



Clase Auxilliary 2, 08 de Marzo de 2006

## Repaso Probabilidades

### Problema 1, CTP 1 Otoño 2005

El temido *Jack* y sus  $M$  secuaces ( $M > 0$ ) conforman una famosa banda dedicada al robo desde un cajero automático ubicado en una concurrida calle de *Felipilla*. La patrulla de esa comuna busca afanosamente reducir a la banda, pero hasta el momento no lo han conseguido debido a problemas operacionales.

Jack cita a sus secuaces para que a las 9:00 AM (diremos  $t = 0$ ) estén en la sede de la banda. A dicha reunión un secuaz cualquiera, independiente de todo lo demás, asiste con probabilidad  $p$ . Una vez reunidos, cada uno de los secuaces que asistieron a la reunión, demorará un tiempo distribuido según una v.a. exponencial de parámetro  $\lambda$  en acudir al cajero (variables iid). Cada uno de ellos robará un monto de dinero de éste, si es que la patrulla de Felipilla no se encuentra en el lugar. De lo contrario, será arrestado.

La patrulla, también a partir de las 9:00 AM, acudirá al cajero en un tiempo distribuido según una v.a. exponencial de parámetro  $\mu$ . Una vez en el lugar, permanecerá *indefinidamente* vigilando el cajero. La patrulla recibe una ganancia de  $\mathbf{R}$  unidades de imagen [u.i.] si alcanza a sorprender al *último* de los asaltantes intentando robar del cajero. Adicionalmente, si la patrulla llega antes que *todos* los asaltantes al lugar y, por lo tanto, sorprenderá a cada uno de ellos en sus intentos de robo al cajero, se adjudica un beneficio de  $\mathbf{B}$  [u.i.]. Por el contrario, si la patrulla no alcanza a sorprender a *ninguno* de los secuaces en el intento de robo, sufrirá un costo de  $\mathbf{C}$  [u.i.] ante la comunidad felipillana.<sup>1</sup>

1. (1.5 pts)
  - (a) Calcule la función de distribución acumulada del máximo de  $n$  v.a. exponenciales i.i.d. de parámetro  $\lambda$ .
  - (b) Calcule la función de densidad del máximo de  $n$  v.a. exponenciales i.i.d. de parámetro  $\lambda$ .
  - (c) Entregue una expresión para la probabilidad de que la patrulla llegue al cajero en un tiempo menor que  $t$ .
  - (d) Dado que  $n$  secuaces han asistido a la reunión ( $0 < n \leq M$ ), entregue una expresión para la probabilidad de que la patrulla sorprenda al último de los asaltantes en su intento de robo al cajero.
2. (1.5 pts) Dado que  $n$  secuaces han asistido a la reunión ( $0 < n \leq M$ ), ¿cuál es la probabilidad de que la patrulla sorprenda a todos los asaltantes en su intento de robo al cajero?
3. (1.5 pts) Sean  $P_1(n)$  y  $P_2(n)$  las probabilidades encontradas en partes (1d) y (2), respectivamente. Entregue una expresión para la utilidad esperada de la patrulla en [u.i.].

Suponga ahora que existe otro temido asaltante de cajeros llamado *Don King* que pretende asaltar el mismo cajero felipillano que la banda de Jack. Don King actúa en solitario, sin secuaces, y también a partir de las 9:00 AM (recuerde que fijamos esa hora como  $t = 0$ ), acudirá al cajero en un tiempo distribuido según una v.a. uniforme de parámetros  $(0, b)$ . Si Don King llega antes que todos los otros secuaces, se roba todo el dinero del cajero, por lo que Jack decidirá desintegrar su banda y retomar sus estudios. Si al menos uno de los secuaces de Jack acude al cajero antes que Don King, Jack seguirá comandando su

<sup>1</sup>Notar entonces que para efectos de beneficios y costos de la patrulla, los sucesos relevantes están dados por si llega al cajero antes que el primero de los asaltantes y por si llega antes o después que el último de ellos.

banda.

Considere que tanto Don King como la banda de Jack conocen una forma de acceder al cajero sin ser sorprendidos por la patrulla, por lo tanto, el tiempo al que ésta llega al lugar de los hechos es irrelevante para esta parte.

4. (1.5 pts) Dado que  $n$  secuaces de Jack asisten a la reunión matinal ( $0 < n \leq M$ ), ¿Qué condición debe cumplir  $b$  para que la probabilidad de que Jack retome sus estudios sea mayor que la probabilidad de que siga comandando la banda de secuaces?

