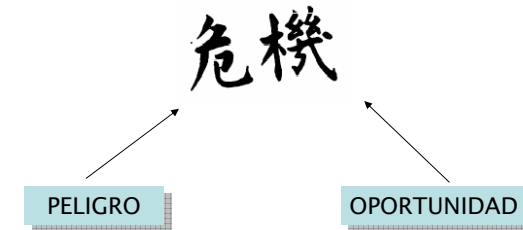


# Riesgo

IN42A - 03

## Riesgo

- Históricamente se ha visto como algo negativo. Sin embargo, la simbología china la define mucho mejor.



## Niveles de riesgo

- Riesgo país
  - Variabilidad del PGB
  - Turbulencias políticas y sociales
  - Relación ingresos y deuda. Déficit fiscal.
  - Etc
  - Principal indicador: EMBI+, elaborado por JP Morgan y mide el riesgo en los principales mercados “emergentes”
  - El riesgo país es, técnicamente hablando, la sobretasa que se paga en relación con los intereses de los bonos del Tesoro de Estados Unidos, país considerado el más solvente del mundo.

## Niveles de riesgo

- Riesgo sectorial
  - Variabilidad del PGB del sector, del mercado objetivo y sus insumos.
- Riesgo específico de una inversión
  - Apalancamiento operativo.
  - Apalancamiento financiero.

## Análisis individual de una inversión

### · 1. Análisis de sensibilidad

- Se determina cambios en los flujos de caja a partir del cambio de las variables más significativas.
- Precio de venta e insumos, costos de producción, costo de oportunidad, volúmenes de venta, inversión, etc.

## Análisis individual de una inversión

### · 1. Análisis de sensibilidad:

**Ejemplo:** Proyecto de venta de televisores.

Situación base:

- Precio de venta = \$150.000
- Precio de compra = 25% sobre la compra
- Demanda =  $Q(P) = 1250 - P/1000$
- Costos fijos anuales = \$12.000.000
- Impuestos = 17%.
- Inversión = \$50.000.000, depreciable a 10 años, Valor residual = 0.
- Horizonte de evaluación = 10 años.

## Análisis individual de una inversión

### · 1. Análisis de sensibilidad:

- VAN Sit. Base (12%) = 25,32 millones
- El VAN del proyecto se hace cero si:
- Si el margen sobre costo cae a 20,7% o sube a 924,7% el VAN=0
- La inversión sube a 75,32
- La tasa de descuento sube a 17,7%
- Etc...

## Análisis individual de una inversión

### · 1. Análisis de sensibilidad:

- Método:
  - Determinar variables riesgosas, si para variaciones esperables de dichas variables el VAN deja de ser mayor que cero, entonces el proyecto es riesgoso.
- Ventajas:
  - Fácil de aplicar y entender.
- Desventajas:
  - Método generalmente estático.
  - No considera variaciones de más de un parámetro a la vez.
  - **No considera distribuciones de probabilidad de las variables.**

## Análisis individual de una inversión

### · 2. Análisis de escenarios:

- Similar al anterior, pero tomando diversos estados, en los que todas las variables toman distintos valores.
- Generalmente se separa en Pesimista, Base y Optimista.
- Mantiene prácticamente todas las desventajas del método anterior.
- Además asume que todas las variables se mueven bajo la misma distribución de probabilidades.

## Análisis individual de una inversión

### · Ejemplo

- Escenario optimista: Capital de Trabajo = 12,5%,  $q=2500-p/2000$
- Escenario pesimista: CdT = 50%,  $q=625-p/500$

## Análisis individual de una inversión

### · 3. Análisis probabilístico

- Asume que existen distribuciones de probabilidad en las distintas variables que componen el flujo de caja.
- Al existir variabilidad de los flujos de caja, eso implica que el VAN es variable y por lo tanto también puede ser analizado estadísticamente.

## Análisis individual de una inversión

### · Repaso de probabilidades:

- **Variable aleatoria:** Una función que asocia un número real, perfectamente definido, a cada punto muestral.
- **Esperanza y varianza:**

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \sum x_i P(x_i)$$

$$E(ax \pm by) = aE(x) \pm bE(y)$$

$$Var(x) = \sigma^2_x = E(x - E(x))^2 = E(x^2) - E^2(x)$$

$$Var(ax \pm by) = \sigma^2_{ax \pm by} = a^2V(x) + b^2V(y) \pm 2abCov(x, y)$$

$$Cov(x, y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

## Análisis individual de una inversión

### • 3.1 VAN esperado

- Sea X una variable aleatoria y los flujos de caja del proyecto dependen de dicha v.a.
- Calculamos un VAN aleatorio

$$E(VPN(x)) = -E(I(x)) + \sum \frac{E(F_t(X))}{(1+r)^t}$$

$$E(VPN(x)) \neq VPN(E(x))$$

- Lo relevante es  $E(VAN(X))$

## Análisis individual de una inversión

### • 3.2 Desviación estándar del VAN

$$1) \sigma(VPM) = \sqrt{\sum_{t=0}^n \frac{\sigma^2(F_t)}{(1+r)^{2t}} + 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\rho(F_i, F_j) \sigma(F_i) \sigma(F_j)}{(1+r)^{i+j}}}$$

