



Universidad de Chile

Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa

Profs: P. Hernandez, P. Rey, A. Saure

Aux: F. Castro, S. Maldonado, M. Pereira, L. Reus

Solución Clase Auxilliary 4, 21 de Marzo de 2006

## Árboles de Decisión

### Problema 1

1. Para desarrollar el problema necesitamos conocer ciertas probabilidades. Sean:

T+ = Test indica pieza mala.

T- = Test indica pieza buena.

P = Parar de producir.

NP = continuar la producción.

A = Empresa tipo A.

B = Empresa tipo B.

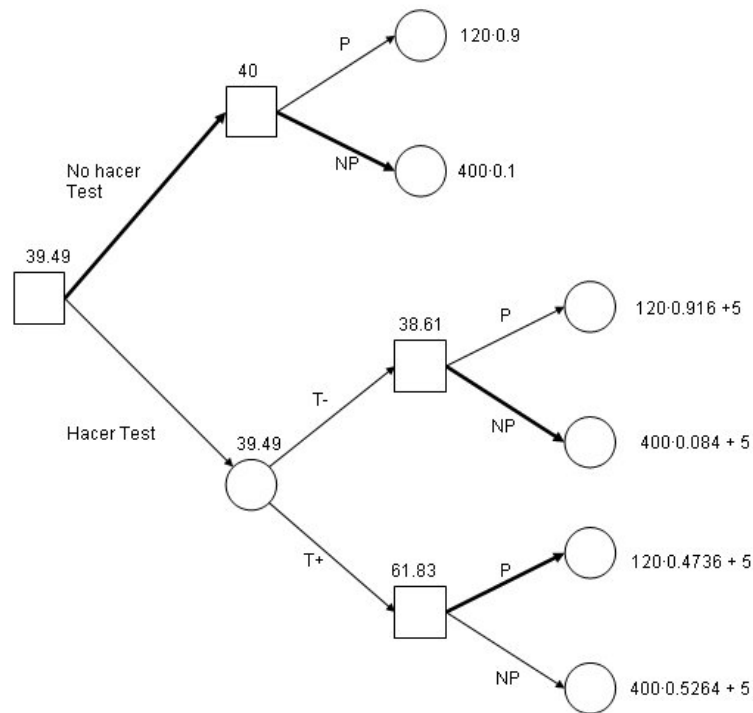
De esta forma se tiene que:

$$\begin{aligned}P[T+|A] &= 0,02 = 1 - P[T-|A] \\P[T+|B] &= 0,2 = 1 - P[T-|B] \\P[T+] &= P[T+|A] \cdot P[A] + P[T+|B] \cdot P[B] \\&= 0,02 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,1 \\&= 0,038 \\ \Rightarrow P[T-] &= 0,962\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}P[A|T+] &= \frac{P[T+|A]P[A]}{P[T+]} = \frac{0,018}{0,038} = 0,4736 = 1 - P[B|T+] \\P[A|T-] &= \frac{P[T-|A]P[A]}{P[T-]} = \frac{0,882}{0,962} = 0,916 = 1 - P[B|T-]\end{aligned}$$

El árbol de decisión asociado se muestra en la figura.



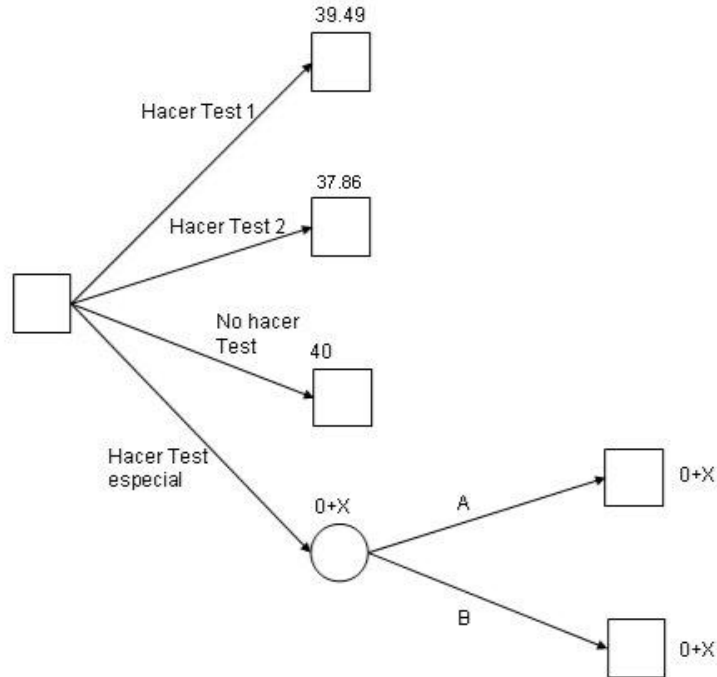
Noten que conviene realizar el test.

