

IN42A-3

Francisco J. Errandonea
ferrando@santanderinvestment.cl

Marzo 2006

Matemáticas Financieras

Bibliografía

- Fundamentos de Financiación Empresarial, Quinta Edición, *Brealey* y *Myers*. Capítulos 2 y 3.

Desafío #1

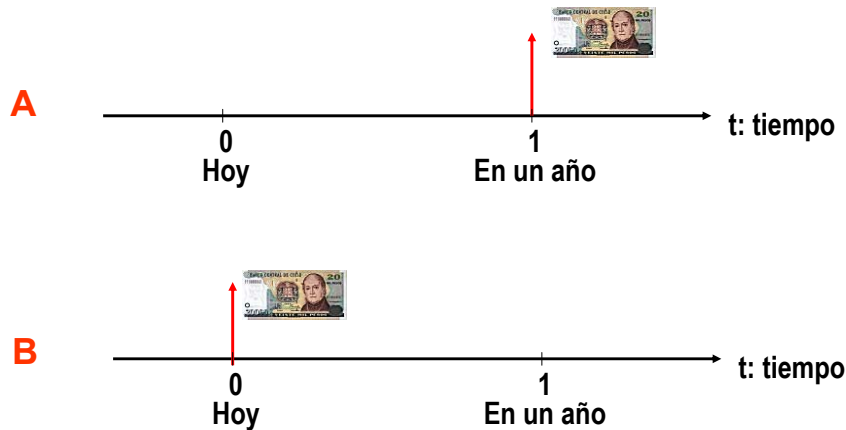


OPCIÓN A



OPCIÓN B

Desafío #2



Valor del dinero en el tiempo

- Ante dos capitales de igual monto en distintos momentos, se preferirá aquél que sea más cercano
- Ante dos capitales en el mismo momento pero de distinto monto, se preferirá aquel de monto más elevado

Desafío #3

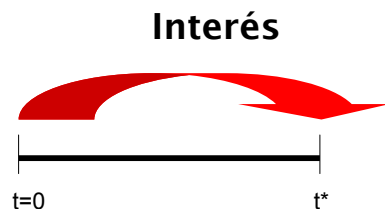
- ¿Qué suma de dinero uno estaría dispuesto a recibir dentro de 1 año, en lugar de \$20.000 hoy?

Desafío #3

- ¿Qué suma de dinero uno estaría dispuesto a recibir dentro de 1 año, en lugar de \$20.000 hoy?
Los individuos obtienen satisfacción al consumir y se puede cambiar consumo actual por consumo futuro, siempre que la utilidad o satisfacción de este último sea al menos equivalente a la del consumo actual

Valor del dinero en el tiempo

- **Axioma principal: Un peso hoy \neq Un peso mañana**



Una persona que tiene \$10.000 hoy, estará dispuesta a invertir esa cantidad (y dejar de consumir hoy) siempre que al cabo de un período reciba los \$10.000 más un premio que compense su sacrificio (tasa de rentabilidad).

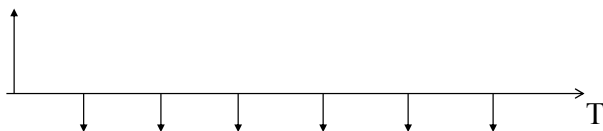
Tasa de interés

- Precio del dinero en el tiempo. Es función de capital, tiempo, riesgo, moneda, inflación,....,etc.
- “En economía, el interés se liga a los conceptos de capital, tiempo y riesgo; por lo tanto, puede ser considerado como la compensación que el poseedor del dinero recibe, .. por la cesión a otros, (y) por la utilización (por ese tercero) durante un período de tiempo ... (de) un capital determinado, empleo que en sí mismo, es siempre arriesgado” (1)

(1) Fuente: Ignacio Vélez Pareja

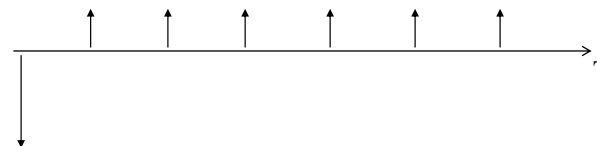
Perfil de un crédito

- Un crédito significa obtener un flujo de dinero hoy, que será pagado en cuotas en el futuro → Tasa de interés, Plazo, cuotas, moneda ...