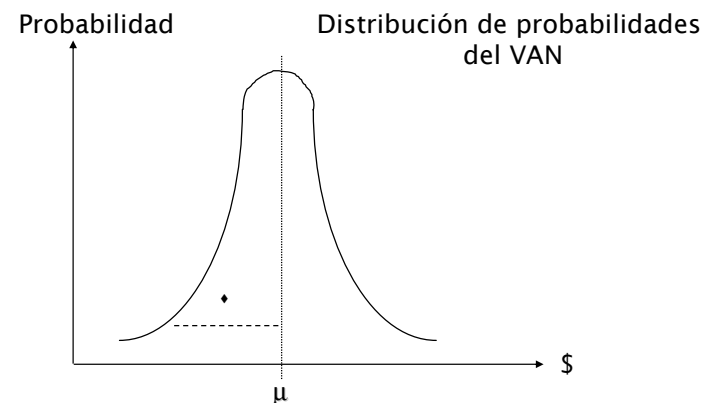
$$2) \sigma(VPM) = \sqrt{\sum_{t=0}^n \frac{\sigma^2(F_t)}{(1+r)^{2t}}}$$

$$2) \sigma(VPM) = \sum_{t=0}^n \frac{\sigma(F_t)}{(1+r)^t}$$

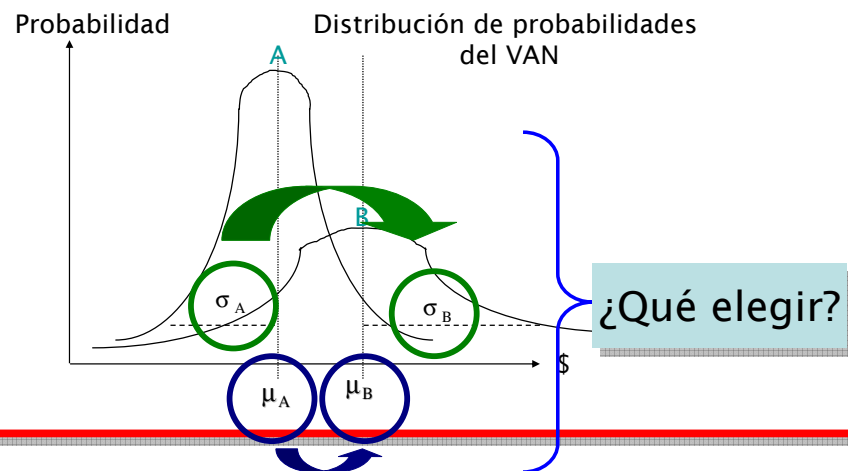
## Análisis individual de una inversión

- Recordando el TCL: si  $(X_n)_n$  es una sucesión de variables aleatorias iid con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , entonces para cierto  $n$  “grande” la suma de  $X_n$  tiende a una normal.
- Como el VAN es igual a una suma (ponderada) de  $n+1$  variables, entonces se puede asumir que sigue una distribución normal.

## Análisis individual de una inversión



## Análisis individual de una inversión

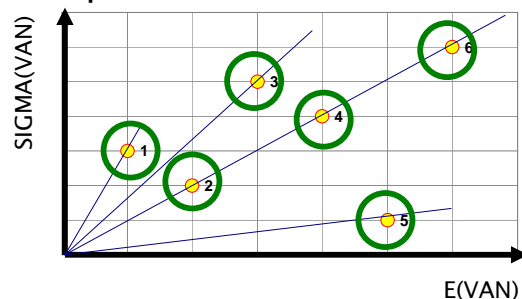


## Análisis individual de una inversión

- Depende del comportamiento del inversor frente al riesgo: Neutro, averso o amante.
- ¿Por cuanto dinero estaría dispuesto a vender el boleto de la siguiente lotería?
  - 50% probabilidad → gana \$1 millón
  - 50% probabilidad → gana \$500 mil
  - $E = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,75$  millones
    - Si está dispuesto a vender a ese mismo precio  $E^* = E$  → neutro
    - Si está dispuesto a vender a un precio más bajo  $E^* < E$  → averso.
    - Si está dispuesto a vender a un precio más alto  $E^* > E$  → amante.

## Análisis individual de una inversión

- **Coeficiente de variación**  $CV_i = \sigma(VPN_i) / E(VPN_i)$
- Indica una medida de las unidades de riesgo tomadas por cada unidad de VAN.

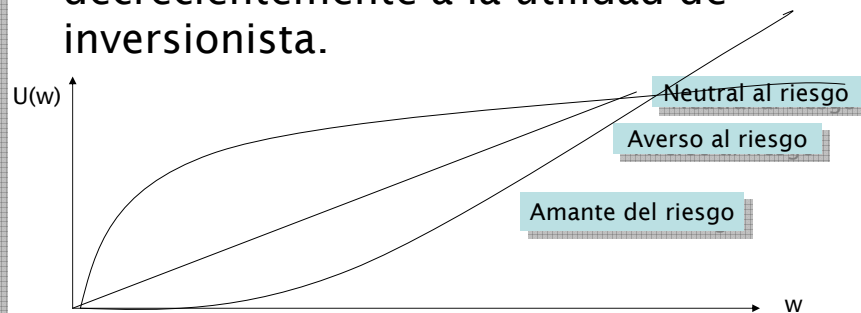


## Análisis individual de una inversión

- **Ajuste en tasa de descuento:** Supone que los flujos más riesgosos se deben descontar a una tasa más alta.
- $R_{\text{riesgo}} = r_{\text{sin riesgo}} + \text{premio por riesgo}$
- Problemas:
  - El premio se fija arbitrariamente
  - No considera distribuciones
  - El riesgo aumenta a medida que pasa el tiempo, lo que no es necesariamente verdadero.

## Análisis individual de una inversión

- **Utilidad esperada:** Supone que el aumento de VAN aporta decrecientemente a la utilidad de inversionista.