2. La idea es exactamente la misma, solamente que debemos calcular las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned}
 P[T++] &= 0,0004 \cdot 0,9 + 0,04 \cdot 0,1 = 0,00436 \\
 P[T--] &= 0,92836 \\
 P[T+-] &= 0,06728 \\
 P[A|T++] &= \frac{0,0004 \cdot 0,9}{0,00436} = 0,0825 = 1 - P[B|T++] \\
 P[A|T--] &= \frac{0,978 \cdot 0,9}{0,92836} = 0,9311 = 1 - P[B|T--] \\
 P[A|T+-] &= \frac{(2 \cdot 0,98 \cdot 0,02) \cdot 0,9}{0,0678} = 0,5244 = 1 - P[B|T+-]
 \end{aligned}$$

El árbol de decisión asociado se muestra en la figura.

3. Para ver cual es el valor de la información perfecta considere un test que clasifica correctamente a las empresas y cuyo valor es X. El árbol de decisión asociado se muestra en la figura.



Entonces el valor de este test especial será 37.86.

## Problema 2

1. El árbol de decisión asociado a este problema es el que se muestra en la figura ??.

La opción del tratamiento preventivo entrega una ganancia segura de 0(u.m.). Por otro lado la opción de jugar entrega una utilidad esperada de  $6000p - 5000(u.m.)$ . Es así como la estrategia óptima será la que reporte una mayor utilidad (esperada). Entonces se tendrá que:

$$B_0(p) = (6000p - 5000)^+$$

2. Para desarrollar este punto necesitamos conocer ciertas probabilidades. Sean:

T+ = Test positivo.  
T- = Test negativo.  
E = Enfermo.  
NE = No enfermo.

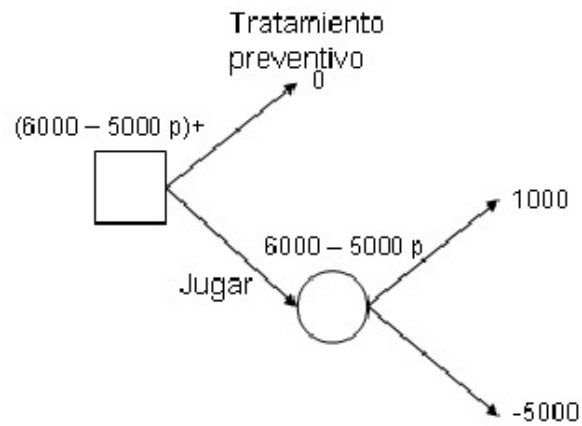
Entonces:

$$P[T+ | NE] = 0 = 1 - P[T- | NE]$$

$$P[T+ | E] = \beta = 1 - P[T- | E]$$

Entonces mediante probabilidades totales:

$$P[T+] = \beta(1 - p) = 1 - P[T-]$$

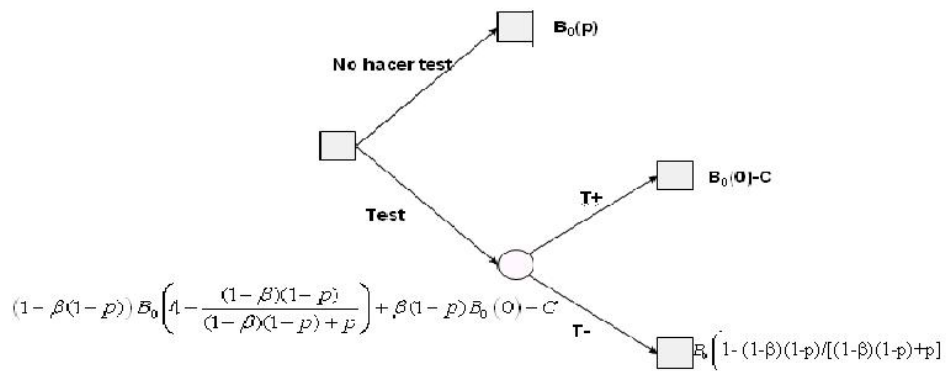


Entonces, aplicando Bayes:

$$P[E|T+] = 1 = 1 - P[NE|T+]$$

$$P[E|T-] = \frac{(1-\beta)(1-p)}{(1-\beta)(1-p)+p} = 1 - P[NE|T-]$$

De acuerdo a esto el árbol de decisión es el que se muestra en la figura ??.



