



PAUTA CONTROL 2

Pregunta 1

1. (3,0 pts.) Modele el sistema descrito como una cadena de Markov en tiempo discreto. Identifique claramente los estados y las probabilidades de transición. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.

- Los **estados** de la cadena que describe la evolución del sistema pueden ser representados por un vector \vec{s} , donde $s(i)$, la i -ésima coordenada del vector, representa la cantidad de líneas del tipo i en funcionamiento en un mes. Si utilizamos n_i para denotar $s(i)$, entonces un estado de la cadena tendría la siguiente forma:

$$(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_T)$$

$$0 \leq n_i \leq N_i \quad \forall i$$

$$n_i \in N \cup \{0\}$$

- Por otro lado, el sistema puede verse como T cadenas de Markov completamente independientes, una para cada tipo de línea. En este sentido, basta con analizar las **probabilidades de transición** de un tipo para definir las probabilidades de la cadena agregada. Consideremos el caso de las líneas tipo i :

$$p_{r(i)s(i)} = \begin{cases} \binom{r(i)}{s(i) - N_i + r(i)} (1 - p_i)^{s(i) - N_i + r(i)} p_i^{N_i - s(i)} & \text{si } s(i) \geq N_i - r(i), \\ 0 & \text{si } s(i) < N_i - r(i). \end{cases}$$

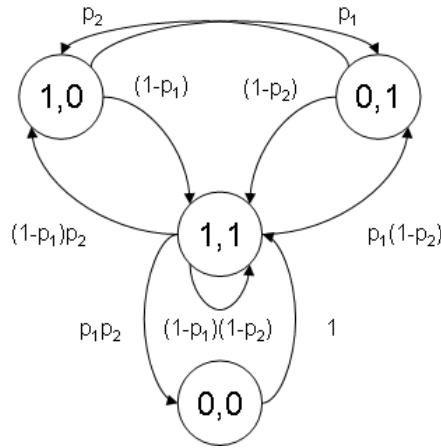
En el caso general tendríamos:

$$p_{\vec{r} \vec{s}} = p_{(r(1), \dots, r(T))(s(1), \dots, s(T))} = \begin{cases} \prod_{k=1}^T p_{r(k)s(k)} & \text{si } s(k) \geq N_k - r(k) \quad \forall k, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

- En cuanto a la existencia de **probabilidades estacionarias**, no es difícil mostrar que la cadena es ergódica (una única clase recurrente aperiódica).

En particular, $p_{(r(1), \dots, r(T))(N_1, \dots, N_T)} > 0$ y $p_{(N_1, \dots, N_T)(r(1), \dots, r(T))} > 0 \quad \forall \vec{r}$. Por lo tanto, la cadena tiene una sola clase que es recurrente, y como $p_{\vec{N} \vec{N}} > 0$ ésta es además aperiódica.

Esto se puede ver para el caso $T = 2$, $N_1 = 1$ y $N_2 = 1$.



Para responder las siguientes preguntas asuma conocidos los valores de las probabilidades estacionarias.

2. (1,5 pts.) En el largo plazo, ¿cuál será la producción mensual esperada de la planta?

Si denotamos por $Q_{\vec{s}}$ a la cantidad de unidades producidas mensualmente en el estado \vec{s} , entonces:

$$Q_{\vec{s}} = \sum_{k=1}^T Q_k s(k)$$

Si $\pi_{\vec{s}}$ corresponde a la probabilidad de encontrarnos en el estado \vec{s} en el largo plazo (probabilidades estacionarias), la **producción mensual esperada** $E(Q_{\vec{s}})$ de la planta estaría dada por:

$$E(Q_{\vec{s}}) = \sum_{\vec{s}} Q_{\vec{s}} \pi_{\vec{s}}$$

3. (1,5 pts.) Si cada línea estuviera supervisada por un operario distinto. Determine, en el largo plazo, el porcentaje esperado del tiempo que un empleado asociado a una línea del tipo i estará ocioso.