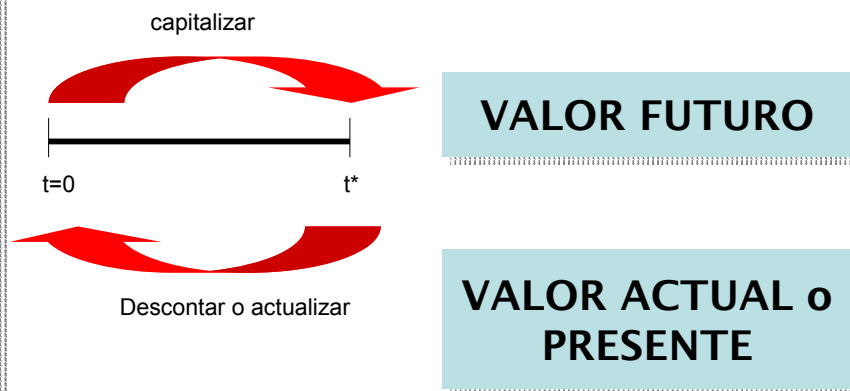


Perfil de una inversión

- Inversión es desembolsar hoy una suma de dinero, esperando retornos futuros. → Tasa de descuento, duración del proyecto, flujos...



Valor del dinero en el tiempo



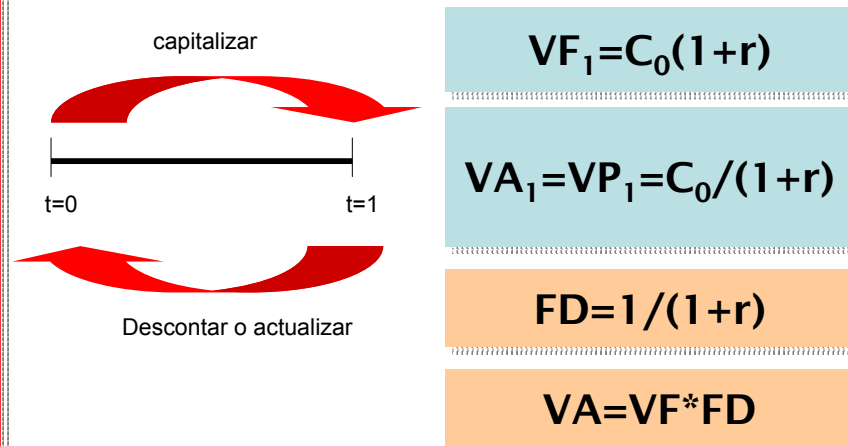
Valor futuro

- Es el valor alcanzado por un capital o principal al final del período analizado.
- **Interés:** Es el rendimiento o costo de un capital colocado o prestado a un tiempo determinado.
- Si definimos:
 - r = tasa de interés
 - P = Monto invertido
- Invierto C_0 hoy
- Al cabo de un año obtengo:
- $C_1 = C_0 + r * C_0$

Valor actual o presente

- Es el valor alcanzado por un capital al inicio del período analizado
- Supongamos que recibirá una cantidad C_1 al cabo de un año y r es la rentabilidad del mercado. ¿Qué cantidad C_0 HOY sería equivalente a C_1 ?

Valor del dinero en el tiempo



Tipos de tasas de interés

- **Interés simple:** Es el interés que se paga (o gana) sólo sobre la cantidad original que se invierte. De otra forma es aquel que no considera reinversión de los intereses ganados en períodos intermedios.
- **Interés compuesto:** Significa que el interés ganado sobre el capital invertido se añade al principal. Se gana interés sobre el interés. De otra forma se asume reinversión de los intereses en periodos intermedios.

