



Universidad de Chile  
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa  
Profs: P. Hernandez, P. Rey, A. Saure  
Aux: F. Castro, S. Maldonado, L. Reus

## Pauta Control 3 23 de Junio, 2006

### Pregunta 1

1. En poisson no homogéneo se define  $m(t_a, t_b) = \int_{t_a}^{t_b} \lambda(t) dt$

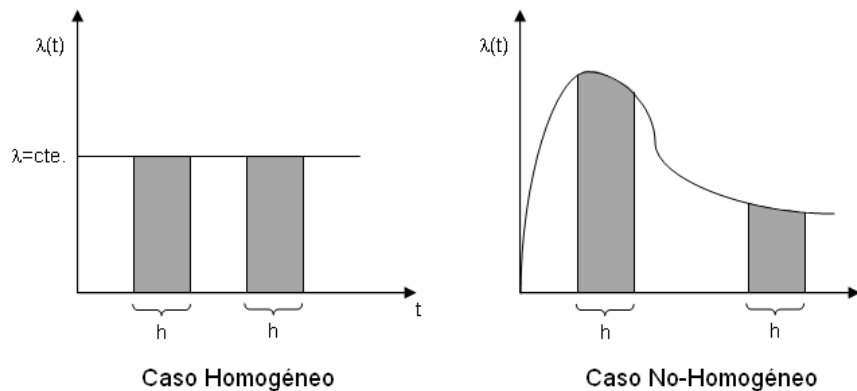
- a) Dado que se produjo una llegada en el intervalo  $[0, t_1]$ , y si definimos como  $x$  al instante de dicha llegada la distribución pedida está dada por:

$$P(x < s \mid N(0, t_1) = 1) = \frac{P(x < s \wedge N(0, t_1) = 1)}{P(N(0, t_1) = 1)} = \frac{P(N(0, s) = 1 \wedge N(0, t_1) = 0)}{P(N(0, t_1) = 1)}$$

Dada la propiedad de incrementos independientes y la definición de un proceso de poisson no homogéneo se tiene que la expresión anterior es equivalente a:

$$\frac{P(N(0, s) = 1 \cdot P(N(s, t_1) = 0))}{P(N(0, t_1) = 1)} = \frac{m(0, s) \cdot e^{-m(0, s)} \cdot e^{-m(s, t_1)}}{m(0, t_1) \cdot e^{-m(0, t_1)}} = \frac{m(0, s)}{m(0, t_1)}$$

- b) La propiedad de incrementos establece que la distribución de eventos que ocurre en un intervalo de tiempo sólo depende del largo del intervalo y no del momento del tiempo en que se esté. Para el caso de Poisson homogéneo se tiene esta propiedad dado que la tasa es constante en el tiempo, como se muestra en la figura la esperanza de la cantidad de eventos es la misma para intervalos de tiempo iguales (área bajo la curva). En cambio, para el caso no-homogéneo se pierde esta propiedad dado que la tasa es variable y no solo importa el largo del intervalo sino que también el instante del tiempo en que se esté midiendo.



2. Definiendo  $X(t)$  como la cantidad de clientes en comunicación con el call center en un instante  $t$  cualquiera, para calcular  $X(t)$  se debe definir un proceso de poisson filtrado en que el filtro esté dado por la probabilidad de estar en el sistema en el instante  $t$ . Por lo visto en clases, se tiene que  $X(t) = \lambda t p(t)$ , donde:

$$p(t) = \int_0^t p(s) \frac{1}{t} ds$$

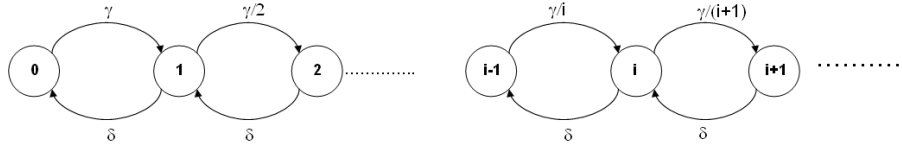
Luego, se debe determinar  $p(s)$ . Si un cliente llega al sistema en el instante  $s \in [0, t]$ , estará en el sistema en el instante  $t$  si:

$$s + t_e + t_f \geq t \implies t_f \geq t - s - t_e$$

Luego dado que  $t_f \rightsquigarrow \exp(\mu_f)$  y  $t_e$  tiene una función de distribución conocida  $h(t_e)$ , se tiene que:

$$p(s) = \int_0^\infty p(s/t_e = v) h(t_e) dt_e = \int_0^\infty e^{-\mu_f(t-s-v)} h(t_e) dt_e$$