Entonces se tiene que la utilidad esperada en el caso de hacer el test será:

$$E[\text{U Hacer test}] = (1 - \beta(1 - p))B_0 \left[ 1 - \frac{(1 - \beta)(1 - p)}{(1 - \beta)(1 - p) + p} \right] + \beta(1 - p)B_0[0] - C$$

Entonces el valor de la estrategia óptima será:

$$B_1(p, \beta, C) = \max \left\{ (1 - \beta(1 - p))B_0 \left[ 1 - \frac{(1 - \beta)(1 - p)}{(1 - \beta)(1 - p) + p} \right] + \beta(1 - p)B_0[0] - C, B_0(p) \right\}$$

Sin embargo, si asumimos que  $p > \frac{5}{6}$  entonces, dado que:

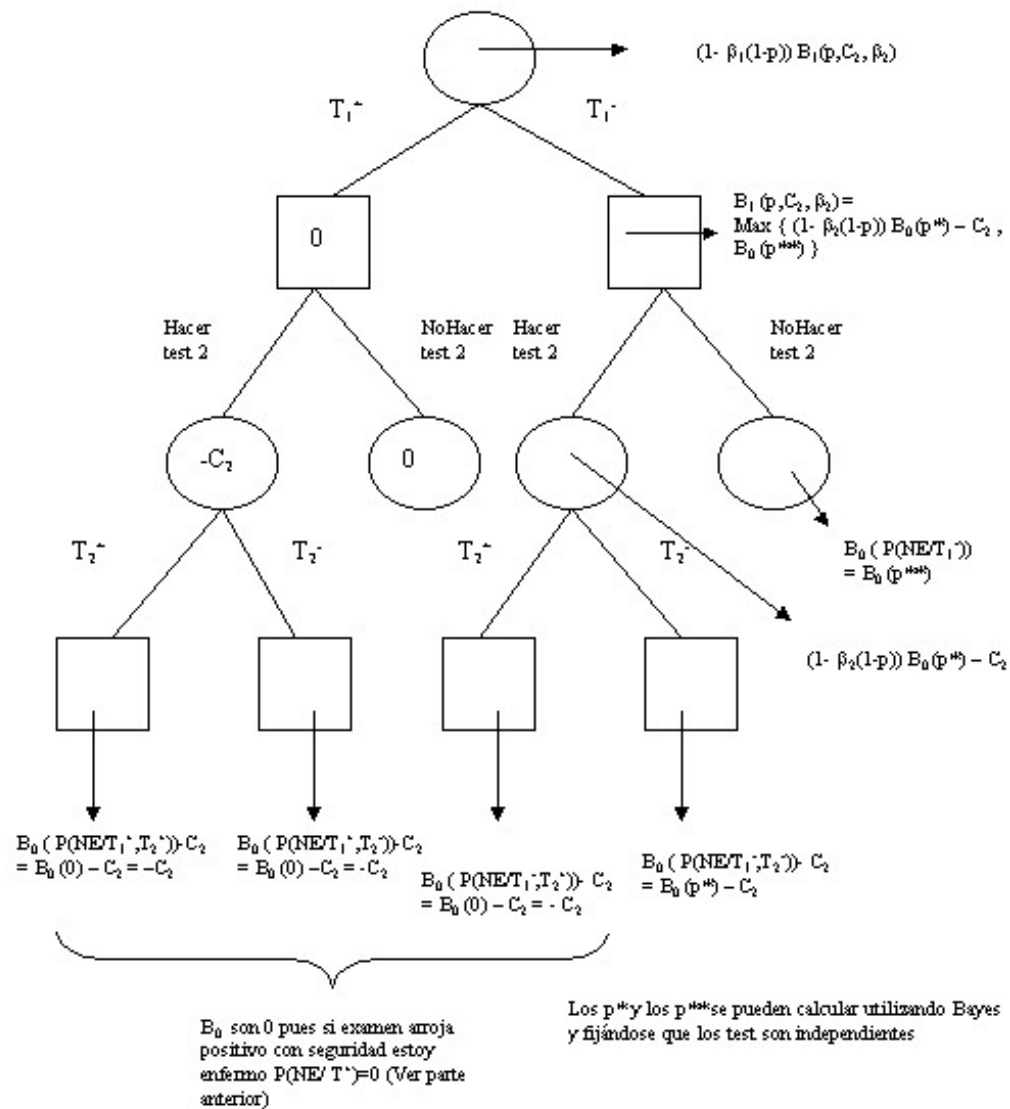
$$\begin{aligned} B_0(p) &= 1000(6p - 5) & \text{si } p > \frac{5}{6} \\ B_0(p) &= 0 & \text{si } p \leq \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Se tendrá que:

$$B_1(p, \beta, C) = \max \left\{ (1 - \beta(1 - p))1000 \left[ 6 - 6 \frac{(1 - \beta)(1 - p)}{(1 - \beta)(1 - p) + p} - 5 \right] + -C, 1000(6p - 5) \right\}$$

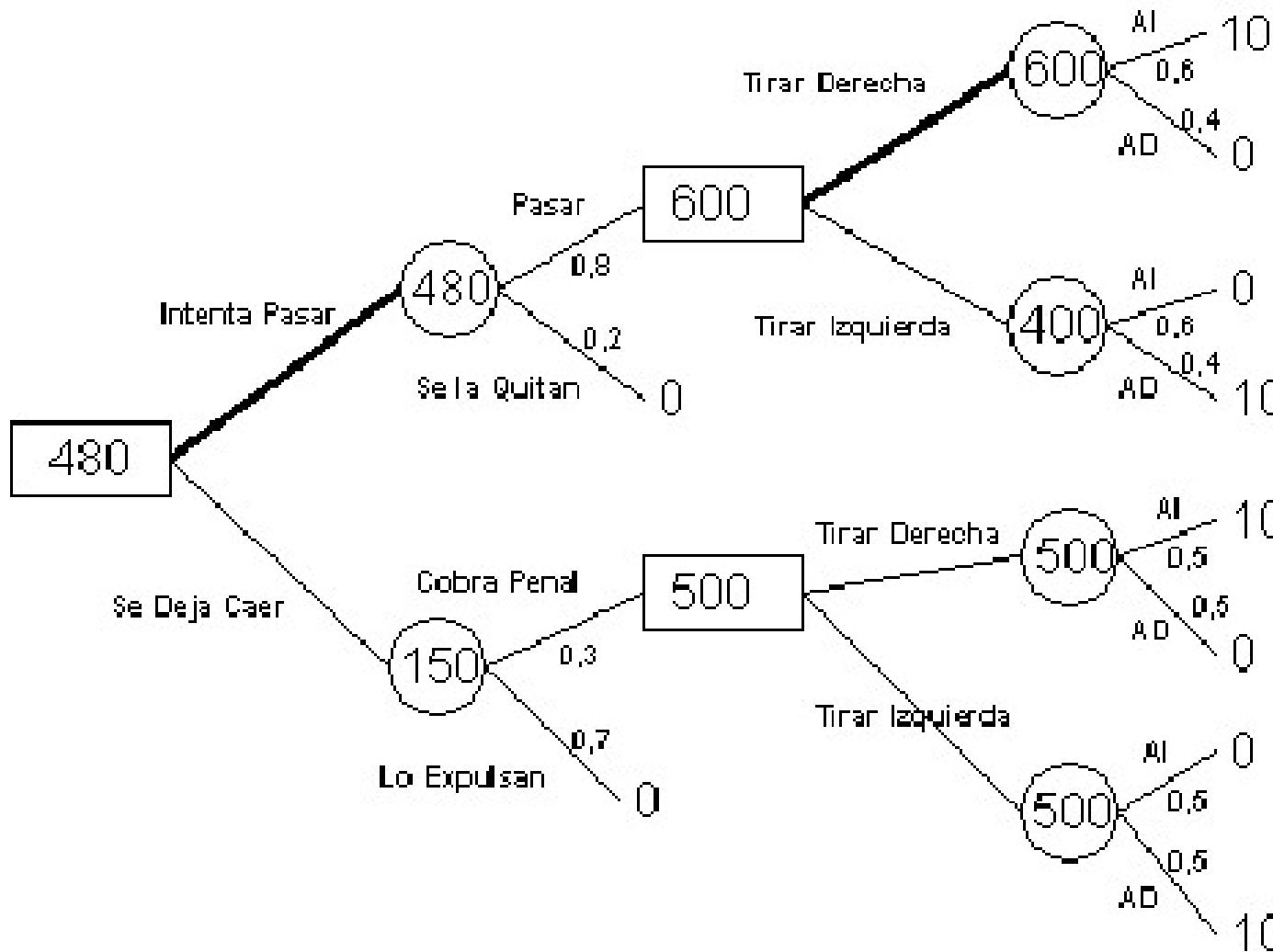
3. El test 1 siempre será utilizado, dado que su costo es 0. Esto es porque aunque no entregue información adicional (cosa que sí hace puesto que si entrega un resultado positivo, con seguridad sabemos que la persona está enferma) el hecho que no cueste dinero, a lo más deja el problema invariante.
4. Es importante notar que, dado que siempre se utiliza el test 1, el problema comienza con los resultados de éste, y los problemas que se enfrentan luego de los resultados, son los mismos enfrentados en la parte anterior pero considerando otra probabilidad de enfermedad inicial.