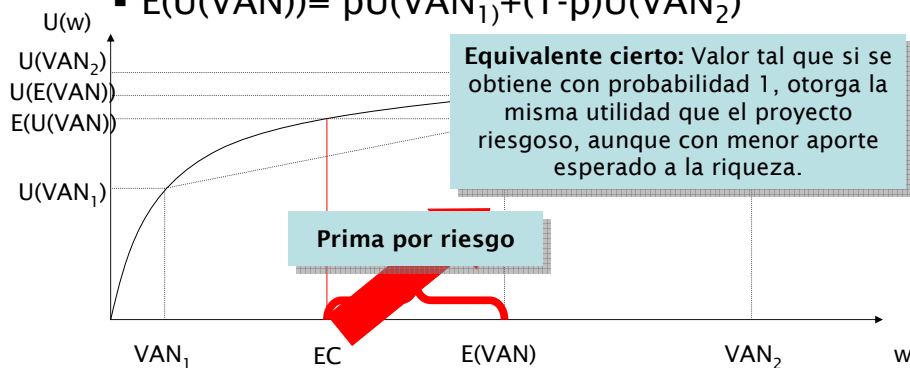


## Análisis individual de una inversión

- Sean 2 alternativas:
  - $VAN_1$  con probabilidad  $p$  e  $VAN_2$  con probabilidad  $1-p$
  - $VAN_0$  con probabilidad 1.
- La función de utilidad del inversionista es concava ( $dU/dVAN > 0$ ,  $d^2U/dVAN^2 < 0$ ) → utilidad crece decrecientemente c/r a la riqueza.

## Análisis individual de una inversión

- En el proyecto riesgoso:
  - $E(VAN) = pVAN_1 + (1-p)VAN_2$  y además
  - $E(U(VAN)) = pU(VAN_1) + (1-p)U(VAN_2)$



## Análisis individual de una inversión

- Juan tiene aversión al riesgo, lo que se refleja en su función de utilidad  $U(w) = w^{1/4}$ . Su riqueza total consiste en un solo proyecto, el proyecto alfa que puede entregar
  - 6,25 millones, con prob. 0,4
  - 2,56 millones, con prob. 0,6
- Riqueza esperada?
  - $E(w) = 0,4 \cdot 6,25 + 0,6 \cdot 2,56 = 4,036$  mill
- Esperanza de la utilidad?
  - $E(U(w)) = 0,4 \cdot U(6,25 \text{ mill}) + 0,6 \cdot U(2,56 \text{ mill}) = 44$

## Análisis individual de una inversión

### ▪ Equivalente cierto?

- Actualmente Juan tiene una utilidad de 44 ( $E(U(w))$ ) y estaría indiferente entre el proyecto alfa y cualquier otro proyecto que le reporte el mismo nivel de utilidad.
- Supongamos que alguien ofrece pagarle un monto  $w^*$ , que se paga con probabilidad 1, para que Juan esté indiferente entonces
- $U(w^*)=44 \rightarrow w^{*1/4}=44 \rightarrow w=44^4=3,75 \text{ mill}$

## Análisis individual de una inversión

### ▪ Conclusiones?

- Para un inversionista averso al riesgo,  $w^*$  (equivalente cierto) es menor que  $E(w)$ , lo que implica que estaría dispuesto a arriesgar riqueza con tal de asegurarse un pago cierto.
- → Explicación fundamental de la existencia de la industria de las aseguradoras
- ¿Porqué? Las compañías de seguro aseguran a n personas, que se puede asumir muy grande, lo que, de acuerdo a la ley de los grandes números implican que los valores esperados se dan, generalmente, en forma expost, o sea pueden predecir bastante bien los pagos por eventos (choques, accidentes...) y así eliminan la incertidumbre.

## Análisis individual de una inversión

- Suponga que un amigo acaba de comprarse un automóvil nuevo que espera poder vender dentro de un año en \$5.000.000. Aunque tu amigo se considera un buen conductor, estima que a causa de la congestión y la mala señalización vial, existe un 19% de probabilidad que tenga un accidente pequeño que haría bajar el precio de reventa del auto a \$4.300.000, y que existe un 0,1% de probabilidad de tener un accidente importante que inutilice el auto y tenga que venderlo como chatarra en \$500.000. Si su función de utilidad es  $U = 2 \cdot \ln(Y)$
- donde Y (en miles de pesos) representa el precio de reventa del automóvil.

## Análisis individual de una inversión

- a. ¿Qué puede decir del grado de aversión al riesgo de su amigo?
- b. ¿Cuál es el retorno equivalente cierto para el precio de reventa de su amigo?
- c. ¿Cuánto es lo máximo que le recomendarías pagar por un seguro a todo evento?, tal que en caso de siniestro le retiene el auto y le reembolsa los \$5.000.000 que ganaría sin que hiciera ocurrido el accidente.

## Análisis individual de una inversión

- a) (en miles)  
 $E(U(VAN)) = 0,8 \cdot U(5000) + 0,19 \cdot U(4300) + 0,01 \cdot U(500)$   
 $= 16,93$
- $U(E(VAN)) = U(5000 \cdot 0,8 + 4300 \cdot 0,19 + 500 \cdot 0,01) = U(4822) = 16,96$
- Como  $U(E) > E(U) \rightarrow$  averso al riesgo.
- B)  $16,93 = 2 \cdot \ln(EC) \rightarrow EC = 4748$
- C) La máxima prima por seguro que esta dispuesto a pagar un individuo averso al riesgo es la diferencia entre el valor que le ofrece el seguro menos el valor que obtendría con el proyecto sin riesgo equivalente al actual valor esperado, es decir, la diferencia entre el valor que le ofrece el seguro y su EC  $\rightarrow 5000 - 4748 = 251$