3. El sistema descrito está dado por la siguiente cadena.



Donde las probabilidades estacionarias se pueden expresar como sigue:

$$\Pi_k = \frac{\rho^k}{k!} \Pi_0 \quad \rho = \frac{\gamma}{\delta}$$

Luego para calcular  $\Pi_k$ , utilizando la serie de la exponencial se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k = 1 \implies \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \Pi_0 = 1 \implies e^{\rho} \Pi_0 = 1 \implies \Pi_0 = e^{-\rho}$$

Luego se tiene que:  $\Pi_k = \frac{e^{-\rho} \rho^k}{k!}$

La tasa efectiva de salida está dada por:

$$\delta_{EF} = \delta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k = \delta(1 - \Pi_0) = \delta(1 - e^{-\rho})$$

Por otro lado la tasa efectiva de entrada está dada por <sup>1</sup>:

$$\gamma_{EF} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma}{k+1} \Pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma}{k+1} \frac{e^{-\rho} \rho^k}{k!} = \frac{\gamma e^{-\rho}}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{\gamma e^{-\rho}}{\rho} (e^{\rho} - 1)$$

Dado que  $\rho = \frac{\gamma}{\delta}$ , finalmente se tiene que:

$$\gamma_{EF} = \delta(1 - e^{-\rho})$$

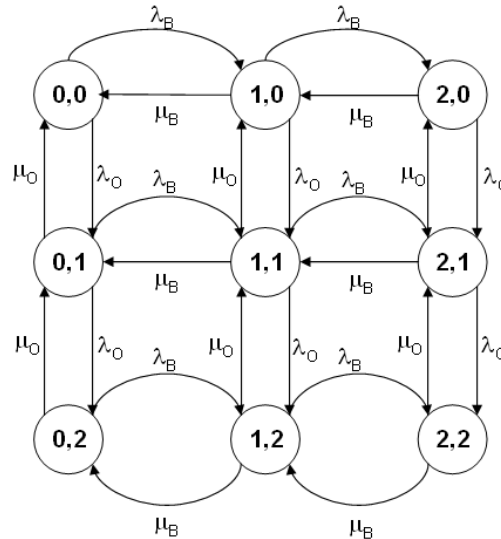
La justificación de esta igualdad se debe a la existencia de régimen estacionario, con lo cual se **siempre** se tiene que la tasa efectiva de entrada es igual a la tasa efectiva de salida.

---

<sup>1</sup>Nuevamente utilizando la serie de la exponencial

## Pregunta 2

- (1.5 pts.) Los estados de la cadena son pares ordenados de la forma  $(x,y)$ , donde  $x$  representa la cantidad de clientes en el sistema del Cajero 1 e  $y$  representa la cantidad de clientes en el sistema del Cajero 2.



Esta cadena es finita e irreducible por lo cual existe régimen estacionario y **NO** es necesario imponer ninguna condición adicional.

- Asumiendo conocidas las probabilidades estacionarias de la cadena de la parte 1, se tiene que:
  - (0.5 pts.) La tasa efectiva de salida del sistema de los Clientes de Otros Bancos está dada por:

$$\mu_{EF}^O = \mu_O(\pi_{0,1} + \pi_{1,1} + \pi_{2,1} + \pi_{0,2} + \pi_{1,2} + \pi_{2,2})$$

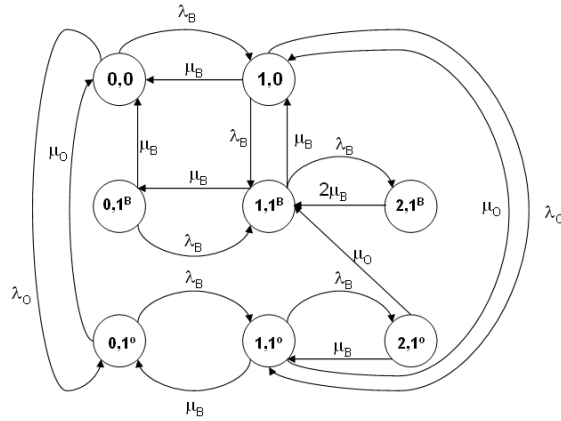
Dado que se cumple régimen estacionario es igual a la tasa de entrada de Clientes de Otros Bancos, por lo que también se puede expresar, de manera equivalente, como:

$$\lambda_{EF}^O = \lambda_O(\Pi_{0,1} + \Pi_{1,1} + \Pi_{2,1} + \Pi_{0,0} + \Pi_{1,0} + \Pi_{2,0})$$

- (0.5 pts.) La esperanza de la cantidad de personas que en una hora llegan al sistema y no pueden ingresar porque el sistema está lleno, está dado por:

$$E = 60 * [\lambda_B * (\Pi_{2,0} + \Pi_{2,1} + \Pi_{2,2}) + \lambda_O * (\Pi_{0,2} + \Pi_{1,2} + \Pi_{2,2})]$$

- (2.0 pts.) En esta nueva situación **es necesario** incorporar más información a los estados para poder modelar lo descrito. En los estados cuando el cajero 2 está siendo usado hay que identificar si está siendo utilizado por un Cliente BanShile o por un Cliente de Otro Banco, que en este caso representado por un superíndice.



