Departamento de Ingeniería Industrial
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Apuntes de Evaluación de Proyectos IN42A

Profesor Christian Diez

1999

10. OPTIMIZACIÓN DE PROYECTOS

1. OBJETIVO

Este capítulo tiene por finalidad estudiar como maximizar el aporte a la riqueza de un proyecto en particular seleccionando las mejores alternativas de inicio, tamaño, localización y momento óptimo de liquidar la inversión, reemplazo de equipos, selección de proyectos dentro de una cartera con restricciones de capital, proyectos independientes e interdependientes.

2. MOMENTO ÓPTIMO PARA INICIAR EL PROYECTO

Ya hemos visto que si el VPN del flujo de beneficios netos de una inversión es positivo, entonces es conveniente hacerla. Pero este valor nada nos indica sobre el momento óptimo para hacerlo.

Puede ocurrir que aun siendo conveniente invertir hoy, lo sea aún más dentro de algunos periodos más.

Esta ”mejor” conveniencia puede deberse a:

i) cambios esperados en la tasa de descuento
ii) cambios en el flujo de beneficios netos del proyecto.

La manera de enfrentar esta situación es comparar el proyecto de postergar el proyecto, versus la situación base que es no postergar.

Veremos algunos casos típicos:

a) Proyecto no repetible con flujos de beneficios netos crecientes que dependen del tiempo calendario

Un buen ejemplo de este caso es el mejoramiento de una carretera, en donde el flujo de vehículos por la carretera suponemos depende del tiempo y no de si carretera fue mejorada o no. Esto también puede ser válido para proyectos de agua potable, escuelas, electricidad, puertos, ampliación de cobertura de la línea del metro, etc.

Si la carretera cuesta I_0 hacerla ahora e I_1 en un año más, y el costo de oportunidad del dinero es r:

$$VPN_t = -I_0 + \frac{F_t}{(1+r)} + \frac{F_{t+1}}{(1+r)^2} + \frac{F_{t+2}}{(1+r)^3} + ... + \frac{F_{t+n-1}}{(1+r)^n}, \text{ con } F_{t+1} \geq F_t \ \forall \text{t}$$

$$VPN_{t+1} = \frac{-I_1}{(1+r)} + \frac{F_{t+1}}{(1+r)^2} + \frac{F_{t+2}}{(1+r)^3} + ... + \frac{F_{t+n}}{(1+r)^{n+1}}$$

Convendrá postergar mientras $\Delta VPN \geq 0$

$$\Delta VPN = VPN_{t+1} - VPN_t = \frac{-I_1}{(1+r)} + \frac{F_{t+n}}{(1+r)^{n+1}} + I_0 - \frac{F_t}{(1+r)} \geq 0$$

$$\frac{r * I_0 + (I_0 - I_1) - F_t}{(1+r)} + \frac{F_{t+n}}{(1+r)^{n+1}} \geq 0 \rightarrow Postergar$$

Si $I_0 = I_1$ y n $\rightarrow \infty$

$F_t \leq Inv * r \rightarrow Postergar$

$F_t > Inv * r \rightarrow Invertir$

Por lo que el momento óptimo de iniciar la inversión es aquel en que los beneficios netos del primer año de operación del proyecto son iguales al “costo de capital” de la inversión comprometida.

Notar que se supuso que la vida útil de la inversión es la misma (n) independiente del momento en que se materialice la inversión, es decir que la carretera va a durar igual, digamos 30 años, independiente de la magnitud de flujo de vehículos que pase por ella. Si quisiéramos corregir este potencial distorsión debemos modificar la cantidad de flujos de cada alternativa.

b) Proyecto repetible con flujos de beneficios netos crecientes que dependen del tiempo calendario

En este caso, la inversión se realiza cada un cierto ciclo o número de periodos, por ejemplo n, por lo que el momento óptimo de invertir dependerá del cuando el primer beneficio neto del proyecto iguale o supere el costo de capital de la inversión (que dura n periodos), es decir:

$$\text{Si } I_0 \frac{(1+r)^n * r}{(1+r)^n - 1} < F_t \rightarrow Invertir$$

c) Proyecto no repetible con flujos de beneficios netos crecientes que dependen del tiempo calendario y del momento de inicio de la inversión.

Esto podría ocurrir si el flujo de vehículos, y por consecuencia el flujo de beneficios netos, no dependiera sólo del tiempo “absoluto”, sino que, por ejemplo, este pudiera aumentar debido al mejoramiento de la carretera.

En este caso, los VPNs del proyecto base y el de postergar en un periodo son:

$$VPN_{base} = -I_0 + \frac{F_t^{base}}{(1+r)} + \frac{F_{t+1}^{base}}{(1+r)^2} + \frac{F_{t+2}^{base}}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{F_{t+n-1}^{base}}{(1+r)^n}$$

$$VPN_{postergar} = -\frac{I_1}{(1+r)} + \frac{F_{t+1}^{postergar}}{(1+r)^2} + \frac{F_{t+2}^{postergar}}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{F_{t+n}^{postergar}}{(1+r)^{n+1}}$$

Convendrá postergar mientras $\Delta VPN > 0$, el momento óptimo se encontrará cuando $\Delta VPN = 0$.

$$\Delta VPN = I_0 - \frac{F_t^{base}}{(1+r)} + \frac{F_{t+n}^{postergar}}{(1+r)^{n+1}} - \frac{I_1}{(1+r)} + \sum_{s=1}^{n-1} \frac{F_{t+s}^{postergar} - F_{t+s}^{base}}{(1+r)^s} = 0$$

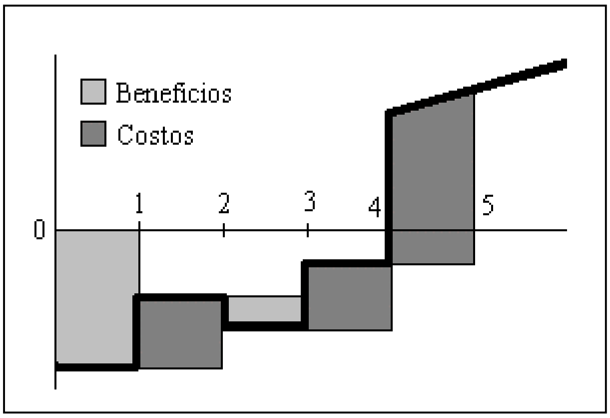
$$r * I_0 = (I_0 - I_1) + F_t^{base} - \sum_{s=1}^{n-1} \frac{F_{t+s}^{postergar} - F_{t+s}^{base}}{(1+r)^{s-1}} - \frac{F_{t+n}^{postergar}}{(1+r)^n}$$

d) Proyecto no repetible con flujos de beneficios netos crecientes que dependen sólo del tiempo momento de inicio de la inversión.