## Análisis individual de una inversión

- Ajuste del flujo de caja:

$$VPN = EC(F_0) + \sum \frac{EC(F_t)}{(1 + R_{librederiesgo})^t}$$

## Simulación

- Limitaciones del modelo probabilístico
  - Entendimiento de probabilidades
  - Difícil formulación matemática
    - Modelación de las relaciones entre flujos
    - Modelación de la relaciones entre variables
    - Imposibilidad de llegar a una solución analítica
- Solución : Simulación Computacional

## Simulación

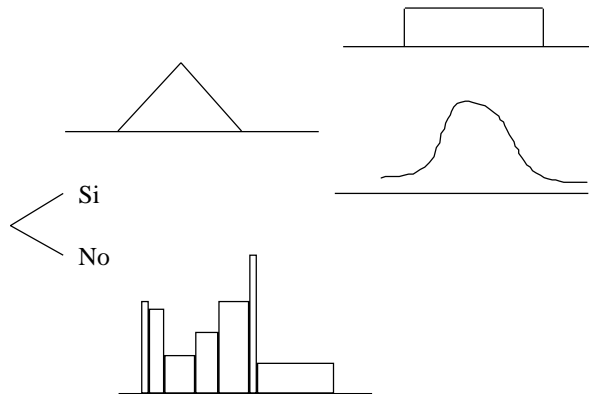
- La simulación permite la evaluación de un gran número de escenarios generados aleatoriamente, de acuerdo a las distribuciones de probabilidades de las variables riesgosas y de las relaciones de interdependencia entre ellas.
- Se obtiene distribuciones de probabilidad de los criterios de evaluación seleccionados.



## Simulación

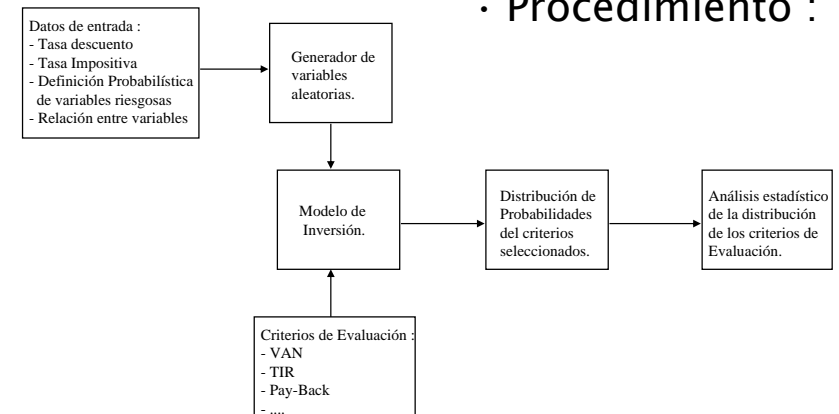
### • Distribuciones de Probabilidad más usadas :

- Uniforme
- Triangular
- Normal
- Binomial
- "ad hoc"



## Simulación

### • Procedimiento :

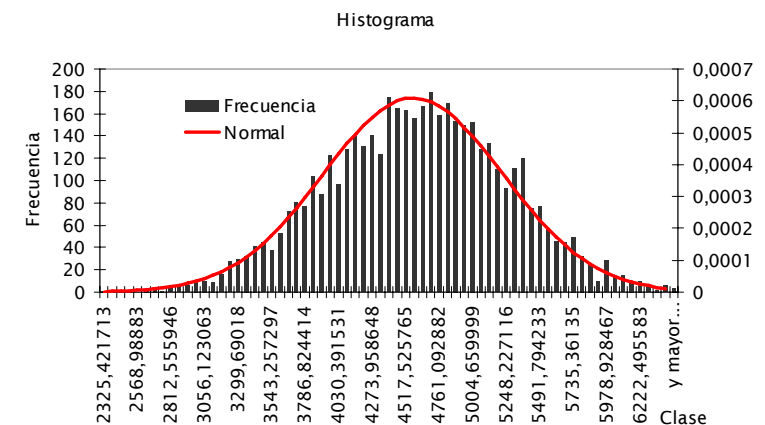


## Simulación

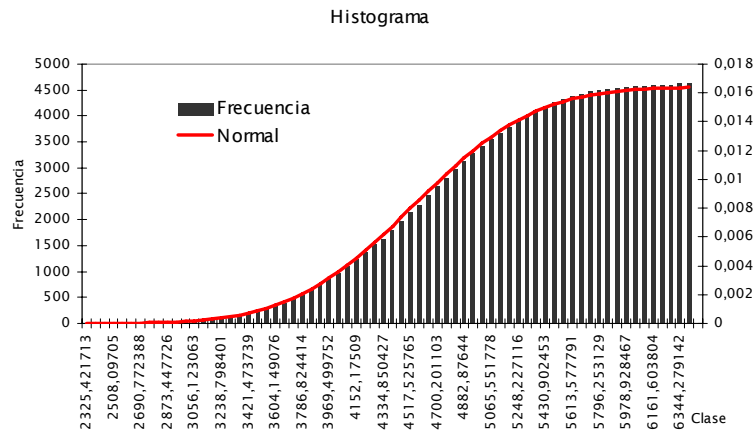
### • Simulación de Montecarlo

- Variable aleatoria: Cantidad de clientes. Se distribuye como una uniforme entre 500 y 800.
- Determinísticos (horizonte = 6 años,  $r=10\%$ )
  - Inversión = -2000, se deprecia a 6 años,  $VR=0$
  - Precio de venta = 15 \$/unidad
  - Costos variables = 10 \$/unidad
  - Costos fijos = 1500 al año
  - Impuestos = 17%
- Flujo de caja =  $(Q \cdot (15 - 10) - 1500 - 2000/6) \cdot 0,83 + 2000/6$

## Simulación



## Simulación



## Simulación

- Intervalo de confianza del VAN:

$$E(VPN) \pm \frac{S_{n-1} t_{\alpha/2, n-1}}{\sqrt{n}}$$

- 1-a nivel de confianza
- n-1 grados de libertad (t-student)
- $S_{n-1}$  desviación estándar de la media

## Riesgo y retorno de un portafolio

### Teoría de Carteras (Markowitz)

- Cartera o portafolio: Combinación de activos
- Sean X e Y dos activos riesgosos.
- Invertimos a en X y b en Y ( $a+b=1$ )
- $E(R_p) = aE(X) + bE(Y)$
- $Var(R_p) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab Cov(X, Y)$
- $Cov(X, y) \rightarrow$  Medida de la forma en que dos va se mueven una c/r a la otra  $\rightarrow$  Mide la contribución al riesgo del portafolio.

