapas 2:**

$$\begin{aligned} V_2(0, 1) &= 100 + 0,6 \cdot 250 + 0,4(100 + 430) = 462 \\ V_2(0, 0) &= 100 + 430 = 530 \end{aligned}$$

Implica que  $q_2^* = 1$  y que  $V_2^*(0) = 462$

- **Etapas 1:**

$$\begin{aligned} V_1(0, 1) &= 100 + 0,8 \cdot 500 + 0,2(100 + 462) = 612 \\ V_1(0, 0) &= 100 + 462 = 562 \end{aligned}$$

Implica que  $q_1^* = 0$  y que  $V_1^*(0) = 562$

### Problema 3

- a) Basta con calcular la esperanza de las utilidades recibidas en  $k$ , teniendo en cuenta que  $b_k$  es una v.a.:

$$E(Ut_k) = \int_0^\infty \sqrt{a_k + y \cdot G} \cdot f_{b_k}(y) dy$$

- b) ■ **Etapas:**

Cada una de las semanas del horizonte de evaluación,  $k=0, \dots, T$

- **Variable de Estado:**

$S_k$  = Cantidad de dinero disponible al comienzo de la semana  $k$ .

- **Variable de Decisión:**

$x_k$  = Cantidad de dinero a gastar en semana  $k$ .

- **Variable Aleatoria:**

$b_k$  = Variable que modela el hecho de no saber todas las actividades a realizar en la semana.

- **Recurrencia:**

$$S_{k+1} = S_k - x_k$$

- **Función de Beneficio:**

$$E_{b_k}[V_k(S_k, x_k)] = \int_0^\infty \sqrt{(a_k + y) \cdot x_k} \cdot f_{b_k}(y) dy + V_{k+1}^*(S_k - x_k)$$

Donde:

$$V_k^*(S_k) = \max_{0 \leq x_k \leq S_k} \{E_{b_k}[V_k(S_k, x_k)]\}$$

- **Condiciones de Borde:**

$$V_{T+1}(S_{T+1}) = 0$$

$$S_0 = M$$