

Frontera eficiente con n activos riesgosos

Fecha



Sea \vec{w} , matriz de pesos
 Σ , matriz var-covar
 $\vec{\mu}$, vector de retornos
 $\vec{1}$, " " unitario

A resolver:

$$\min \frac{1}{2} \vec{w}^T \Sigma \vec{w}$$

se

$$\vec{w}^T \vec{\mu} = \mu_p$$

$$\vec{w}^T \vec{1} = 1$$

Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(\vec{w}, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \vec{w}^T \Sigma \vec{w} + \lambda_1 (\mu_p - \vec{w}^T \vec{\mu}) + \lambda_2 (1 - \vec{w}^T \vec{1})$$

condiciones de orden

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{w}} = \Sigma \vec{w} - \lambda_1 \vec{\mu} - \lambda_2 \vec{1} = 0 \quad (*)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = \mu_p - \vec{w}^T \vec{\mu} = 0 \quad (**)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 1 - \vec{w}^T \vec{1} = 0 \quad (***)$$

A partir de (*) $\vec{w} = \lambda_1 (\Sigma^{-1} \vec{\mu}) + \lambda_2 (\Sigma^{-1} \vec{1}) \quad (3)$

De (**) y (***)

$$(\vec{\mu}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu}) \lambda_1 + (\vec{\mu}^T \Sigma^{-1} \vec{1}) \lambda_2 = \mu_p \quad (4)$$

$$(\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1}) \lambda_1 + (\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1}) \lambda_2 = 1 \quad (5)$$

Como $\vec{\mu}^T \Sigma^{-1} \vec{1} = (\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu})^T = \vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu} = \vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu}$

~~Entonces haciendo que~~

Entonces haciendo que

$$A = \vec{\mu}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu} = \vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu} \quad \text{tenemos } (4) \text{ y } (5)$$

$$B = \vec{\mu}^T \Sigma^{-1} \vec{1}$$

$$C = \vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1}$$

se pueden escribir como



$$\begin{pmatrix} B & A \\ A & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Para q' (6) tenga solución el determinante debe ser $\neq 0$

$$\Rightarrow D = BC - A^2 \neq 0$$

Además hay que imponer 2 cosas q' generalmente se cumplen

sup 1) Σ invertible
sup 2) $\forall i, j \quad \mu_i \neq \mu_j$ } Estas dos cosas generalmente se cumplen.

Por definición Σ definida no negativa, como Σ invertible

$\Rightarrow \Sigma$ definida positiva (i.e. $\forall \vec{z} \neq \vec{0} \quad \vec{z}^T \Sigma \vec{z} > 0$)

$\Rightarrow \Sigma^{-1}$ " " $\Rightarrow B > 0$ y $C > 0$ y $D > 0$

Sea el vector $\vec{J} = A\vec{\mu} - B\vec{1}$ q' cumple que

~~$$\vec{J}^T \Sigma^{-1} \vec{J} = (A\vec{\mu} - B\vec{1})^T \Sigma^{-1} (A\vec{\mu} - B\vec{1})$$~~

~~$$= A^2 \vec{\mu}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu} - AB \vec{\mu}^T \Sigma^{-1} \vec{1} - BA \vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu} + B^2 \vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1}$$~~

~~$$= A^2 B - ABA - BA^2 + B^2 C$$~~

~~$$= A^2 B - A^2 B - A^2 B + B^2 C = B(BC - A^2)$$~~

~~$$= A^2 B - A^2 B - A^2 B + B^2 C = B(BC - A^2)$$~~

$$(A\vec{\mu} - B\vec{1})^T \Sigma^{-1} (A\vec{\mu} - B\vec{1}) =$$

$$= A^2 \vec{\mu}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu} - AB \vec{\mu}^T \Sigma^{-1} \vec{1} - BA \vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu} + B^2 \vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1}$$

$$= A^2 B - ABA - BA^2 + B^2 C, \text{ como } A, B, C \in \mathbb{R}$$

$$= A^2 B - A^2 B - A^2 B + B^2 C = B(BC - A^2)$$

Entonces hay q' ver si $\vec{J} \neq 0$

$$A\vec{\mu} - B\vec{1} = \vec{\mu}^T \Omega^{-1} \vec{1} \vec{\mu} - \vec{\mu} \Omega^{-1} \vec{\mu} \cdot \vec{1}$$