## Riesgo y retorno de un portafolio

- Ejemplo:

| Prob | Retorno X | Retorno Y |
|------|-----------|-----------|
| 0.2  | 11%       | -3%       |
| 0.2  | 9%        | 15%       |
| 0.2  | 25%       | 2%        |
| 0.2  | 7%        | 20%       |
| 0.2  | -2%       | 6%        |

- $E(X) = 0,2 * (11 + 9 + 25 + 7 - 2) = 10\%$
- $E(Y) = 0,2 * (-3 + 15 + 2 + 20 + 6) = 8\%$
- $Var(X) = 0,2 * (11\% - 10\%)^2 + 0,2 * (9\% - 10\%)^2 + 0,2 * (25\% - 10\%)^2 + 0,2 * (7\% - 10\%)^2 + 0,2 * (-2\% - 10\%)^2 = 0,0076$
- $Var(Y) = 0,00748$

## Riesgo y retorno de un portafolio

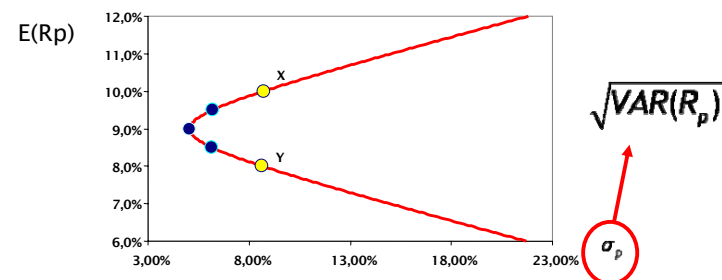
### Ejemplo:

| Prob | Retorno X | Retorno Y |
|------|-----------|-----------|
| 0.2  | 11%       | -3%       |
| 0.2  | 9%        | 15%       |
| 0.2  | 25%       | 2%        |
| 0.2  | 7%        | 20%       |
| 0.2  | -2%       | 6%        |

- $Cov(X,Y)=0,2*((0,11-0,1)*(-0,03-0,08)+(0,09-0,1)*(0,15-0,08)+(0,25-0,1)*(0,02-0,08)+(-0,02-0,1)*(0,06-0,08))=-0,0024$
- → Los retornos de X e Y se mueven en direcciones opuestas
- → Si invertimos en los dos activos a la vez, tenemos un portafolio menos riesgoso que mantener cada activo por separado.

## Riesgo y retorno de un portafolio

- Suponemos que invertimos un 50% en cada activo:
- $E(R_p)=9\%$  y  $Var(R_p)=0,0257 \rightarrow \sigma_p = 5,07\%$  (comprobar!)



## ¿En que influye la correlación?

|                | X     | Y     |
|----------------|-------|-------|
| Esperanza      | 10,0% | 8,0%  |
| Desv. Estándar | 2,24% | 1,00% |

.... Influye en la forma de la curva!

## Riesgo y retorno de un portafolio

- Curva construida en forma paramétrica:  

$$E(R_p) = wR_X + (1-w)R_Y$$

$$\sigma_p = w^2\sigma_x^2 + (1-w)^2\sigma_y^2 + 2w(1-w)\sigma_x\sigma_y\rho$$

## ¿Más de dos activos?

$$\text{sea } \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}; \vec{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

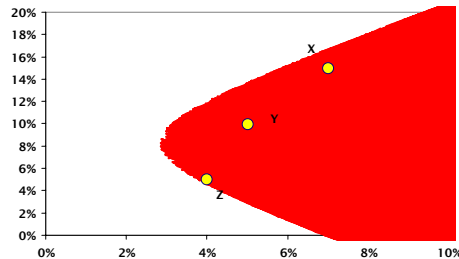
$$\text{con } \vec{w}^T \cdot \vec{1} = 1 \Rightarrow \sum_1^N w_i = 1$$

La cartera tiene retorno

$$\vec{w}^T \cdot \vec{r} = r = \sum_1^N w_i r_i$$

y varianza

$$\vec{w}^T \cdot S \cdot \vec{w} = \sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}$$



## ¿Qué pasa si $N \rightarrow \infty$ ?

- Covarianza:
  - Los retornos de X e Y se mueven en direcciones distintas
  - Si invertimos en los dos activos a la vez, tenemos un portafolio menos riesgoso que mantener cada activo por separado.
- Aumentar el número
- Entonces si diversificamos absolutamente (n infinito), eliminamos todo el riesgo → **FALSO**

## ¿Qué pasa si $N \rightarrow \infty$ ?

- Cartera de N instrumentos. Invertimos  $w_i = 1/N$  en cada instrumento

$$\text{Var}(R_p) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \frac{1}{N} \sigma_{ij} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}$$

- Separamos sumatoria entre “varianzas y covarianzas”

$$\text{Var}(R_p) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_{ii} + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \sigma_{ij}$$