4. Asumiendo conocidas las probabilidades estacionarias de la cadena de la parte 3, se tiene que:

- a) (0.7 ptos.) La fracción del tiempo que el Cajero 2 está siendo utilizado por Clientes BancoShile, sobre el total del tiempo de ocupación de este cajero está dado por:

$$F = \frac{\Pi_{0,1^B} + \Pi_{1,1^B} + \Pi_{2,1^B}}{\Pi_{0,1^B} + \Pi_{1,1^B} + \Pi_{2,1^B} + \Pi_{0,1^O} + \Pi_{1,1^O} + \Pi_{2,1^O}}$$

- b) (0.8 ptos.) El tiempo promedio de permanencia en el sistema de una persona cualquiera, se puede calcular usando la formula de Little.

$$L = 1 \cdot (\Pi_{0,1^B} + \Pi_{0,1^O} + \Pi_{1,0}) + 2 \cdot (\Pi_{1,1^B} + \Pi_{1,1^O}) + 3 \cdot (\Pi_{2,1^B} + \Pi_{2,1^O})$$

Por otro lado la tasa efectiva de entrada está dada por:

$$\lambda_{EF} = \lambda_B \cdot (1 - (\Pi_{2,1^B} + \Pi_{2,1^O})) + \lambda_O \cdot (\Pi_{0,0} + \Pi_{1,0})$$

Finalmente:

$$W = \frac{L}{\lambda_{EF}}$$

### Pregunta 3

- Una cadena representando el funcionamiento del sistema se muestra en la Figura 1. El estado 0 representa la situación en que el sistema está vacío, es decir, no se está trabajando en ningún pedido y no hay pedidos en espera. Los estados  $i$  (para  $i \geq 1$ ) representan los casos en que hay  $i$  trabajos a colores en el sistema (uno siendo impreso e  $(i - 1)$  esperando). Análogamente, los estados  $i^*$  representan los casos en que hay  $i$  trabajos en blanco y negro.

Se pueden considerar entonces tres “casos genéricos”: 0,  $i$  ( $i \geq 1$ ) e  $i^*$  ( $i \geq 1$ ), que se ilustran en la Figura 2.

- Las condiciones de estacionariedad para la cadena del punto anterior corresponden a que tanto los trabajos a colores como los en B&N puedan ser procesados, en promedio, más rápido de lo que llegan. Es decir, se debe satisfacer, *simultáneamente* que  $\lambda_C < \mu_C$  y  $\lambda_{BN} < \mu_{BN}$ .

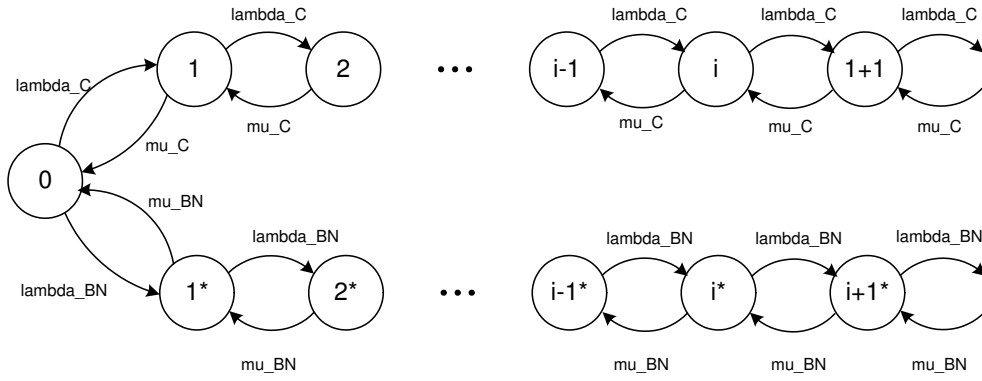


Figura 1: Cadena punto 1.