Interés simple

- Supongamos que $Co = \$100$ y $r = 10\%$
- $C1 = Co + r * Co = 110$
- $C2 = C1 + r * Co$ Observemos que sólo calculamos intereses sobre el principal.
- $C2 = Po + r * Co + r * Co = Co + 2 * r * Co = 120$
- Para n períodos:
- $Cn = Po + n * r * Co ==> Cn = Co * (1 + n * r)$

$$Cn = Co * (1 + n * r)$$

Interés compuesto

- Supongamos que $Co = \$100$ y $r = 10\%$
- $C1 = Co + r * Co = Co (1+r) = 110$
- $C2 = C1 + r * C1$ Intereses sobre capital más intereses.
- $C2 = Co (1+r) + r*(Co (1+r)) = 121$
- $C2 = Co (1+r) (1+r) = Co (1+r)^2$
- Para n períodos:
- $Cn = Cn-1 + r * Cn-1$

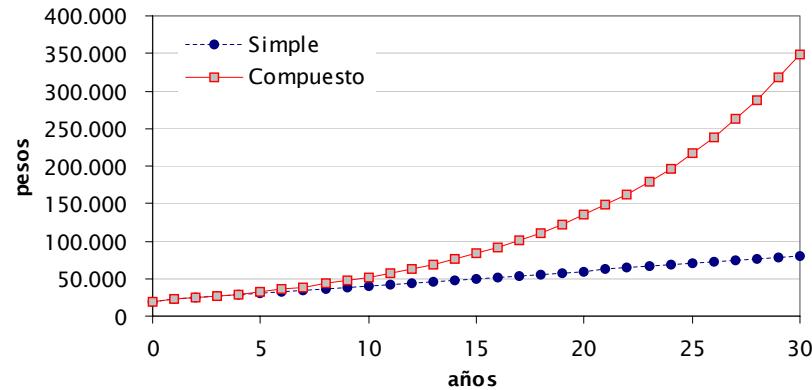
$$Cn = Co * (1 + r)^n$$

Ejemplo

- Elija cual opción es mejor para invertir los \$20.000 que se encontró en la calle:
 - A: Invertirlos al 7% anual compuesto a 2 años
 - B: Invertirlos al 6,8% anual simple a 2 años
 - A: 22.800
 - B: 22.812

Compuesto vs Simple

Dos depósitos al 10% anual, uno con tasa compuesta anual, otra simple.



Convenciones de composición

- Evitar confusión: Concepto de riqueza final

$$W = \left(1 + \frac{r}{f}\right)^{t*f}$$

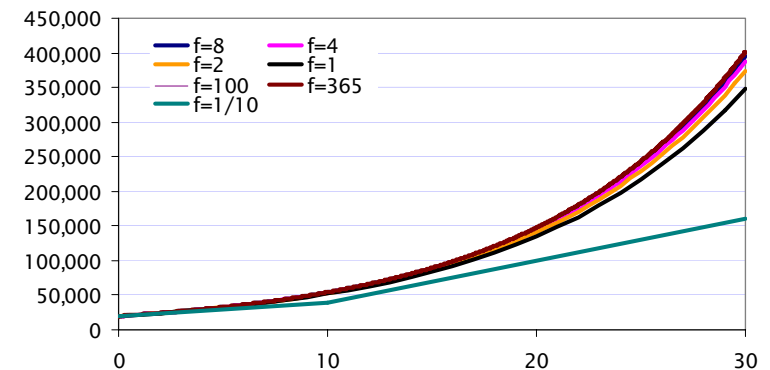
- Donde **t** es el tiempo expresado en años:
 - Si $f=2 \rightarrow$ Composición semestral.
 - Si $f=1 \rightarrow$ Composición anual
 - Si $f=12 \rightarrow$ Composición mensual

Composición de intereses

- ¿A cuanto equivale en composición anual una tasa de interés semestral de 5% anual?:
- $W = (1 + 5\%/2)^2 = 1,050625$
- $\rightarrow (1 + r/1)^1 = 1,050625 \rightarrow r$ en composición anual es 5,0625%