En este caso el VPN llevado al año en que se materializa la inversión es siempre el mismo, por lo que postergarlo lo único que hace es que su aporte a la riqueza del inversionista sea menor.

e) No toda la inversión puede ser materializada el “año” 0

Supongamos que la inversión requiere de más de un periodo y que los beneficios netos dependen del momento de inicio de ésta y que el número de estos es muy grande o infinito. Gráficamente, esto podría ilustrarse con la siguiente figura:



Luego, lo que debe hacerse para determinar la conveniencia de postergar un periodo el proyecto es calcular el valor actual de los beneficios y costos identificados en la figura.

f) Cambios en la tasa de descuento.

Si se espera cambios en el costo de oportunidad del dinero, entonces puede ser conveniente postergar el proyecto. Esto ocurrirá cuando existen expectativas de aumento en el costo de oportunidad.

En efecto si durante los p primeros periodos la tasa de descuento es r_1 y en los siguientes q es r_2, tal que $r_1>r_2$, p+q=n y los flujos dependen sólo del momento en que se materializa la inversión.

En ese caso, los VPNs de la situación base y el proyecto de postergar son:

$$VPN_{base} = -I_0 + \sum_{t=1}^{p} \frac{F_t}{(1+r_1)^t} + \sum_{t=1}^{q} \frac{F_{p+t}}{(1+r_2)^{p+t}}$$

$$VPN_{postergar} = \frac{1}{(1+r_1)} \left[-I_0 + \sum_{t=1}^{p-1} \frac{F_t}{(1+r_1)^t} + \sum_{t=0}^{q} \frac{F_{p+t}}{(1+r_2)^{p+t}} \right]$$

$$\Delta VPN = -\frac{r_1}{1+r_1} \left[-I_0 + \sum_{t=1}^{p-1} \frac{F_t}{(1+r_1)^t} + \sum_{t=1}^{q} \frac{F_{p+t}}{(1+r_2)^t} \right] + \frac{F_p}{(1+r_1)(1+r_2)^p} - \frac{F_p}{(1+r_1)^p}$$

Convendrá postergar mientras las ganancias sean superiores a los costos.

3. TAMAÑO DE LA INVERSIÓN

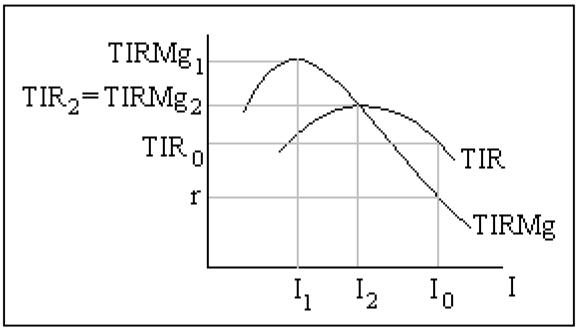
Para determinar esta variable el concepto es el mismo que hemos visto en el momento óptimo. Es decir, calcular el VPN marginal de ampliar el proyecto, esto convendrá hasta que ΔVPN=0.

Esta condición se alcanzará cuando el aumento requerido en la inversión (costo) se hace igual al valor

$$\Delta Inversión = \sum_{t=1}^{n} \frac{\Delta F_t}{(1+r)^t}$$

actual del aumento de los flujos de beneficios netos (ingreso):

Es decir se trata de un proyecto marginal, en este caso, ampliar el tamaño de la inversión y, por lo tanto, podrá existir una TIR marginal de los flujos, la que en la condición óptima será igual al costo de oportunidad del dinero. Por ejemplo, como el gráfico de la figura:



Si el costo de oportunidad del dinero es r, entonces la inversión óptima es I_0, ya que para esa inversión el costo de oportunidad se hace igual a la TIR marginal.

Una inversión I_1 también es rentable, pues la TIR es mayor que el costo de oportunidad del dinero, pero conviene aumentar el volumen invertido hasta I_0, pues la inversión marginal tiene un retorno marginal ($TIRMg_1$) superior al costo marginal del capital invertido (r).

La TIR máxima se obtiene para I_2, donde la TIR marginal es igual a la TIR. Tampoco conviene optar por este tamaño, pese a tener la mayor TIR, porque si a partir de I_2 vamos aumentando el tamaño, cada peso adicional invertido en el proyecto obtiene un beneficio que está dado por la TIR marginal, que en todos los casos (hasta llegar a I_0) es mayor que el costo de obtener un peso adicional.

Es decir, convendrá aumentar el tamaño del proyecto hasta I_0,debido a que el retorno de cada peso adicional invertido aquí es mayor que el que puede obtenerse en inversiones alternativas. Por lo tanto, si no hay restricción de capital, convendrá invertir hasta I_2, en donde se iguala TIRMg con r.

Debe destacarse que r es el costo de oportunidad del dinero pertinente para el inversionista, en el sentido que ése es el costo alternativo del capital que se está invirtiendo en el proyecto. La TIRMg adolece de los mismo defectos vistos para la TIR, por lo que será preferible la condición de ΔVPN=0.

4. MOMENTO ÓPTIMO DE LIQUIDAR LA INVERSIÓN

Hay que usar el mismo principio del VPN marginal:

$$VPN_{base} = -I_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t^{base}}{(1+r)^t}$$

$$VPN_{postergar} = -I_0 + \sum_{t=1}^{n+1} \frac{F_t^{postergar}}{(1+r)^t}$$

$$\Delta VPN = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t^{postergar} - F_t^{base}}{(1+r)^t} + \frac{F_{n+1}^{postergar}}{(1+r)^{n+1}},$$

En general ocurrirá que $F_t^{postergar} \neq F_t^{base}$ sólo si $t = n, n+1$.

En ese caso:

$$\Delta VPN = \frac{F_n^{postergar} - F_n^{base}}{(1+r)^n} + \frac{F_{n+1}^{postergar}}{(1+r)^{n+1}},$$

El n óptimo se alcanza cuando $\Delta VPN = 0$, luego:

$$F_n^{base} = F_n^{postergar} + \frac{F_{n+1}^{postergar}}{(1+r)}$$

5. Momento óptimo de reemplazo

Hay que maximizar el VPN al infinito de los diferentes periodos posibles de reemplazo, o lo que es equivalente, maximizar el Beneficio Anual Uniforme Equivalente (BAUE), o el CAUE si los beneficios no dependen del ciclo óptimo de reemplazo.