Se puede ver que si existen n_i líneas del tipo i operando en un mes, la probabilidad de que un operario de este tipo de líneas no esté trabajando es:

$$q_i = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{N_i - n_i}{N_i}$$

En el largo plazo, la fracción de los meses en que habrán n_i operarios trabajando puede ser expresada como:

$$t(n_i) = \sum_{\vec{s}: s(i)=n_i} \pi_{\vec{s}}$$

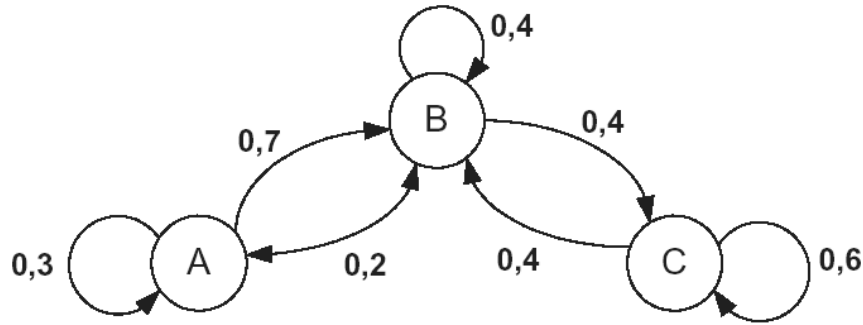
Por lo tanto, el **porcentaje esperado del tiempo** que un empleado asociado a una línea del tipo i estará **ocioso** (TO), será:

$$TO = \sum_{n_i=0}^{N_i} q_i t(n_i) \times 100$$

Pregunta 2

- (1,2 pts.) Modele el sistema descrito como una cadena de Markov en tiempo discreto. Para esto identifique claramente los estados y las probabilidades de transición.

Una cadena posible se muestra en la figura, donde cada estado corresponde a un grupo de clientes (A, B o C) y las transiciones corresponden a pasar de un grupo a otro o permanecer en el mismo por un mes más:



- (1,2 pts.) Calcule el costo esperado mensual para un cliente en el grupo A. Haga lo mismo para clientes en los grupos B y C.

Hint. Recuerde que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

El costo esperado mensual para un cliente del grupo A es:

$$\begin{aligned}
 \hat{r}_A &= \text{Pago fijo} + \text{Costo esperado minutos adicionales} \\
 &= 4.000 + \sum_{i=1}^{80} 300i p_{i+20} \\
 &= 4.000 + 3 \sum_{i=1}^{80} i \\
 &= 4.000 + 3 \times 3.240 \\
 &= 13.720.
 \end{aligned}$$

La suma en la segunda línea la hacemos para los valores posibles de minutos adicionales: entre 1 y el máximo posible que es 80 (los primeros 20 minutos están incluidos).

Análogamente,

$$\hat{r}_B = 9.660, \quad \hat{r}_C = 8.210.$$

- (1,2 pts.) Calcule el costo mensual esperado en el largo plazo.

Para calcular el costo promedio por mes en el largo plazo debemos calcular las probabilidades estacionarias de la cadena, que es ergódica. Estas probabilidades estacionarias son:

$$\pi = [\pi_A, \pi_B, \pi_C] = [1/8, 7/16, 7/16] \simeq [0,12; 0,44; 0,44].$$

A partir de estos valores y de los costos promedio \hat{r} obtenemos que el costo promedio por mes es igual a

$$g = \pi_A \hat{r}_A + \pi_B \hat{r}_B + \pi_C \hat{r}_C = 9.533.$$

3. (1,2 pts.) Si la compañía le ofrece a los nuevos clientes pagar un valor adicional al contratar el plan para comenzar en el grupo B o C en lugar del grupo A, ¿cuál es máximo valor adicional que la persona estaría dispuesta a pagar por comenzar en el grupo B? ¿y en el grupo C?

Considere que esta persona utiliza el criterio de valor esperado para evaluar sus decisiones.

Para esto calculamos el vector asintótico de beneficios relativos W fijando $W_A = 0$ y resolviendo el sistema $W + ge = \hat{r} + PW$.

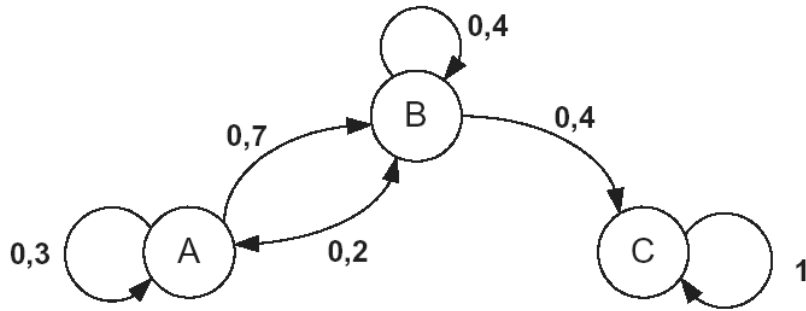
Así obtenemos que lo máximo que estaría dispuesto a pagar por comenzar en el grupo B es $-W_B = 5.980$, mientras que por comenzar en el grupo C es $-W_C = 9.287$.