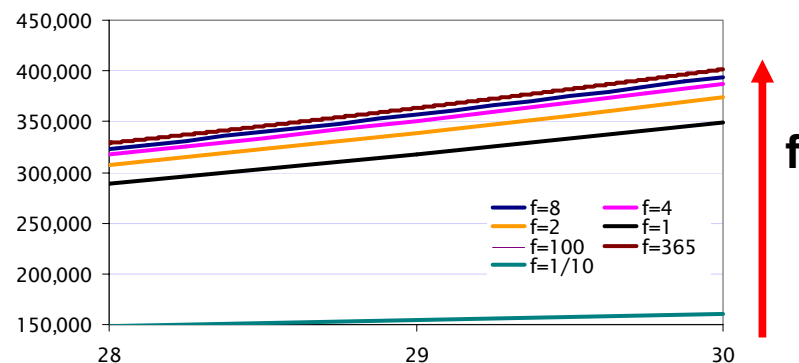
Composición de intereses

Depósito al 10% anual, diferentes composiciones.



Composición de intereses

Depósito al 10% anual, diferentes composiciones.



¿Si $f \rightarrow$ infinito?

Sea $A = \left(1 + \frac{1}{f/r}\right)^{f/r}$, y como si $f \rightarrow \infty \Rightarrow f/r \rightarrow \infty$

Entonces, $\lim_{f/r \rightarrow \infty} A = e$

Por lo tanto $W = A^{rt} \Rightarrow W = e^{rt}$
Composición continua

La inflación



Inflación año a año, 1983-2006E. Fuente: Banco Central y Santander Investment.

La inflación

- Aumento sostenido y generalizado en el nivel de precios.
- La inflación se mide a través de índices IPC en Chile que mide la evolución de los precios de una canasta promedio de bienes y servicios.
- Por lo tanto la variación del IPC no significa que todos los bienes y servicios de esta canasta varíe en el mismo porcentaje.
- Por otro lado el IPC no es el precio de la canasta.

Inflación y poder adquisitivo

- Si existe inflación los pesos de hoy no comprarán las mismas cosas que en un año más.
- $\$ 1000 / P_0 = \text{Cantidad física} = X_0$
- $\$ 1000 / P_1 = \text{Cantidad física} = X_1$
 - » $X_0 > X_1$
- Esos \$ 1000 nominalmente son iguales, en términos reales no lo son. No tienen el mismo poder adquisitivo

Tasa de interés real

- Una tasa de interés real es aquella que denota un aumento del poder adquisitivo. Esto es, conservando el poder adquisitivo del dinero, existe un incremento en el monto a pagar (o cobrar).
- El ejemplo clásico es el de las tasas en UF + X% o tasas reflejadas como IPC + X%.
- Esto significa que al cabo de una año el dinero debiera tener el mismo poder adquisitivo que el dinero que invertí.

Tasa de interés nominal

- Una tasa de interés nominal es aquella que denota un crecimiento en el monto de dinero, sin ajustar la moneda por inflación. Así la tasa de interés nominal no necesariamente significa un incremento en el poder adquisitivo
- El ejemplo típico son los depósitos en pesos a 30 días de los bancos o los créditos en pesos.
- Si hacemos un depósito por \$ 1000 al 15% de interés anual en un año debiera recibir \$ 1.150
¿Significa esto que seré \$150 más rico al cabo de un año?

Igualdad de Fisher

- En equilibrio el banco debiera ser indiferente entre prestar a tasas reales o nominales, siempre y cuando las tasas nominales incluyan las expectativas de inflación.
- Así surge la “Igualdad de Fisher”:
 - $(1 + i) = (1 + r) * (1 + \pi)$
 - donde: i = tasa de interés nominal
 - r = tasa de interés real
 - π = inflación esperada