Es decir se debe elegir como momento óptimo de reemplazo lo siguiente:

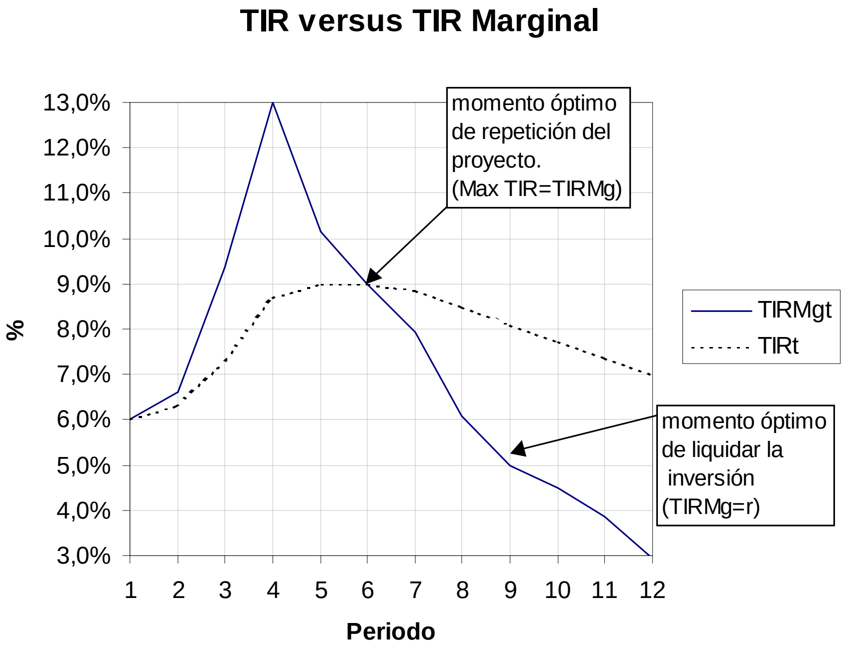
$$N^* = n / Max_n \left\{ BAUE_n = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+r)^t} * \frac{(1+r)^n * r}{(1+r)^n - 1} \right\}$$

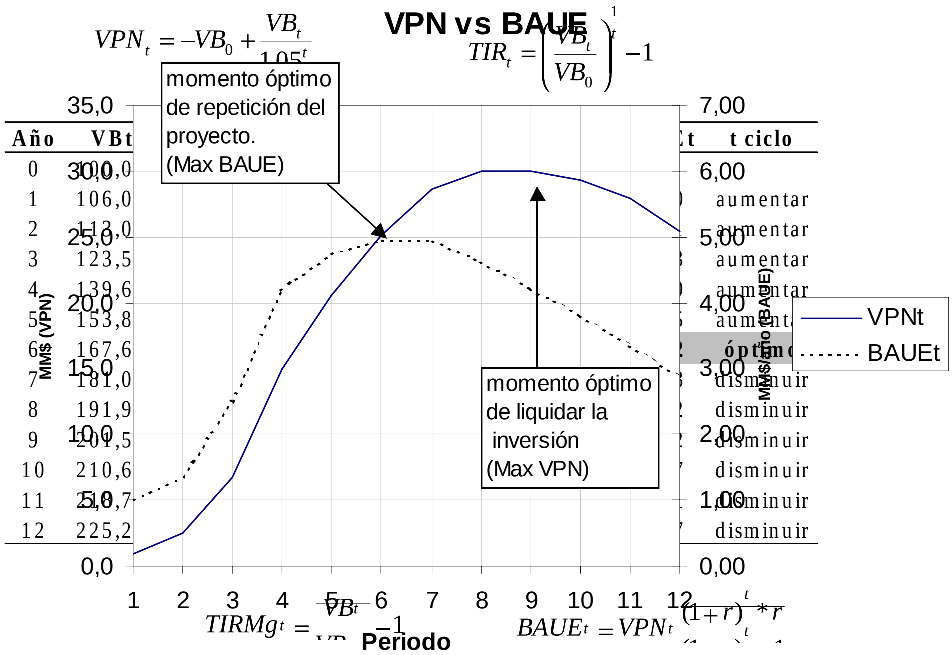
Veamos un ejemplo que ilustra el criterio anterior y algunos otros vistos en este capítulo:

El valor de la madera de un bosque aumenta año a año debido al crecimiento de los árboles. Por otra parte, el costo de plantar los árboles es de $ 100 MM. Si el costo de oportunidad del dinero es 5% y el valor del bosque evoluciona según la siguiente tabla

¿Cuándo se debería vender el bosque si el proyecto no es repetible? (momento óptimo de liquidar la inversión).

¿Cada cuantos períodos es más conveniente repetir el proyecto?





La TIR para el año t es la tasa interna de retorno promedio para todos los años, desde el año 0 hasta el año t, ya que si se descuentan al año 0 los beneficios netos de 0 a t se obtendrá un VPN igual a 0.

En cambio, la TIR marginal indica el retorno o rentabilidad obtenida en un año en particular, respecto del año anterior.

El VPN del proyecto liquidando la inversión en diferentes períodos, se hace máximo cuando TIRMg=r.

Esto ocurre porque en un periodo cualquiera, digamos t, el inversionista debe preguntarse corto ahora el bosque o no?. La respuesta es ver cual es el VPN o la TIR del proyecto marginal de postergar el corte de la madera. Si ΔVPN>0 o, equivalentemente, TIRMg>r, entonces la recomendación es postergar el corte. En el ejemplo, estas condiciones se mantienen hasta el año 9. Luego ese es el año óptimo de liquidar la inversión.

El VPS o BAUE del proyecto repitiendo el proyecto en diferentes periodos, se hace máximo cuando la TIR es máxima e igual a la TIR Marginal.

Esto ocurre porque en un periodo cualquiera, el inversionista decide si aumentar el ciclo o no determinando el aumento en su riqueza, medido en el ΔVPS o ΔBAUE, este aumentará mientras TIRMg>TIR, ya que la rentabilidad marginal obtenida por alargar ciclo es mayor que la rentabilidad media obtenida en el periodo, que es lo que se obtendría si se repite el proyecto.

Si el inversionista pudiera comprar y vender árboles repetidamente en cualquier momento al valor señalado en VBt, el mejor negocio sería comprarlos al final del año 3 y venderlos al final del año 4, ya que con eso estaría obteniendo una rentabilidad promedio de 13%.

Le convendrá cortar los árboles para vender la madera o tal vez le conviene más vender el bosque a otra persona para que ésta lo corte más adelante?