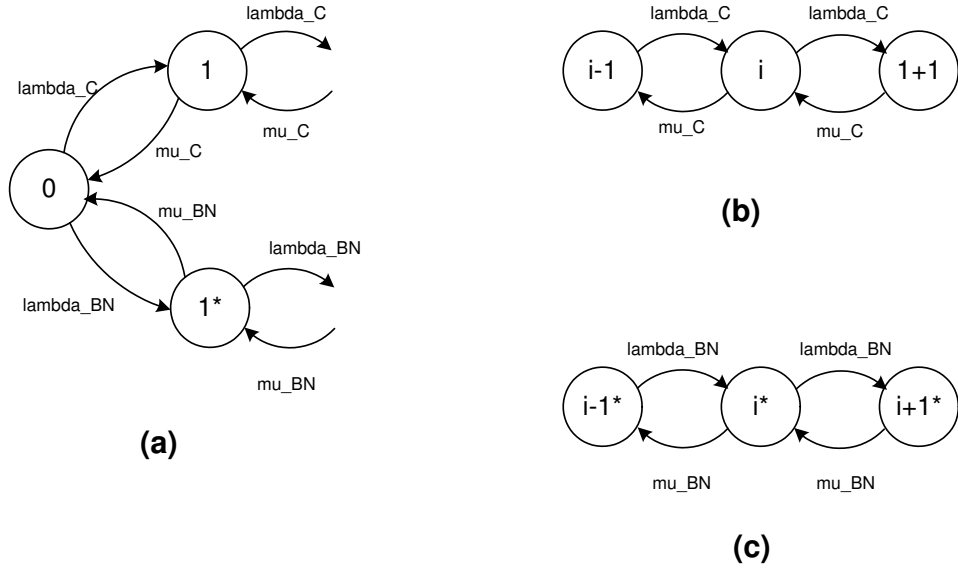


Figura 2: Casos genéricos para la cadena de Figura 1: (a) sistema vacío; (b) procesando trabajos a colores; (c) procesando trabajos en blanco y negro.

Bajo estas condiciones, las probabilidades estacionarias de la cadena pueden ser obtenidas resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 (\lambda_C + \lambda_{BN})\pi_0 &= \mu_C\pi_1 + \mu_{BN}\pi_{1*} \\
 (\lambda_C + \mu_C)\pi_i &= \lambda_C\pi_{i-1} + \mu_C\pi_{i+1} && \text{para todo } i \geq 1 \\
 (\lambda_{BN} + \mu_{BN})\pi_{i*} &= \lambda_{BN}\pi_{i-1*} + \mu_{BN}\pi_{i+1*} && \text{para todo } i \geq 1 \\
 \pi_0 + \sum_{i \geq 1} \pi_i + \sum_{i \geq 1} \pi_{i*} &= 1.
 \end{aligned}$$

donde  $\pi_e$  denota la probabilidad estacionaria asociada al estado  $e \in \{0, 1, 2, \dots, 1^*, 2^*, \dots\}$ .

**Obs.** La solución del sistema anterior satisface:

$$\pi_i = \left( \frac{\lambda_C}{\mu_C} \right)^i \pi_0 \quad \text{y} \quad \pi_{i*} = \left( \frac{\lambda_{BN}}{\mu_{BN}} \right)^i \pi_0$$

3. a) Son aceptadas todas las impresiones a color que se solicitan cuando se está realizando otra impresión a color o el sistema está vacío. Por lo tanto, la tasa que se pide es igual a  $\lambda_C \left( \pi_0 + \sum_{i \geq 1} \pi_i \right)$ .

- b) Para calcular el tiempo promedio de permanencia en el sistema  $W$  podemos utilizar la fórmula de Little. Para esto debemos determinar el número promedio de entidades en el sistema  $L$  y la tasa efectiva de entrada al sistema  $c$  y entonces  $W = L/\bar{\lambda}$ .

La cantidad promedio de entidades en el sistema es  $L = \sum_{i \geq 1} (\pi_i + \pi_{i*})$ .

La tasa efectiva de entrada al sistema se obtiene del punto (a):

$$\bar{\lambda} = \lambda_C \left( \pi_0 + \sum_{i \geq 1} \pi_i \right) + \lambda_{BN} \left( \pi_0 + \sum_{i \geq 1} \pi_{i*} \right)$$

- c) Esto corresponde a la probabilidad que la próxima vez que el sistema esté vacío la primera llegada sea un pedido de impresión en B&N. Como el sistema puede ser representado por un cadena de Markov, esto es lo mismo a la probabilidad que en un momento cualquiera la próxima llegada sea un pedido de impresión en B&N, que es igual a  $\frac{\lambda_{BN}}{\lambda_C + \lambda_{BN}}$ .

Dudas, Consultas y/o Errores  
Patricio Hernández G.  
phernandez@surandina.cl