## ¿Qué pasa si $N \rightarrow \infty$ ?

- Se define

$$\bar{\sigma}_{ii} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{ii} \quad \cdot \text{ Varianza Promedio}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \sigma_{ij} \quad \cdot \text{ Covarianza Promedio}$$

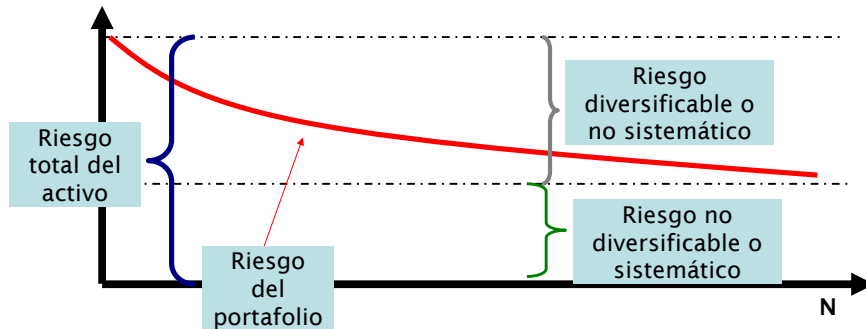
- Entonces

$$\text{Var}(R_p) = \frac{1}{N} \bar{\sigma}_{ii} + \frac{N(N-1)}{N^2} \bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{N} \bar{\sigma}_{ii} + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \bar{\sigma}_{ij}$$

- A medida que aumenta N, toma importancia la covarianza!!!

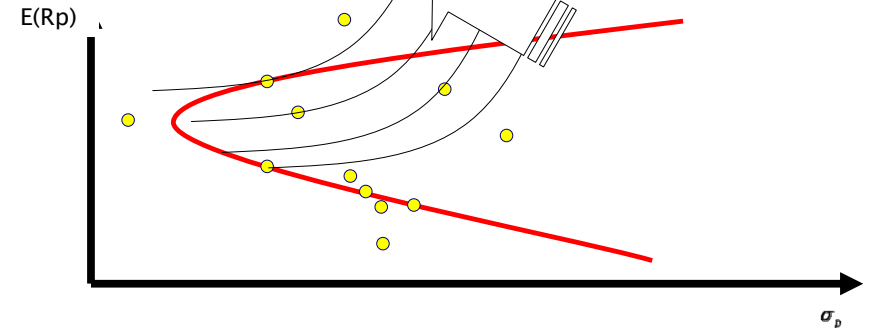
## ¿Qué pasa si $N \rightarrow \infty$ ?

- Claramente no se puede alcanzar riesgo cero por diversificación ¿Qué pasa si  $N \rightarrow \infty$ ?



## Frontera eficiente

- Volviendo a una cartera de  $N$  activos



## ¿Cómo lograr el mínimo riesgo?

- Simplemente hay que hacer que:

$$\min_w \sigma_p = \min_w \frac{1}{2} \sigma_p^2 = \min_w \frac{1}{2} \vec{w}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{w}$$

sa

$$\vec{w}^T \cdot \vec{1} = 1$$

$$\vec{w}^T \cdot \vec{r} = r$$

## ¿Cómo lograr el mínimo riesgo?

- Para dos activos: A y B

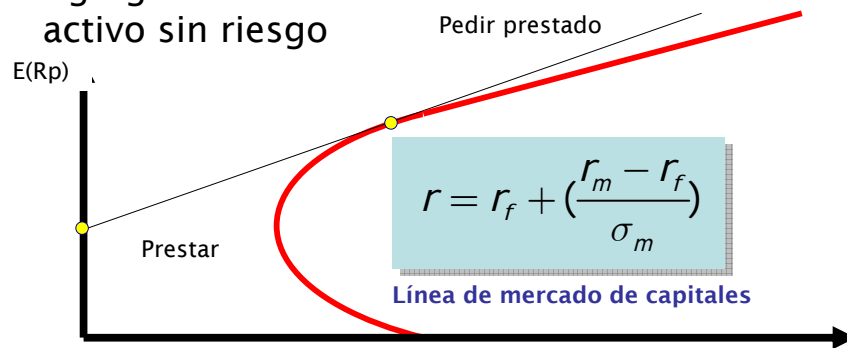
$$\sigma_p^2 = w^2 \sigma_A^2 + (1-w)^2 \sigma_B^2 + 2w(1-w) \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial w} = 0 \Rightarrow w \sigma_A - (1-w) \sigma_B^2 + \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} (1-2w) = 0$$

$$w^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B}$$

## ¿Qué pasa si agregamos $R_f$ ?

- Agregamos un activo sin riesgo



## Avanzando al equilibrio

- Si todos los inversionistas eligen portafolios eficientes y existe información perfecta, entonces todos que querrán tener el mismo activo riesgoso  $M$ .  $\rightarrow M = \text{Mercado}$ .
- Supongamos que  $M$  es eficiente para un inversionista que puede prestar y pedir prestado a la tasa libre de riesgo  $R_f$ .
- Si es eficiente, no existe otra combinación del portafolio, con otro instrumento  $i$ , que tenga un mayor ratio de retornos por sobre  $R_f$ , por unidad de riesgo:  $\frac{R_m - R_f}{\sigma_m}$

## Avanzando al equilibrio

- Sea un portafolio  $Q$ , compuesto por  $w\%$  en el activo  $i$  y por  $(1-w)\%$  en el portafolio  $M$ .

$$E(RQ) = wR_i + (1-w)R_m$$

$$\sigma_m^2 = w^2\sigma_i^2 + (1-w)^2\sigma_m^2 + 2w(1-w)\sigma_{im}$$

- En el equilibrio, al evaluarla en  $M$ , la pendiente de la curva del portafolio debe ser igual a la pendiente de la línea del mercado de capitales en ese punto.