Hemos determinado que para el inversionista es mejor cortar el bosque al final del periodo 6 si es que piensa reinvertir su dinero plantando árboles nuevamente. Sin embargo, la opción puede ser vender el bosque en ese periodo a una tercera persona, cuya única alternativa sea poner su dinero al banco al 5%.

Si le cobrará un precio igual al que podría obtener al persona si corta el bosque (VB6=167,69) sería un gran negocio para el comprador, ya que después podría venderlo al final del año 8 en 191,98 (su mejor

$$TIR = \left(\frac{VB_8}{VB_6}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \left(\frac{191{,}98}{167{,}69}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}07 = 7\%$$

opción); obteniendo con ello una rentabilidad de 7%:

Si el costo de oportunidad del dinero del comprador es 5%, entonces el precio de venta máximo que puede obtener el dueño del proyecto es igual a:

$$VB_6^{max} = \frac{VB_8}{(1+r)^2} = \frac{191{,}98}{1{,}05^2} = 174{,}13$$

A este precio de venta el VPN del comprador es igual a cero, y por lo tanto estaría indiferente entre comprar el bosque a ese precio o dejar sus recursos rindiendo un 5% en su mejor alternativa (su costo de oportunidad del dinero).

Luego, al inversionista maderero le conviene más vender el bosque al final del año 6 en vez de cortar el bosque y vender la madera, ya que 174,13>167,69, por lo que obtiene una ganancia adicional de 6,44 y

$$TIR = \left(\frac{VB_6^{max}}{VB_0}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 = \left(\frac{174{,}13}{100}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 = 0{,}097 = 9{,}7\%$$

una TIR de 9,7%:

Dado que es más conveniente vender el bosque al final del año 6 a una persona con costo de oportunidad igual a 5% que cortar y vender la madera en ese periodo. ¿Será conveniente venderlo a finales del séptimo año?

Si vender año 6>cortar año 6>cortar año 7, entonces cortar en el año 7 no vale la pena evaluarlo.

La respuesta es NO, pues el precio máximo que puede obtener por el bosque al final del año 7 es igual al valor actual de los 191,98 que puede obtener el comprador al final del año 8.

$$VB_7^{max} = \frac{VB_8}{(1+r)^1} = \frac{191{,}98}{1{,}05} = 182{,}84$$

Al postergar la venta del bosque un año está obteniendo como rentabilidad marginal un 5% (igual a su costo de oportunidad), en tanto que vendiendo sin postergar obtiene una rentabilidad del 9,7%, por lo que s más conveniente iniciar una nueva repetición del negocio en vez de postergar la venta del bosque.

¿Le convendrá al inversionista anticipar la venta un año?

El precio máximo que puede obtener del bosque al final del año 5, es igual al valor actualizado (al final de laño 5) de los 191,98 que obtendrá el comprador cuando lo tale al final del año 8.

$$VB_5^{max} = \frac{VB_8}{(1+r)^3} = \frac{191{,}98}{1{,}05^3} = 165{,}84$$

Y la TIR que obtendría el inversionista maderero sería:

$$TIR = \left(\frac{VB_5^{max}}{VB_0}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = \left(\frac{165{,}84}{100}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0{,}1065 = 10{,}65\%$$

Por lo tanto es más conveniente vender el bosque al final del año 5 que esperar hasta el año 6 para hacerlo.

La rentabilidad marginal que obtiene el dueño del proyecto por postergar la venta hasta el año 6 es 5%, ya que 165,84 * (1,05)=174,13.

Que es menor que la TIR media que obtiene en los 5años, por lo que al final del año 5 es más conveniente vender la madera y repetir otro ciclo de 5 años que postergar la venta un año más.

¿Convendrá adelantar aún más la venta del bosque?

Es claro que si el comprador no tiene otra alternativa que invertir su capital al 5% de interés, el que planta los árboles podrá vendérselos en el mismo instante en que los planta al precio de:

$$VB_0^{max} = \frac{VB_8}{(1+r)^8} = \frac{191{,}98}{1{,}05^8} = 129{,}94$$

Obteniendo una ganancia "instantánea" de 29,94 desde el año 0 en adelante.

Luego, sería muy buen negocio el criadero de árboles.

Esta situación es de desequilibrio, en un mercado competitivo las utilidades del negocio maderero harían subir el costo de plantar árboles o bajaría el precio de la madera.

Por ejemplo, a través de la entrada de nuevos empresarios madereros que harían aumentar la oferta de madera, de modo tal que el precio que puede obtenerse por el bosque al cabo de t años sea $100\ (1{,}05)^t$ y no los VB_t iniciales de la tabla. De manera que, en el equilibrio, el retorno sobre el capital invertidos en bosques sea también 5%.

Jamás se logrará que todos los mercados competitivo alcancen el equilibrio, por lo que siempre existirán inversiones que rindan más que la tasa de interés del mercado. Encontrar esas inversiones es justamente una de los objetivos de la evaluación de proyectos.

6. DECISIONES DE LOCALIZACIÓN

Al igual que en puntos anteriores, la elección de la ubicación se debe hacer a través de VPN marginales (ΔVPN) respecto a una situación base. O, alternativamente, calculando los VPN de cada alternativa (más engorroso).

En la generación de alternativas posibles de ubicación se debe tener en cuenta algunos factores determinantes en los beneficios y costos de cada alternativa. Entre ellas:

- Medios y costos de transporte
  Ejemplos: cercanías a puertos de embarque de packaging de frutas, a aeropuertos de cultivos de flores para exportación, etc.

- Disponibilidad y costo de la mano de obra
  Ejemplos: empresas de servicios de consultoría están en Santiago y grandes ciudades, aunque muchas veces los clientes son de fuera de Santiago.

- Cercanía de proveedores
  Ejemplos: plantas recolectoras de leche fluida (Soprole), de madera aserrable (Rosen) o pulpable (Celulosa Arauco), plantas de fabricación de mezcla de hormigón (Premix), etc.

- Factores ambientales
  Ejemplos: Filtros en refinería de cobre de Ventanas. Proyecto Trillium de explotación sustentable de bosque nativo en el sur. Central Pangue en alto Bío-Bío, efectos ambientales y sobre las comunidades indígenas.

- Cercanía a los distribuidores y consumidores
  Ejemplos: supermercados, cines, mueblerías, etc,

- Costo y disponibilidad de terrenos

  Ejemplos: Empresas industriales que se han llevado las plantas a las afueras de Santiago: Quilicura, San Bernardo, Puente Alto, etc. (CCU, ECUSA, Kodak, CCT, CMPC, etc.)