se hace cero sii $\vec{\mu} = 1$, pero por supz) no puede pasar \Rightarrow

$$\vec{J} \neq 0$$

\therefore Como Ω^{-1} def. positiva y $\vec{J} \neq 0 \Rightarrow B(BC - A^2) > 0$,

ad + $B > 0 \Rightarrow BC - A^2 > 0 \Rightarrow$ el sistema (6) tiene solup

$$(7) \quad B\lambda_1 + A\lambda_2 = \mu_p$$

$$(8) \quad A\lambda_1 + C\lambda_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1 - C\lambda_2}{A}$$

en (7)

$$\Rightarrow B\left(\frac{1 - C\lambda_2}{A}\right) + A\lambda_2 = \mu_p$$

$$\Rightarrow B - BC\lambda_2 + A^2\lambda_2 = \mu_p A \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\mu_p A - B}{A^2 - BC}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{B - \mu_p A}{D} \quad \Rightarrow (8) \quad A\lambda_1 + \frac{CB - \mu_p AC}{D} = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{D - CB + \mu_p AC}{AD}$$

$$\lambda_1 = \frac{BC - A^2 - CB + \mu_p AC}{AD} = \frac{\mu_p C - A}{D} = \lambda_1$$

Reemplazando en (3)

$$w_p = \left(\frac{\mu_p C - A}{D}\right)(\Omega^{-1} \vec{\mu}) + \left(\frac{B - \mu_p A}{D}\right)(\Omega^{-1} \vec{1})$$

$$= \frac{1}{D} (B\Omega^{-1} \vec{1} - A\Omega^{-1} \vec{\mu}) + \frac{1}{D} (C\Omega^{-1} \vec{\mu} - A\Omega^{-1} \vec{1}) \mu_p$$



Definiendo

$$\vec{g} = \frac{1}{D} (B\Omega^{-1}\vec{1} - A\Omega^{-1}\vec{\mu})$$

$$\vec{h} = \frac{1}{D} (C\Omega^{-1}\vec{\mu} - A\Omega^{-1}\vec{1})$$

$$\Rightarrow \vec{w}_p = \vec{g} + \mu_p \vec{h}$$

\Rightarrow los puntos en la frontera eficiente pueden ser obtenidos al combinar 2 portafolios \vec{g} y $\vec{h} \Rightarrow$ teorema de los 2 fondos

A partir de esto. Si tenemos 2 carteras a y b, con μ_a y μ_b , la covarianza es:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(a,b) &= (\vec{w}_p^a)^T \Omega (\vec{w}_p^b) \\ &= (\vec{w}_p^a)^T \Omega (\vec{g} + \mu_b \vec{h}) \\ &= (\vec{w}_p^a)^T \Omega \left(\frac{1}{D} (B\Omega^{-1}\vec{1} - A\Omega^{-1}\vec{\mu}) + \frac{1}{D} (C\Omega^{-1}\vec{\mu} - A\Omega^{-1}\vec{1}) \mu_b \right) \\ &= \frac{1}{D} (\vec{w}_p^a)^T ((B\vec{1} - A\vec{\mu}) + (C\vec{\mu} - A\vec{1}) \mu_b) \\ &= \frac{C}{D} \left(\mu_a \mu_b - \frac{A}{C} (\mu_a + \mu_b) + \frac{B}{C} \right) \\ &= \frac{C}{D} \left(\mu_a - \frac{A}{C} \right) \left(\mu_b - \frac{A}{C} \right) + \frac{1}{C} \quad \cdot \text{En la frontera, ambos portafolios son iguales} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sigma_p^2 = \text{Cov}(a,a) = \frac{C}{D} \left(\mu_p - \frac{A}{C} \right)^2 + \frac{1}{C}$$

Que, a su vez, se puede reescribir como

$$\frac{\sigma_p^2}{1/c} - \frac{(M_p - A/c)^2}{D/c^2} = 1$$

Que es una parábola // : _____ o _____