### Bonus (0.5 pts)

Supongamos ahora que antes de las 9:00 AM, Don King decide no atacar el cajero de Felipilla, por lo cual no es relevante en esta parte.

Jack y sus secuaces siguen conociendo la forma de acceder al cajero que les permite asaltarlo independientemente de si la patrulla ha llegado al lugar o no. Por cada asaltante que accede al cajero, el monto robado es de  $K$  [u.m.] que será entregado íntegramente al jefe Jack ( $K \in N, K < \frac{M}{2}$ ). Éste, que algún tiempo atrás se dedicó a estudios varios, ha calculado que si  $x$  de sus secuaces acuden al cajero, él percibe un costo de  $\frac{x^2}{4}$  [u.m.] por concepto de traslados desde la sede al cajero.

5. (0.5 pts) Plantee un problema de optimización que le permita encontrar el número  $x^*$  óptimo de secuaces que debe tener Jack en la reunión (i.e., el número que le permite maximizar su utilidad) y resuélvalo. ¿Cuál es la probabilidad de que a la reunión de las 9:00 AM llegue un número de secuaces mayor o igual que  $x^*$ ?

## Problema 2, CTP 1 Primavera 2003

En la próxima elección municipal de la lejana comuna de Santiagolandia, se enfrentarán 2 famosos personajes de la televisión: Labím y Tribellín. Abstrayéndose de su posición política, ud. es contratado por el comando de Tribellín, para estudiar la estrategia de la campaña para dicha elección.

La política de ambos candidatos es enviar a cada uno de los  $N$  votantes de la comuna (*con  $N$  impar*) un folleto en el cual explican detalladamente el plan a desarrollar en caso de ser electos. El tiempo que transcurre desde el comienzo del período de campaña hasta que un poblador en particular recibe el folleto de Tribellín es una variable aleatoria que sigue una distribución exponencial de parámetro  $\lambda_T$ , i.i.d para cada uno de los habitantes de la comuna. Por otro lado, hasta que un poblador en particular recibe el folleto de Labím transcurre un tiempo exponencial de parámetro  $\lambda_L$ , i.i.d para cada uno de los votantes. Este período de publicidad termina una vez que todos las personas de la comuna han recibido ambos folletos.

Además se sabe que cada poblador en particular votará con probabilidad  $q_1$  por el candidato del cual recibió primero el folleto informativo, y con probabilidad  $q_2$  por el candidato del cual recibió segundo el folleto. Suponga que no hay votos blancos ni nulos.

Finalmente, se sabe que el comando de Tribellín se ve enfrentado a la siguiente estructura de costos:

- El costo total de enviar los  $N$  folletos de publicidad es una variable aleatoria de distribución uniforme en el intervalo  $[a, b]$ .
- En caso de ganar se obtiene un beneficio en unidades de felicidad avaluado en  $\$W_1$ . Además se percibe un beneficio de  $\$W_m$  si gana por una diferencia mayor o igual a  $m$  votos ( $1 \leq m \leq N$ ).
- En caso de perder se tiene una pérdida en unidades de felicidad avaluado en  $\$S_1$ . Además si Labím obtiene más del doble de la votación de Tribellín se tiene una pérdida de  $\$S_2$ .

El objetivo de este problema es determinar el valor esperado de los beneficios para el comando de Tribellín, por el hecho de participar en la elección municipal. Para ello se pide que responda las siguientes preguntas.

1. (0.5 pts.) ¿Cómo se distribuye el tiempo hasta que un votante en particular recibe el primero de los dos folletos informativos?. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer folleto que reciba sea el de Tribellín?
2. (1.0 pts) ¿Cuál es la probabilidad de que un habitante en particular vote por Tribellín?. Llame a esta probabilidad  $p_t$ .
3. (1.0 pts.) ¿Cuál es la distribución de probabilidades de la cantidad de votos ( $X_t$ ) que recibirá Tribellín en la elección municipal?. ¿Cuál es el número esperado de votos para Tribellín?.
4. (1.0 pts.) Entregue expresiones para las probabilidades de que Tribellín gane y pierda la elección.
5. (1.5 pts) ¿Cuál es la probabilidad que Tribellín gane la elección por una diferencia mayor o igual a  $m$  votos?. ¿Cuál es la probabilidad de que Labím obtenga más del doble la votación de su opositor?
6. (1.0 pts) Utilizando los resultados de las partes anteriores entregue una expresión para el valor esperado de los beneficios para el comando de Tribellín