- Estructura impositiva y legal.

  Ejemplos: Exenciones tributarias de pago de aranceles a importadores en Zona Franca de Iquique. Rebajas y exenciones tributarias a empresas que se instalan en la zona de Lota. Prohibición legal de entrar vehículos de distribución no eléctricos o a gas natural en el perímetro de Santiago Centro (legal-ambiental)

7. SELECCIÓN DE PROYECTOS EN UNA CARTERA

Este punto trata sobre cómo realizar una jerarquización de proyectos disponibles (cartera) respecto de cuáles son convenientes de realizar, y cuáles deberían ser llevados a cabo en primer lugar.

La utilidad de la jerarquización dependerá de las limitaciones financieras de la organización, ausencia o presencia de racionamiento de capital, y del grado de dependencia que puedan tener los proyectos incluidos en la cartera.

Los proyectos pueden ser dependientes o independientes, de acuerdo con el grado en que la ejecución de uno afecte los beneficios netos del otro.

Los proyectos A y B son independientes cuando la ejecución de un proyecto no afecta en nada los flujos de beneficios netos del otro.

Los proyectos A y B son complementariamente dependientes cuando la ejecución de un proyecto afecta positivamente los flujos de beneficios netos del otro.

Los proyectos A y B son sustitutos cuando la ejecución de un proyecto afecta negativamente los flujos de beneficios netos del otro.

El grado de dependencia influirá sobre la necesidad y conveniencia de separar proyectos integrales en sus diversos componentes o subproyectos separables.

a) Jerarquización sin racionamiento de capitales

Proyectos Independientes:

Se deben realizar todos los proyectos con VPN>0, descontando los flujos a la tasa de interés que representa el costo de oportunidad del dinero del inversionista.

Si el capital disponible alcanza para financiar a todos los proyectos que aportan riqueza al inversionista y aún así sobra capital, entonces éste debería invertirse en la alternativa que determina el costo de oportunidad del dinero.

Proyectos mutuamente excluyentes

El mayor grado de dependencia entre proyectos ocurrirá cuando éstos son perfectamente sustitutos o mutuamente excluyentes. Es decir, que la realización de un proyecto afecta de forma tal a los flujos de beneficios netos de otro que los anula.

Por ejemplo, construir una carretera con cemento o con asfalto, al realizar la carretera con una alternativa elimina completamente la posibilidad de realizarla con la otra.

En este caso debe elegirse el proyecto con mayor VPN. Pero como vimos anteriormente, puede ser que para algunas tasas de descuento sea más conveniente una alternativa, y a otras tasas la otra alternativa.

Supongamos que las alternativas son equivalentes en los beneficios brutos que genera (flujo, tiempo de viaje, seguridad, etc.), que la vida útil de la carretera se puede considerar infinita y que la inversión y los costos de mantenimiento que se obtendrían para cada alternativa de carretera son los siguientes:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**
Cemento	100	10	10	10	10	10	...
Asfalto	50	20	20	20	20	20	...

La carretera de asfalto tiene una menor inversión pero un mayor costo de mantenimiento. Si la tasa de descuento relevante es 10%, vemos cuales serían los valores actuales netos de ambas alternativas:

$$VPN_{\cos tos}^{asfalto} = 50 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{20}{1{,}1^t} = 50 + \frac{20}{0{,}1} = 250$$

$$VPN_{\cos tos}^{cemento} = 100 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{10}{1{,}1^t} = 100 + \frac{10}{0{,}1} = 200$$

De modo que conviene más la alternativa de cemento, ya que arroja un menor VPN de los costos.

En tanto que si el costo de oportunidad del dinero es 20% el resultado es:

$$VPN_{\cos tos}^{asfalto} = 50 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{20}{1{,}2^t} = 50 + \frac{20}{0{,}2} = 150$$

$$VPN_{\cos tos}^{cemento} = 100 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{10}{1{,}2^t} = 100 + \frac{10}{0{,}2} = 150$$

En este caso se está indiferente entre realizar la carretera de asfalto o de cemento.

A costos de oportunidad mayores a 20%, la decisión recomendada cambia, ya que se hace más conveniente realizar la carretera con asfalto.

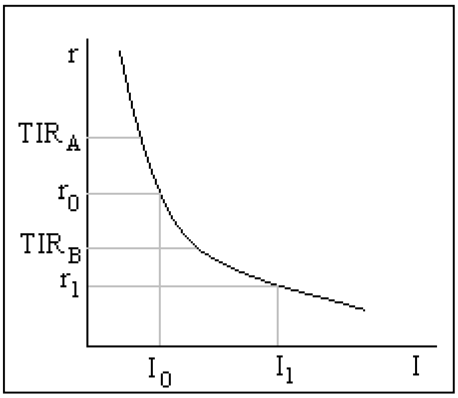
Es decir, la jerarquización de los proyectos depende del costo de oportunidad del dinero. Para costos de oportunidad superiores a 20% el programa de inversiones considera 50, en tanto que para costos de oportunidad menores se considerarán inversiones por 100.

Por lo tanto es incorrecto ordenar los proyectos de acuerdo a su TIR, sencillamente no pueden incluirse ambos proyectos ya que son mutumente excluyentes y su conveniencia depende de la tasa de descuento relevante.

No obstante lo anterior, los economistas definen la llamada “curva de inversión” o “curva de eficiencia marginal de la inversión”, que lleva

Implícita la utilización del TIR como criterio para ordenar los proyectos.

En la figura, la curva de inversión indica que si el costo de oportunidad es r_0 habrá un volumen I_0 de inversión; a un costo de oportunidad $r_1<r_0$ la inversión será $I_1>I_0$.



Sin embargo, la composición de la inversión será distinta, para el volumen de inversión I_0 se incluye el proyecto A; para el volumen I_1 se incluye el proyecto B y se excluye el proyecto A (que tiene una TIR mayor que el de B).

Proyectos dependientes

Veamos las distintas posibilidades que pueden ocurrir entre dos proyectos A y B que tienen algún grado de dependencia entre ambos.

- $VPN_A>0$ y hay que decidir si hacer o no el proyecto complementario B

Ejemplo: un proyecto de agua potable (A) que es complementado por un proyecto de alcantarillado (B).

Supongamos que $VPN_A=30$ en caso que no se ejecute B. Si B es complementario con A, es imposible que la ejecución de B altere la decisión de realizar A.

Además, todos los beneficios adicionales que B le causa A deben ser considerados como beneficios de B, ya que el proyecto A se hubiera ejecutado de todas maneras, aun en el caso en B no se realice.