4. (1,2 pts.) Calcule la esperanza del número de meses desde la contratación del plan hasta integrar por primera el grupo C de clientes. Recuerde que un cliente nuevo comienza en el grupo A.

Hint. Si lo considera necesario, modifique la cadena definida en la primera parte.

Para calcular esto va a determinar el tiempo esperado en el transiente en una cadena obtenida modificando apropiadamente la cadena del punto 1.

Lo que necesitamos es que la mecánica sea la misma que la descrita en el enunciado salvo que cuando lleguemos al estado C “nos quedamos para siempre”. Es decir, la esperanza que queremos calcular corresponde al tiempo esperado en el transiente para la cadena de la figura:



Para obtener el valor pedido calculamos W_A resolviendo el sistema

$$(P_{TT} - I) \begin{bmatrix} W_A \\ W_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es decir

$$\begin{bmatrix} 0,7 & -0,7 \\ -0,2 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_A \\ W_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cuya solución es: $W_A = 130/28 \simeq 4,65$, $W_B = 90/28 \simeq 3,2$.

Pregunta 3



Denotando como $N_1(t)$ al proceso de conteo de tasa λ_1 y $N_2(t)$ al proceso de tasa λ_2 se tiene lo siguiente:

1. Para una cantidad X dada de programas comprados por la agencia.

a) Denotando por P_a a la probabilidad de que queden programas sin vender al comienzo del día 5, se tiene que:

$$P_a = P(N_1(4) < X) = \sum_{k=0}^{X-1} P(N_1(4) = k) = \sum_{k=0}^{X-1} \frac{(\lambda_1 4)^k e^{-\lambda_1 4}}{k!}$$

b) (1.2 pts.) Denotando por $E_b(j)$ a $E[\text{Ventas día 5/quedan } j]$, si al llegar al último día quedan j programas sin vender, la esperanza de la cantidad de programas vendidos el último día está dada por:

$$E_b(j) = \sum_{i=0}^j i \cdot P(N_2(1) = i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} j \cdot P(N_2(1) = i) = \sum_{i=0}^j i \cdot \frac{(\lambda_2 1)^i e^{-\lambda_2 1}}{i!} + \sum_{i=j+1}^{\infty} j \cdot \frac{(\lambda_2 1)^i e^{-\lambda_2 1}}{i!}$$

De manera equivalente, lo anterior se puede expresar como:

$$E_b(j) = \sum_{i=0}^{\infty} \min\{j, i\} \cdot \frac{(\lambda_2 1)^i e^{-\lambda_2 1}}{i!}$$

c) (1.2 pts.) Condicionando sobre la cantidad de paquetes que quedan sin vender al comienzo del día 5, dado que se sabe quedan, y denotando por E_c a la esperanza pedida¹, se tiene que:

$$E_c = \sum_{j=1}^X (E_c / P(N_1(4) = X - j)) \cdot P(N_1(4) = X - j) = \sum_{j=1}^X (X - j + E_b(j)) \cdot \frac{(\lambda_1 4)^{X-j} e^{-\lambda_1 4}}{(X - j)!}$$

2. (1.2 pts.) El problema de maximización de beneficios está dado por:

$$\text{máx } E[B] - \text{Costos}$$

Donde, denotando el evento q como: quedan programas al comienzo del día 5, se tiene que:

$$E(B) = E[B/q] \cdot P(q) + E[B/\sim q] \cdot P(\sim q) = \left[\sum_{j=1}^X (P \cdot (X - j) + C \cdot E_b(j)) \cdot \frac{(\lambda_1 4)^{X-j} e^{-\lambda_1 4}}{(X - j)!} \right] \cdot P_a + P \cdot X \cdot (1 - P_a)$$

Por otro lado, los costos son: $C \cdot X$

¹Si se venden $(X - j)$ en los primeros 4 días, quedan j para el último día

3. (1.2 pts.) Sea x el tiempo hasta que llegue la próxima llamada desde que se cae el sistema. Dada que las llamadas siguen un proceso de poisson de tasa λ_2 , el tiempo hasta la próxima llamada se distribuye exponencial de parámetro λ_2 . Luego, si denotamos y al largo de la caída del sistema se pide que:

$$P(x > y) \leq \alpha \% \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda_2 y} \leq \alpha \%$$

O de manera equivalente:

$$P(N_2(y) \geq 1) \leq \alpha \% \Leftrightarrow 1 - P(N_2(y) = 0) \leq \alpha \% \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda_2 y} \leq \alpha \%$$