## Avanzando al equilibrio

$$\frac{\partial R_Q}{\partial \sigma_Q} = \frac{\partial R_Q / \partial w}{\partial \sigma_Q / \partial w}$$

$$\frac{\partial R_Q}{\partial w} = R_i - R_m$$

$$\frac{\partial \sigma_Q}{\partial w} = \frac{w(\sigma_i^2 + \sigma_m^2 - 2\sigma_{im}) - \sigma_m^2 + \sigma_{im}}{\sigma_Q}$$

- Evaluando en  $M$  ( $w$  representa exceso de demanda):

$$\frac{\partial \sigma_Q}{\partial w} = \frac{-\sigma_m^2 + \sigma_{im}}{\sigma_m}$$

$$\frac{\partial R_Q}{\partial \sigma_Q} = \frac{\partial R_Q / \partial w}{\partial \sigma_Q / \partial w} = \frac{\sigma_m(R_i - R_m)}{\sigma_{im} - \sigma_m^2}$$

## Avanzando al equilibrio

- En el equilibrio, igualamos pendientes
- Despejamos  $E(R_i)$

$$\frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m} = \frac{E(R_i) - E(R_m)}{(\sigma_{im} - \sigma_m^2) / \sigma_m}$$

$$E(R_i) = R_f + (E(R_m) - R_f) \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

- Definimos  $\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$

$$E(R_i) = R_f + \beta_i (E(R_m) - R_f)$$

Capital Asset  
Pricing Model -  
CAPM

## Modelo CAPM

- Desarrollado a mediados de los 1960's simultáneamente por William Sharpe, Jhon Litner y Jan Mossin, a partir de la teoría de Markowitz.
- Supone que, en equilibrio, el precio de los activos financieros se ajustará de manera tal que el inversionista, si aplica la Teoría de Carteras, para obtener los beneficios de la diversificación, será capaz de ubicarse en cualquier punto a lo largo de la LMC.
- El modelo mide retornos esperados de capital (acciones)  $\rightarrow R_e$  (equity = patrimonio).

## Supuestos de CAPM

- Por construcción, el modelo asume que:
  1. Los inversionistas son aversos al riesgo.
  2. Los inversionistas cuidan exclusivamente el balance entre su  $E(R)$  y la varianza asociada para conformar sus carteras.
  3. No existen fricciones en el mercado: No existen costos de transacción, impuestos personales, todos los activos son comprables, se permiten ventas en corto ilimitadamente.
  4. Existe una tasa libre de riesgo a la cual los inversionistas pueden endeudarse o prestar sus fondos.
  5. No existe asimetría de información y los inversionistas son racionales (todos los inversionistas tienen las mismas conclusiones acerca de los retornos esperados y las desviaciones estándar de todas las carteras factibles).

## Propiedades del Beta

- Beta de una cartera

$$\beta_p = \sum_{i=1}^n \beta_i$$

- Riesgo

$$R_i = R_f + \beta_i (R_m - R_f) + \varepsilon_i$$

$$\text{Var}(R_i) = \text{Var}(R_f) + \text{Var}(\beta_i R_m) - \text{Var}(\beta_i R_f) + \text{Var}(\varepsilon_i)$$

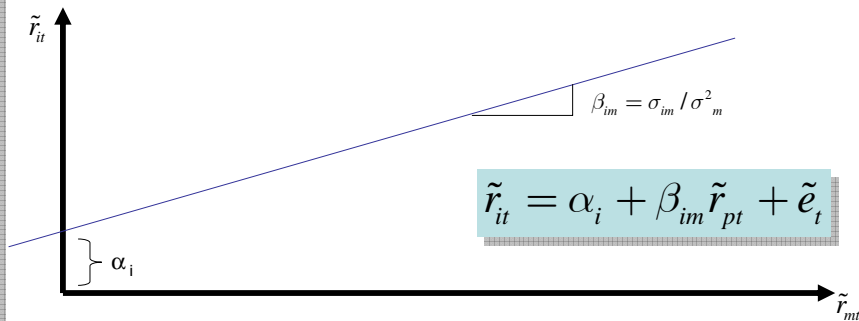
$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \text{Var}(\varepsilon_i)$$

Riesgo  
sistemático

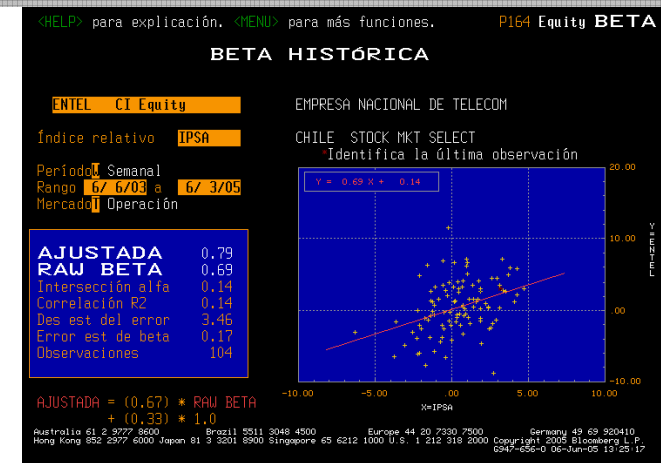
Riesgo no  
sistemático

## Estimación del beta

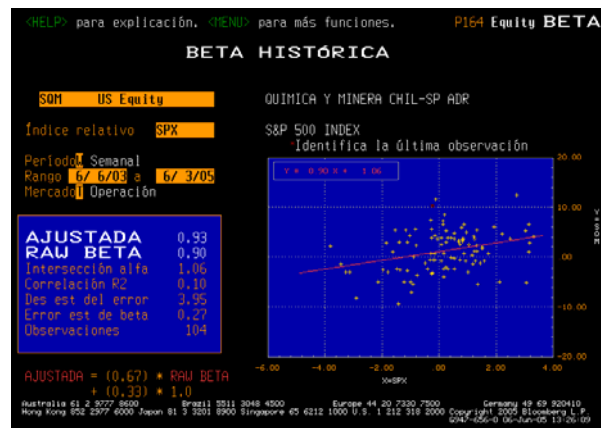
- Generalmente se estima a partir de datos históricos.