Por ejemplo, si la construcción de B induce a que el VPN de A llegue a 46, entonces los 16 adicionales (46-30) deben asignarse como beneficios del proyecto B. El que se ejecutará si su VPN, incluyendo los 16, es mayor que 0.

- $VPN_A>0$ y hay que decidir si hacer o no el proyecto sustituto B

Ejemplo: un proyecto de desarrollo turístico (proyecto A) y un proyecto sustituto de explotación ganadera (proyecto B), para Isla de Pascua.

Si la ejecución de B disminuye los beneficios netos de A, en menos que 30, seguirá siendo rentable realizar el proyecto A. Pero deberá cargarse como costo del proyecto B la disminución de VPN del proyecto A.

Si el VPN de B menos la reducción del VPN de A es menor que cero entonces sólo deberá realizarse el proyecto A y no hacer el B.

Al contrario, si la diferencia entre el VPN de B y la reducción de VPN de A es positiva, entonces se deberán realizar ambos proyectos.

¿Que sucede si el proyecto B es tan sustituto de A que hace que el VPN de este último sea negativo?.

Por ejemplo si $VPN_A=-10$ si se ejecuta B, entonces no se ejecuta A y se debería cargar como costo la pérdida de VPN de los beneficios netos que podría haber entregado el proyecto A. Es decir, los 30 y no los 40 (30+-10) en que efectivamente disminuyeron sus beneficios.

Si VPN_B menos los 30, que se dejó de obtener por no realizar el proyecto, es positivo, entonces conviene realizar el proyecto B, en caso contrario se realizará el proyecto A.

- $VPN_A<0$ y hay que decidir si hacer o no el proyecto sustituto B.

Si el proyecto A no es rentable por si sólo (sin B) y el proyecto B es sustituto, entonces menos rentable será el proyecto A si se ejecuta B. Por lo que el proyecto A es irrelevante para determinar la conveniencia del proyecto B. Y, por lo tanto, no se debe cargar al proyecto B la disminución del VPN del proyecto A.

Sería diferente si el proyecto A ya se realizó y estamos determinando la conveniencia de B. En ese caso, si se debería considerar en la evaluación de B la disminución del VPN del proyecto A.

- $VPN_A<0$ y hay que decidir si hacer o no el proyecto complementario B.

En ese caso puede pasar dos cosas:

i) que el aumento de VPN de A no sea lo suficiente y $VPN_A<0$ aún después de realizado el proyecto B.

Como A no se iba a realizar inicialmente, ni tampoco en caso de realizarse B, entonces es irrelevante el aumento de VPN de A, y por lo tanto no debería ser considerado como un aumento de beneficios del VPN del proyecto B. Salvo en el caso en que el proyecto A ya estuviese construido, ahí si se debería considerar el beneficio señalado.

ii) al construir el proyecto B aumentan los beneficios netos de A y lo hacen conveniente (VPN_A>0). Los beneficios que se deben sumar al VPN de B es sólo el nuevo VPN_A, ya que la alternativa pertinente es no realizar el proyecto A, y no su diferencia con el VPN_A anterior (sólo en el caso en que el proyecto A ya estuviese construido).

Para el caso de proyectos complementarios, puede darse la situación extrema de que ninguno de sea conveniente individualmente, mientras que la realización de ambos proyectos si lo sea.

En este caso conviene considerarlos como un solo proyecto.

Ej: túnel y pavimentar una carretera, puede que ambos sean no rentables, pero que combinados si lo sean.

Aunque, en general, hay que tratar de evaluar separadamente los subproyectos, ya que un buen subproyecto puede ocultar uno malo.

Ejemplo: ensanchar carretera entre dos ciudades puede ser rentable, pero puede ser que el ensanchamiento de los accesos a las ciudades y en los tramos de las pendientes fuertes (donde hay mayor congestión), en tanto que el ensanchamiento de los otros tramos de la carretera sean no rentables.

En resumen, el razonamiento que debe seguirse en estos casos que hemos visto de proyectos dependientes, es el de evaluar el VPN de realizar sólo A, sólo B y realizar A y B, y elegir el de mayor VPN.

Por ejemplo:

	I	**II**	**III**	**IV**
VPN_A	30	30	30	30
VPN_B	10	10	10	10
$VPN_{A\ y\ B}$	50	40	36	27

En el caso I, los proyectos A y B son complementarios y deberían emprenderse juntos.

En II son independientes y deben emprenderse ambos.

En III son sustitutos y deben emprenderse ambos.

En IV son tan sustitutos que sólo debe emprenderse el proyecto A.

b) Con racionamiento de capitales

En este caso se supone que el inversionista tiene un capital fijo para distribuir entre un conjunto de proyectos de inversión, de modo que la cantidad de fondos puede no ser suficiente para emprender todos los proyectos que tienen un VPN positivo.

¿Cómo determinar que proyectos emprender y su jerarquización de conveniencia?

Proyectos independientes

Si el monto disponible para inversión en el presente es I, y existe una cartera de n proyectos, tal que la inversión requerida y el VPN de cada una es I_i y VPN_i. Por ejemplo, supongamos que un inversionsta tiene 1.000 MM$, que su costo de oportunidad del capital es 10% y que dispone de una cartera de proyectos como el de la siguiente tabla.

¿Qué proyectos le conviene realizar a este inversionista?

Proyecto	Inversión	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	....	Infinito
A	-10	16									
B	-20	2	2	2	46						
C	-50	10	10	120	15						
D	-70	78									
E	-100			180							
F	-150	12	12	12	12	12	12	12	300		
G	-200	40	40	40	40	40	40	40	40	....	40
H	-250	-30	40	100	200	100					
I	-270	50	100	100	100	100	125				
J	-400	70	690								

Realicemos primero el ranking de proyectos eligiendo aquellos con mayor VPN:

Proyecto	Inversión	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	....	Infinito	VPN	Inv. ac.	VPN ac.
J	-400	70	690									233,9	400	233,9
G	-200	40	40	40	40	40	40	40	40	....	40	200,0	600	433,9
I	-270	50	100	100	100	100	125					134,2	870	568,1
C	-50	10	10	120	15							67,8	920	635,8
E	-100			180								63,6	1020	699,5
F	-150	12	12	12	12	12	12	12	300			48,4	1170	747,8
H	-250	-30	40	100	200	100						29,6	1420	777,4
B	-20	2	2	2	46							16,4	1440	793,8
A	-10	16										4,5	1450	798,4
D	-70	78										0,9	1520	799,3

Vemos que, bajo este criterio se realizarían los 4 primeros proyectos (J, G, I y C), en donde colocaríamos 920 MM$, y con el que obtendríamos un $VPN_{cartera}$=635,8 MM$.