Igualdad de Fisher

- Ejemplo: En que banco me conviene depositar 500 U.M. ¿en el que ofrece 20% de interés anual o el que ofrece UF + 5% anual?.
- Si ambas rindieran lo mismo:
 - $500 (1+i) = 500 (1+i)(1+\pi)$
 - $(1+\pi) = (1+i) / (1+r) = 1,02 / 1,05 = 14,3\%$
- Luego, si la inflación esperada es mayor que 14,3% anual, conviene la alternativa de UF más 5% anual

Igualdad de Fisher

- Relación de paridad entre tasas para economías abiertas:
- $(1+r) = (1+ \text{Libor} + s)(1+e) / (1+\pi)$
- Donde
 - π y r ya definidos
 - Libor: Tasa de interés interbancaria de Londres
 - s : Spread (depende del riesgo país)
 - e : variación esperada del tipo de cambio

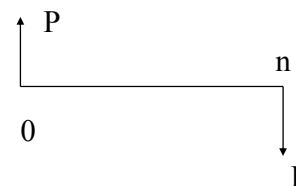
Importante!

- **Flujos y nominales deben estar alineados en tasa y moneda:**
- Flujos en UF \leftrightarrow Tasas en UF
- Flujos en \$ \leftrightarrow Tasas en \$
- Flujos en US\$ \leftrightarrow Tasas en US\$

Valor Presente

- Descuento de flujos

$$VP = F / (1+r)^n$$



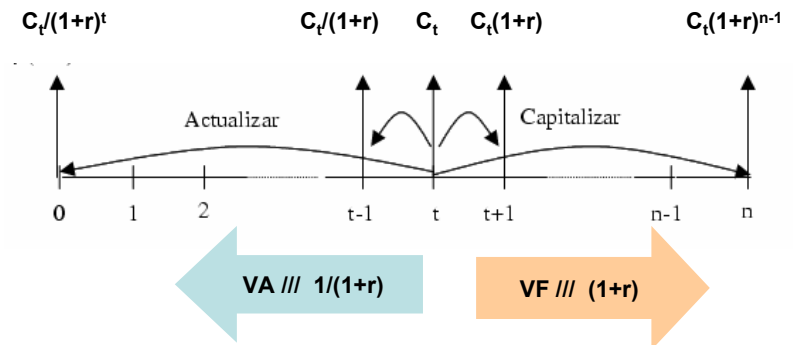
Valor Futuro

- Capitalización

$$VF = P * (1 + r)^n$$

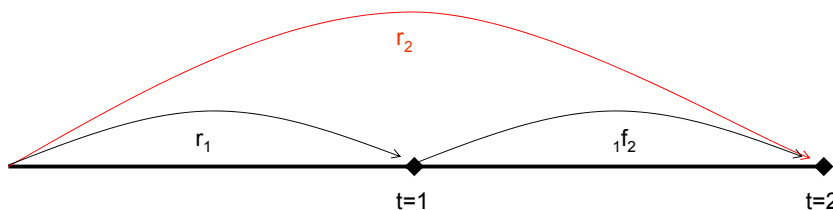


¿Si $t > 1$?