La utilidad esperada en la parte 4 será como se muestra en la figura:



### Problema 3

1. El problema se puede modelar con el árbol de la figura (los pagos están expresados en M US\$). Luego, **Reis** debe intentar eludir a *el colombiano* y rematar hacia la derecha.



2. Para esto debemos comparar el retorno de jugar sin los consejos de *el Gurú* con los que se podrían obtener gracias a la ayuda de sus predicciones, debemos calcular las probabilidades condicionales.

Sean:

- TI = *el Gurú* dice que el arquero se tira a la izquierda.
- TD = *el Gurú* dice que el arquero se tira a la derecha.
- AD = el arquero se tira a la derecha.
- AI = el arquero se tira a la izquierda.

Es necesario notar que al ser distinta la probabilidad de que el arquero se tire a la izquierda dependiendo si es un penal o un *mano a mano*, la probabilidad de que *el Gurú* diga que el arquero se lanza a la izquierda es distinta para el caso de un penal y el de un *mano a mano* (0,6 y 0,68 respectivamente), como se puede observar en el árbol de la Figura 2, esto a su vez produce distintas

probabilidades condicionales ( $P[AI/TI]$ ) en cada sub-árbol (*se deja caer o intenta pasar*) .

De esta forma se tiene que, para el caso de un *mano a mano*:

$$\begin{aligned}
 P[TD|AD] &= 0,8 = 1 - P[TI|AD] \\
 P[TI|AI] &= 1 = 1 - P[TD|AI] \\
 P[TI] &= P[TI|AD] \cdot P[AD] + P[TI|AI] \cdot P[AI] \\
 &= 0,2 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,6 \\
 &= 0,68 \\
 \Rightarrow P[TD] &= 0,32
 \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
 P[AD|TD] &= \frac{P[TD|AD]P[AD]}{P[TD]} = \frac{0,8 \cdot 0,4}{0,32} = 1 = 1 - P[AI|TD] \\
 P[AI|TI] &= \frac{P[TI|AI]P[AI]}{P[TI]} = \frac{1 \cdot 0,6}{0,68} = 0,88 = 1 - P[AD|TI]
 \end{aligned}$$

y para el caso de un lanzamiento penal:

$$\begin{aligned}
 P[TD|AD] &= 0,8 = 1 - P[TI|AD] \\
 P[TI|AI] &= 1 = 1 - P[TD|AI] \\
 P[TI] &= P[TI|AD] \cdot P[AD] + P[TI|AI] \cdot P[AI] \\
 &= 0,2 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 \\
 &= 0,6 \\
 \Rightarrow P[TD] &= 0,4
 \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
 P[AD|TD] &= \frac{P[TD|AD]P[AD]}{P[TD]} = \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,4} = 1 = 1 - P[AI|TD] \\
 P[AI|TI] &= \frac{P[TI|AI]P[AI]}{P[TI]} = \frac{1 \cdot 0,5}{0,6} = 0,833 = 1 - P[AD|TI]
 \end{aligned}$$

Como se observa en el árbol de la Figura, al equipo le conviene contratar a *el Gurú* y este puede cobrar hasta  $\text{US\$}735.000 - \text{US\$} 480.000 = \text{US\$}255.000$  por utilizar sus habilidades predictivas en beneficio del equipo de **Reis**.