¿Qué pasa con los 80 MM$ que nos quedan disponibles?

Dos alternativas posibles, si los proyectos son divisibles, es decir, que se puede comprar una parte de ellos y no necesariamente aportar el monto completo de su inversión, entonces conviene comprar el 80% del proyecto E (80 MM$ de inversión) y obtener un VPN de 50,9 MM$. Por lo que el VPN de los 1.000 MM$ invertidos alcanzará a 686,7 MM$.

Si los proyectos no son divisibles, entonces los 80MM$ restantes deben invertirse en la alternativa que representa el costo de oportunidad del dinero, es decir la alternativa que renta 10%. Como cualquier inversión en esa alternativa obtiene un VPN igual a cero, entonces el VPN de la cartera sería los 635,8 MM$ calculados anteriormente.

¿Cuál sería la elección de los proyectos a realizar si ocupáramos un ranking según la TIR?

Proyecto	Inversión	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	....	Infinito	VPN	TIR	Inv. ac.	VPN ac.
E	-100			180								63,6	80%	100	63,6
A	-10	16										4,5	60%	110	68,2
C	-50	10	10	120	15							67,8	50%	160	135,9
J	-400	70	690									233,9	40%	560	369,8
B	-20	2	2	2	46							16,4	30%	580	386,2
I	-270	50	100	100	100	100	125					134,2	24%	850	520,4
G	-200	40	40	40	40	40	40	40	40	....	40	200,0	20%	1050	720,4
F	-150	12	12	12	12	12	12	12	300			48,4	15%	1200	768,8
H	-250	-30	40	100	200	100						29,6	13%	1450	798,4
D	-70	78										0,9	11%	1520	799,3

Vemos que este criterio entrega un VPN de la cartera de 520,4 MM$, que en el caso de que los proyectos sean divisibles puede aumentar en (150/200)*200=150. Alcanzando a 670,4 MM$ el VPN de la cartera.

Por lo tanto, vemos que el criterio de la TIR no maximiza el VPN de la cartera, algo esperable dado los problemas vistos de este indicador.

Pero será el ranking de VPNs individuales “EL” criterio de decisión para selección de proyectos independientes con restricción de capital?

La respuesta es NO.

En efecto, lo que se busca es obtener el máximo VPN posible a través de una combinación de proyectos de la cartera dada la restricción de capital existente. Dicho de otra manera, queremos obtener el máximo VPN por peso invertido. Esto nos lleva al indicador IVAN:

$$IVAN_i = \frac{VPN_i}{I_i}$$

El ranking según este indicador es el siguiente:

Proyecto	Inversión	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	....	Infinito	VPN	TIR	IVAN	Inv. ac.	VPN ac.
C	-50	10	10	120	15							67,8	50%	1,355	50	67,8
G	-200	40	40	40	40	40	40	40	40	....	40	200,0	20%	1,000	250	267,8
B	-20	2	2	2	46							16,4	30%	0,820	270	284,2
E	-100			180								63,6	80%	0,636	370	347,8
J	-400	70	690									233,9	40%	0,585	770	581,7
I	-270	50	100	100	100	100	125					134,2	24%	0,497	1040	715,9
A	-10	16										4,5	60%	0,455	1050	720,4
F	-150	12	12	12	12	12	12	12	300			48,4	15%	0,322	1200	768,8
H	-250	-30	40	100	200	100						29,6	13%	0,118	1450	798,4
D	-70	78										0,9	11%	0,013	1520	799,3

Obteniéndose un VPN de la cartera igual a 581,7 MM$, que en el caso de proyectos divisibles aumenta en (230/270)*134,2=114,3; llegando el VPN de la cartera a 696 MM$.

Este último valor es el máximo VPN de la cartera que se puede obtener dado los 1.000 MM$ disponibles para invertir. De hecho es superior a los encontrados cuando se jerarquizó con el criterio del VPN y de la TIR.

La jerarquización de los proyectos según el IVAN y el agotamiento del capital disponible aceptando los proyectos con mayores IVAN (y signo positivo para que superen a la alternativa del costo de oportunidad) permite obtener el máximo VPN para el inversionista dada su restricción de capital.

¿Pero que pasa cuando los proyectos no son divisibles? Al parecer el criterio del IVAN no es el mejor porque no entrega el máximo VPN de la cartera, pues el criterio del VPN entrega 635,8 MM$.

Este problema será relevante cuando exista una buena parte del poco capital que hay que queda invertido en la alternativa del costo de oportunidad (que rinde 10% anual), 23% del capital en nuestro ranking con el IVAN, en vez de quedar invertido en un "mejor" proyecto.

No obstante, para agregar uno o más proyectos que usen mejor ese 23%, es necesario sacar alguno de los que ya fueron "elegidos" por el ranking.

Usualmente el último, que tiene el menor IVAN de los seleccionados, de manera de tratar con una mayor inversión recuperar con IVANs aún menores al que estamos sacando.

El procedimiento para resolver esta optimización discreta en el caso general no ha sido formalmente modelado aún. Aunque siempre se puede resolver generando todas las combinaciones posibles de proyectos y elegir aquella que cumpliendo la restricción de capital entrega el máximo VPN.

Otra forma de enfocar el problema, es considerar que la escasez de fondos disponibles hace que en realidad el costo de oportunidad del dinero no es 10%, ya que al elegir invertir en un proyecto se están dejando otros afuera, por lo que debiera ser la rentabilidad de esos proyectos la que se debe utilizar para pasar del año 1 al año 0 (comienzos del año 1). Ya que representan el verdadero costo de oportunidad del dinero.

Sin embargo, esa rentabilidad es sólo de ese año, ya que la restricción de capital está afectando el presente. Una herramienta que ha resultado útil para ilustrar el concepto es la TIR al primer año, la que se obtiene con:

$$VPN = F_0 + \frac{F_1}{1+TIR_{año1}} + \sum_{t=2}^{n} \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

Si calculamos este indicador para cada uno de los proyectos disponibles, tendremos la siguiente tabla:

Proyecto	Inv.	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	....	Inf.	VPN	TIR	IVAN	Inv. ac.	VPN ac.	$TIR_{año1}$
C	-50	10	10	120	15							67,8	50%	1,355	50	67,8	159%
G	-200	40	40	40	40	40	40	40	40	....	40	200,0	20%	1,000	250	267,8	120%
B	-20	2	2	2	46							16,4	30%	0,820	270	284,2	100%
J	-400	70	690									233,9	40%	0,585	670	518,0	74%
I	-270	50	100	100	100	100	125					134,2	24%	0,497	940	652,2	65%
E	-100			180								63,6	80%	0,636	1040	715,9	64%
A	-10	16										4,5	60%	0,455	1050	720,4	60%
F	-150	12	12	12	12	12	12	12	300			48,4	15%	0,322	1200	768,8	45%
H	-250	-30	40	100	200	100						29,6	13%	0,118	1450	798,4	23%
D	-70	78										0,9	11%	0,013	1520	799,3	11%

Vemos que ordenando los proyectos bajo este indicador se aceptan los proyectos C, G, B, J e I (se dejó el proyecto E); invirtiéndose 940 MM$ en proyectos y los restantes 60 MM$ en el costo de oportunidad, obteniéndose un VPN de la cartera igual a 652,2 MM$, superior a todos los casos anteriores en que los proyectos no eran divisibles.