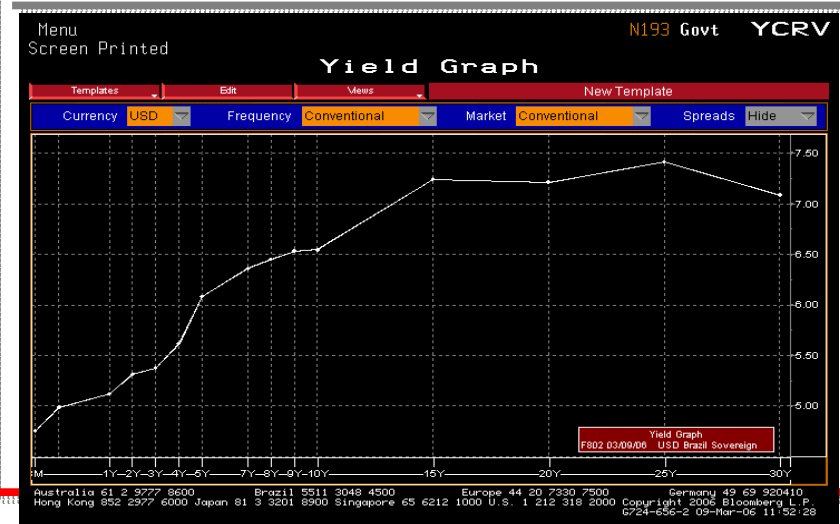


Estructura de tasa de interés

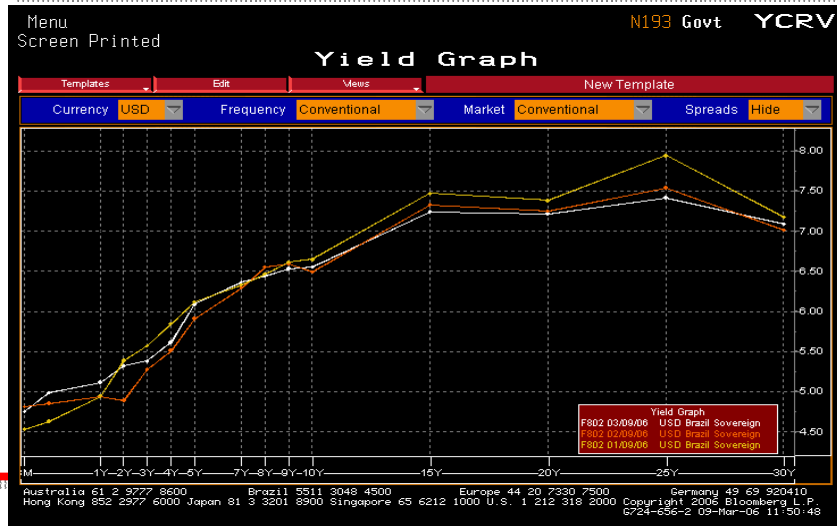
- Tasa a 90 días, Tasa a 1 año, Tasa a 2 años?
- Las tasas siempre se miden desde "hoy" hasta el vencimiento.
- Por ejemplo una tasa del 10% anual, con pagos anuales a 2 años:



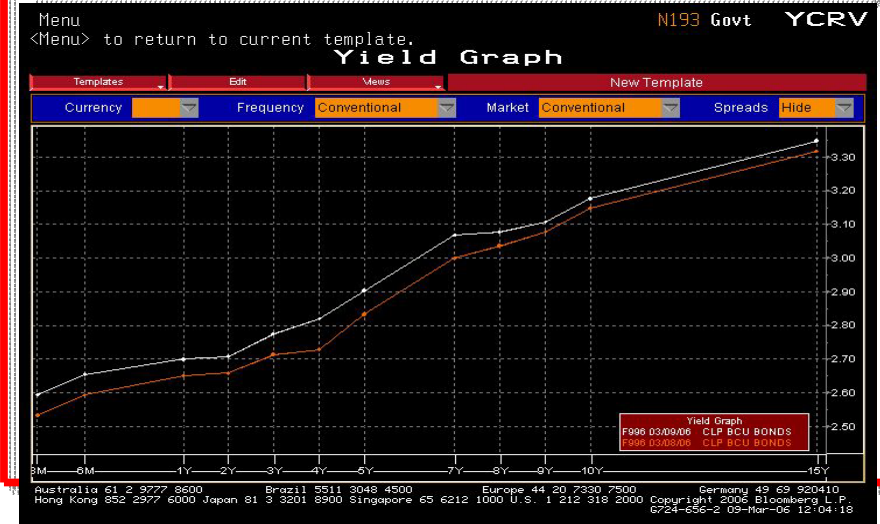
Estructura de tasa de interés



Estructura de tasas de interés

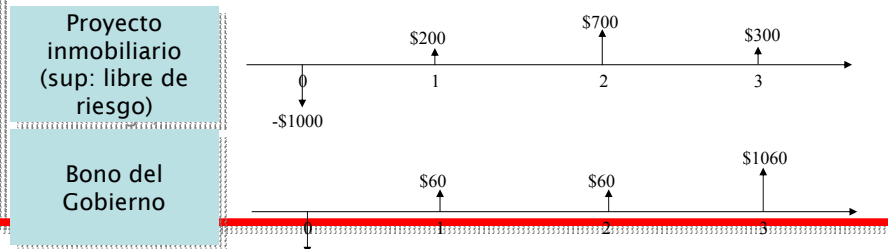


Estructura de tasas de interés



Flujos Múltiples: VPN

- Qué ocurre si tengo varios flujos futuros?: Necesitamos tener una métrica única para comparar el valor de los activos.
- El concepto de valor presente neto aparece como una respuesta a esta necesidad.
- Ejemplo: Dos alternativas:



Flujos Múltiples: VAN

- Para poder comparar las dos alternativas de inversión debemos resumir ambos flujos de caja a un sólo valor.
- Si definimos valor actual (presente) neto igual a:

$$VAN = \sum_{t=0}^T \frac{C_t}{(1+r_t)^t}$$

- Podemos calcular el valor presente de ambos flujos suponiendo una tasa de descuento anual igual a 6%.
- VAN@6% (proyecto inmobiliario) = \$64
- VAN@6% (bono del gobierno) = \$0
- Es decir, preferiríamos el proyecto inmobiliario frente a invertir en bonos del gobierno.

Simplificaciones

- Al asumir que r es constante para cualquier vencimiento se pueden obtener abreviaciones para estructuras típicas de flujos
- Es un supuesto que era más útil cuando la capacidad de realizar cálculos de VAN era mucho más difícil (mundo sin Excel)

Progresión geométrica

$$S = a + a^2 + \dots + a^{n-1} + a^n$$

$$-aS = -a^2 - \dots - a^{n-1} - a^n - a^{n+1}$$

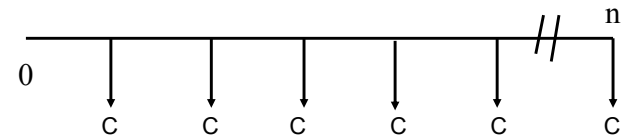
$$S = \frac{a - a^{n+1}}{1 - a}$$

“La fórmula”

$$\sum_{i=1}^n a^i = \frac{a - a^{n+1}}{1 - a}$$

Anualidad

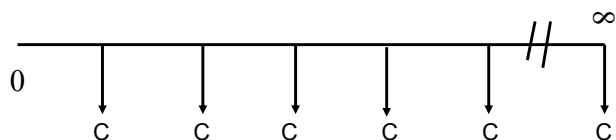
- Activo que produce un flujo constante “C”, que se paga durante “n” períodos



$$VA = C \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^n} \right]$$

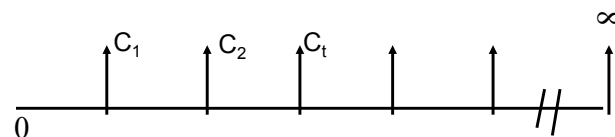
Perpetuidad

- Corresponde a un flujo constante que se paga hasta el infinito.



$$VA = \frac{C}{r}$$

Perpetuidad con crecimiento



- Los flujos crecen a una tasa g .
- Donde $C_t = c_1(1+g)^{t-1}$

$$VA = \frac{C}{r-g} \quad \text{con } r > g$$

Ejemplo

- Calcule el calendario de pago de intereses y amortizaciones de un crédito de por 15.000 UF con una tasa de 10% anual en UF a 7 años.