## Estimación del beta



## Estimación del beta



## Estimación del beta





## Extensiones del CAPM

- El portafolio de mercado debiera estar constituido por el conjunto de activos que mantienen los inversionistas de un grupo específico. Típicamente se considera los de un mismo país.
- Cuando usamos el índice del país para estimar betas, implícitamente estamos diciendo que el conjunto de activos que mantienen los inversionistas es igual al portafolio de activos emitidos por las empresas de ese país.
- Adicionalmente, estamos diciendo que el conjunto de activos emitidos por empresas locales son solamente mantenidos por inversionistas locales.
- Si estas dos condiciones no se cumplen, no debiéramos usar un índice local para estimar el beta.

## CAPM Internacional

- En el caso de CAPM internacional hay que incluir el riesgo cambiario.  
Ejemplo: Inversionista chileno compra 1 acción de MSFT:

|           | Precio acción<br>US\$ | Tipo de cambio<br>Ch\$/US\$ | Precio acción<br>Ch\$ |
|-----------|-----------------------|-----------------------------|-----------------------|
| 9-May-05  | 25.11                 | 572.00                      | 14,363                |
| 27-May-05 | 26.07                 | 579.75                      | 15,114                |
| Retorno   | 3.8%                  | 1.4%                        | 5.2%                  |

## CAPM Internacional

- Para capturar el efecto de riesgo cambiario, debemos capturar el premio que espera recibir un inversionista por tomar ese riesgo.
- En un modelo de 2 países (Chile – EEUU), podemos usar como premio por riesgo cambiario la diferencia entre los bonos del tesoro de EEUU y los bonos libres de riesgo de Chile.
- Reformulando CAPM:

$$E(R_i - R_f) = \frac{\sigma_{iw}^2}{\sigma_w^2} E(R_w - R_f) + \frac{\sigma_{is}^2}{\sigma_s^2} E(s_{\text{dolar/peso}} + R_{\text{fusa}} - R_f)$$

## Validez del CAPM

- Evidencia empírica mixta
  - Los retornos promedios de largo plazo están significativamente relacionados con el beta. Sin embargo CAPM “no parece” funcionar en los pasados 30 años.
  - Fama y French sugieren que CAPM está muerto porque desde los 60s se ha observado que:
    - Acciones de empresas pequeñas han tenido un retorno significativamente mejor que lo que predice CAPM.
    - Acciones con bajas razones P/VL han tenido rentabilidades significativamente mejor que lo que predice CAPM.

## Otros modelos

- Arbitrage Pricing Theory (APT)
  - Plantea la existencia de una serie de factores  $f_i$ .
  - Factores típicos:
    - Spread  $R_f$  de largo y corto.
    - Riesgo tasa interés
    - Riesgo actividad económica
    - Riesgo tipo de cambio
    - Riesgo inflación

## Efecto del endeudamiento

- Recordando a Modigliani-Miller II:
 
$$R_e = R_a^{\text{sin deuda}} + \frac{D}{E}(1-T)(R_a^{\text{sin deuda}} - R_d)$$
- Si  $r_u = r_a^{\text{sin deuda}} > R_d$ ,  $R_e$  aumenta con el nivel de endeudamiento. Eso quiere decir que el beta del patrimonio debiera crecer:

$$\beta_L = (1 + \frac{D}{E}(1-T))\beta_U$$

## Método de los comparables

- A partir de la relación anterior podemos estimar el beta de una empresa a partir de “comparables”, es decir empresas similares que tienen similar riesgo específico.
- Ejemplo:
  - Ud. Quiere calcular el costo de capital de una empresa de telefonía fija X que va a tener un endeudamiento de 0,8 veces D/E. Usted sabe que el beta de la acción de CTC es de 1,1 y que la relación deuda/patrimonio de CTC es de 0,53 veces. La tasa de impuestos corporativos es de 17% para CTC y de 25% para la empresa que está analizando.

## Método de los comparables

$$\begin{aligned}\beta_L^{CTC} &= (1 + \frac{D}{E}(1-T))\beta_U \\ 1,1 &= (1 + 0,53 * (1 - 17\%))\beta_U^{CTC} \\ \beta_U^{CTC} &= 0,764\end{aligned}$$

- Entonces se impone que los betas sin deuda (desapalancados son iguales)

$$\begin{aligned}\beta_L^{CTC} &= (1 + \frac{D}{E}(1-T))\beta_U \\ 1,1 &= (1 + 0,53 * (1 - 17\%))\beta_U^{CTC} \\ \beta_U^{CTC} &= 0,764 = \beta_U^X \\ \beta_L^X &= (1 + 0,8 * (1 - 25\%))0,764 \\ \beta_L^X &= 1,22\end{aligned}$$

## Costo de capital promedio ponderado

- El costo promedio del capital puede ser estimado como un promedio ponderado de los costos de las diferentes fuentes de financiamiento

$$R_a = WACC = \frac{D}{V}(1-T)R_d + \frac{E}{V}R_e$$

- El WACC es una estimación del costo de oportunidad de los activos de la empresa.
- Al minimizar el WACC aumenta el valor de la empresa. → estructura óptima de capital.