Luego, en este caso particular, el costo de oportunidad del dinero es 65% para el primer año, por lo que todos los proyectos con VPN<0 evaluados a esa tasa el primer año y a r=10% para los siguientes, no se realizarán.

No debe olvidarse que es sólo un índice que ayuda a acercarse al óptimo, pero no necesariamente siempre lo logrará. Por ejemplo, si la restricción de capital es 800 MM$, entonces a través de este indicador se obtendrá 518 MM$, a través del IVAN se obtendrán 581,7 MM$, a través de la

TIR se obtendrán 385,2 MM$ y a través de hacer los proyectos con mayor VPN se obtendrá un VPN de la cartera igual a 433,9 MM$.

No olvidar que si el verdadero costo de oportunidad del dinero para el año 1 es 65%, entonces el criterio de la TIR del año 1 efectivamente elige todos aquellos proyectos con VPN>0, y los que deja afuera son por definición con VPN<0, sin embargo, la diferencia entre el capital disponible y la inversión destinadas a proyectos se invierte al “antiguo costo de oportunidad del dinero”: 10%. Lo que descontado a la tasa de 65% para el año 1 tiene VPN negativo, por lo que sacando algunos proyectos del ranking y cambiándolos por otros de menor TIR del año 1 pero con mayor inversión pueden mejorar el VPN total.

8. EVALUACIÓN DE PROYECTOS CON TIEMPO CONTINUO

Sea:

F_0: flujo instantáneo en el presente. Habitualmente, F_0=-Inversión<0.

T: tiempo, expresado en una unidad específica de medición.

F(t): flujo de caja de beneficios netos. Continuo y en función del tiempo.

r: costo de oportunidad del dinero asociado a la unidad de tiempo elegida.

Luego, el VPN del proyecto es:

$$VPN = F_0 + \int_{t=0}^{\infty} \frac{F(t)}{(1+r)^t} dt$$

Trabajar con $F(t)/(1+r)^t$ es complicado en tiempo continuo, ya que no es el fácilmente calculado a partir del valor de una serie.

Por ello buscamos una buena aproximación del factor de actualización que nos simplifique los cálculos casi sin perder exactitud en los resultados.

Recordemos que si dividimos el tiempo en n partes, entonces:

$$(1+r_n) = (1+r)^{\frac{1}{n}},$$

$$\text{Si n} = 12 \text{ ó n} = 365, \text{entonces:}$$

$$(1+r_{mensual}) = (1+r_{anual})^{\frac{1}{12}}$$

$$(1+r_{dia}) = (1+r_{anual})^{\frac{1}{365}}$$

Pero $(1+r)^{1/n}$ puede ser aproximada por un desarrollo en serie de Taylor de primer orden:

$$f(x)=x^{\frac{1}{n}},\ \mathrm{x}_0=1\ \mathrm{y}\ \Delta\mathrm{x}=\mathrm{r}$$

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)\Delta x+\frac{1}{2}f^{''}(x_0)\Delta x^2+....$$

$$(1+r)^{\frac{1}{n}}\cong 1^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}1^{\frac{1}{n}-1}r+\frac{1-n}{2n^2}1^{\frac{1}{n}-2}r^2+....$$

$$\cong 1+\frac{1}{n}r+\frac{1-n}{2n^2}r^2+....$$

Si n es grande la aproximación mejora. Además, despreciando del tercer término en adelante ya que $r^k\approx 0$ si r es pequeño:

$$(1+r)^{\frac{1}{n}}\cong 1+\frac{r}{n}$$

Por otra parte:

$$\frac{1}{(1+\mathrm{r})^{\mathrm{t}}}\cong\frac{1}{\left[Lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n\right]^{\mathrm{t}}}=\frac{1}{\left(e^r\right)^{\mathrm{t}}}=e^{-rt}$$

Luego, aplicando la aproximación del factor descuento al flujo continuo, se obtiene que:

$$VPN=F_0+\int_{t=0}^{\infty}F(t)e^{-rt}dt$$

¿Cómo se encontraría la inversión óptima? Si denominamos a I como la inversión, entonces:

$$VPN(I)=F_0(I)+\int_{t=0}^{\infty}F(t,I)e^{-rt}dt \qquad \partial/\partial \mathrm{I}$$

$$\frac{\partial VPN(I)}{\partial \mathrm{I}}=\frac{\partial F_0(I)}{\partial \mathrm{I}}+\int_{t=0}^{\infty}\frac{\partial F(t,I)}{\partial \mathrm{I}}e^{-rt}dt$$

El óptimo ocurre cuando $\delta VPN(I)/\delta I=0$ y $\delta^2 VPN(I)/\delta I^2<0$. Si $F_0(I)=-I$ (no hay préstamo), entonces:

$$\int_{t=0}^{\infty} \frac{\partial F(t,I)}{\partial \mathrm{I}} e^{-rt} dt = 1$$

¿Cómo calcular un BAUE con tiempo continuo?

$$VPN(T) = \int_{t=0}^{T} BAUE(T)\, e^{-rt} dt$$

$$= BAUE(T) \int_{t=0}^{T} e^{-rt} dt$$

$$= BAUE(T) \left[\frac{-e^{-rt}}{r} \right]_{t=0}^{t=T}$$

$$= \frac{BAUE(T)}{r} \left[1 - e^{-rT} \right]$$

$$\Rightarrow BAUE(T) = VPN(T) \frac{r}{\left[1 - e^{-rT} \right]}, \textit{ el factor que multiplica al VPN(T)}$$

es como 1*/FRC del caso continuo.*

El BAUE(T) es máximo cuando: $\delta BAUE(T)/\delta T=0$ y $\delta^2 BAUE(T)/\delta T^2<0$