Ejemplo

Tipo 1

	Saldo inicial	Interés	Amortización	Cuota	Saldo final
1	15,000	1,500	1,581	3,081	13,419
2	13,419	1,342	1,739	3,081	11,680
3	11,680	1,168	1,913	3,081	9,767
4	9,767	977	2,104	3,081	7,662
5	7,662	766	2,315	3,081	5,347
6	5,347	535	2,546	3,081	2,801
7	2,801	280	2,801	3,081	0
		6,568	15,000	21,568	

Ejemplo

Tipo 2

	Saldo inicial	Interés	Amortización	Cuota	Saldo final
1	15,000	1,500	2,143	3,643	12,857
2	12,857	1,286	2,143	3,429	10,714
3	10,714	1,071	2,143	3,214	8,571
4	8,571	857	2,143	3,000	6,429
5	6,429	643	2,143	2,786	4,286
6	4,286	429	2,143	2,571	2,143
7	2,143	214	2,143	2,357	-
		6,000	15,000	21,000	

Ejemplo

Tipo 3

	Saldo inicial	Interés	Amortización	Cuota	Saldo final
1	15,000	1,500	(1,291)	209	16,291
2	16,291	1,629	(1,212)	417	17,503
3	17,503	1,750	(915)	835	18,418
4	18,418	1,842	(172)	1,670	18,591
5	18,591	1,859	1,480	3,339	17,110
6	17,110	1,711	4,968	6,679	12,143
7	12,143	1,214	12,143	13,357	-
		11,506	15,000	26,506	

Ejemplo

Tipo 4

	Saldo inicial	Interés	Amortización	Cuota	Saldo final
1	15,000	1,500	7,536	9,036	7,464
2	7,464	746	3,772	4,518	3,692
3	3,692	369	1,890	2,259	1,802
4	1,802	180	949	1,130	853
5	853	85	479	565	373
6	373	37	245	282	128
7	128	13	128	141	0
		2,931	15,000	17,931	

Ejemplo

Tipo 4?

	Saldo inicial	Interés	Amortización	Cuota	Saldo final
1	15,000	1,500	(1,500)	-	16,500
2	16,500	1,650	5,583	7,233	10,917
3	10,917	1,092	(1,092)	-	12,009
4	12,009	1,201	6,032	7,233	5,977
5	5,977	598	(598)	-	6,575
6	6,575	658	6,575	7,233	-
7	-	-	-	-	-
		6,698	15,000	21,698	

Excel

- **VF(i,N,,-P):** Convierte una suma presente P, al final del período 0 a una suma futura F al final del período n
- **VA(i,n,,-F):** Convierte una suma futura F, al final del período n, a una suma presente P al comienzo al final del período 0.

Excel

- **PAGO(i,n,-P):** Convierte una suma presente P, al final del período 0, en una serie uniforme de valor C con $t=1..n$
- **VF(i,n,-C):** Convierte una serie uniforme de valor C, con $t=1..n$, en una suma futura F

Excel

- **PAGO(i,n,,-F):** Convierte una suma futura F, al final del período n, en una serie uniforme de valor C con $t=1..n$
- **VNA(i,rango):** Calcula el valor presente de un flujo de caja, a la tasa de interés indicada y lo expresa en monedas del período anterior al primer flujo.

Excel

- **TIR(rango,i,semilla):** Calcula el asa de interés que hace que el VAN de los flujos sea cero.
- **NPER(tasa, pago, VA, VF, tipo, semilla)**
Calcula número de períodos que se requieren para que una inversión se convierta en un determinado monto al final de esos períodos. También se puede usar para calcular número de cuotas.

Costo de Oportunidad

- **COSTO DE OPORTUNIDAD DEL CAPITAL DE UN PROYECTO DE INVERSIÓN ES LA TASA ESPERADA DE RENTABILIDAD DEMANDADA POR LOS INVERSIONISTAS EN ACTIVOS SUJETOS AL MISMO RIESGO DEL PROYECTO.**
- ➔ Tasa de descuento del proyecto: r

Costo de Oportunidad

- No todas las inversiones tienen el mismo riesgo. Ejemplos:
 - Bonos del tesoro
 - Construcción de oficinas
 - Perforación de un pozo de petróleo
- En principio a mayor riesgo mayor es la rentabilidad exigida
- Más adelante se discutirá el problema del riesgo y como éste afecta el valor de los activos.

Tasa de descuento: Fuentes de confusión

- Reconociendo variación en los flujos se descuenta a la tasa libre de riesgo.
- Asumir que la tasa de descuento es equivalente a la tasa a la cual puedo endeudarme.