Notas Sobre Macroeconomía Dinámica

Raphael Bergoeing
Centro de Economía Aplicada
Universidad de Chile

Septiembre, 2001

Estas notas han sido escritas utilizando numeroso material de otros autores. En especial, de las clases de macroeconomía dictadas en el doctorado en economía de la Universidad de Minnesota por Timothy J. Kehoe, Edward Prescott y Manuel Santos. En la discusión sobre modelos de equilibrio general dinámicos, se ha utilizado material incluido en las notas de clases de Dirk Krueger de la Universidad de Stanford, y del texto *Macroeconomía Intermedia* de J.M. da Rocha, E. Giménez y F. Lores que recopila los apuntes de clases impartidos en cursos de macroeconomía de pregrado y de posgrado en la Universidad de Vigo. En los capítulos relacionados con crecimiento y ciclos, se ha utilizado, además, el documento docente D-5, *Notas sobre crecimiento y ciclos económicos* del programa de postgrado en economía ILADES-Georgetwon University, publicado por Carlos Urrutia.

Índice General

Capítulo 1

Equilibrio General Dinámico

En este primer capítulo estudiaremos algunas de las herramientas básicas del equilibrio general dinámico. En particular, discutiremos las propiedades de modelos en los que los individuos viven eternamente. Luego, demostraremos que los equilibrios que surgen en economías en las que el intercambio se produce de manera secuencial son equivalentes a los equilibrios que surgen en economías del tipo Arrow-Debreu. En estas economías, en general, la conexión entre los equilibrios competitivos y los equilibrios Pareto óptimos puede ser fácilmente demostrada. Utilizaremos esta conexión para calcular el (los) equilibrio (s). Luego, desarrollaremos un modelo dinámico alternativo en el que los agentes vivirán un número finito de períodos, en cada uno de los cuales nuevas generaciones nacerán. Estos modelos, llamados de generaciones traslapadas, pueden ser interpretados como los modelos en que los agentes viven eternamente.

1.1 Equilibrio y Optimalidad

En lo que sigue estudiaremos la existencia y propiedades de equilibrios en una economía con intercambio puro, es decir, en la que no existe producción ni almacenamiento. En este contexto, el único bien disponible será intercambiado intertemporalmente por los agentes (que existen en un número finito). Asumiremos que estos viven eternamente, por lo que deberán decidir una senda de consumo que tendrá dimensión infinita. El modelo utilizado será de equilibrio general, por lo que las decisiones se tomarán de manera conjunta y consistente. Además, asumiremos que los agentes tienen expectativas racionales, es decir, que no cometen errores sistemáticos. En un contexto con toda la información públicamente disponible (sin incertidumbre) los agentes tendrán previsión perfecta.

1.1.1 Principios Generales para Especificar un Modelo

Un modelo económico de equilibrio general consiste en distintos tipos de individuos que optimizan, es decir, toman decisiones sujetos a restricciones. Al plantear un modelo, es esencial especificar al menos cuatro elementos: los individuos del modelo, el tipo de decisiones que adoptan, las restricciones que enfrentan y la información que poseen. En general, los modelos tienen tres tipos de tomadores de decisiones:

1. Familias: Debemos especificar las preferencias con respecto a los bienes y las dotaciones de estos bienes. Tipicamente asumimos que las familias maximizan preferencias sujetas a una restricción presupuestaria. El resultado de este problema de optimización es una asignación formada por un vector de consumo de bienes y ocio, en el que cada elemento depende de las dotaciones y precios de mercado.

2. Firmas: Debemos especificar la tecnología disponible. Típicamente asumimos que las firmas maximizan beneficios sujetas a que sus planes de producción sean tecnológicamente factibles. El resultado de este problema de optimización es una asignación formada por un vector de producción y consumo de factores productivos, en el que cada elemento depende de los precios de mercado de los insumos.

3. Gobierno: Debemos especificar los instrumentos de política (impuestos, oferta monetaria, etc.) que el gobierno controla. Si analizamos al gobierno desde una perspectiva positiva, asumiremos las políticas del gobierno como dadas. Si lo hacemos desde una perspectiva normativa, asumiremos una función objetivo para el gobierno (por ejemplo, el bienestar social) que este maximizará con respecto a distintas políticas, sujeto a su restricción presupuestaria.

El concepto de equilibrio debe ser claramente especificado puesto que debemos determinar el tipo de interacción en que los distintos agentes se involucran. Por ejemplo, es necesario saber que supuestos se imponen con respecto a cómo perciben los agentes su capacidad para controlar precios. En general, asumiremos que la interacción es de mercado y que los agentes toman los precios como dados al adoptar sus decisiones.

1.1.2 Un Modelo Dinámico Sencillo

El modelo que desarrollaremos es este capítulo tiene las siguientes propiedades:

- Los equilibrios son Pareto óptimos.
- Existe un número finito y locamente únicos de equilibrios.
- El dinero externo no afecta el equilibrio.

Este modelo es típicamente utilizado para estudiar problemas relacionados con crecimiento y con fluctuaciones. Más adelante analizaremos una economía en la que existe un número infinito de agentes que viven finitamente (modelo de generaciones traslapadas). Veremos que esta economía presenta propiedades distintas al modelo con agentes eternos. En particular, tendrá un continuo de equilibrios, algunos de los cuales no serán eficientes, y el dinero externo afectará la optimalidad.

En lo que sigue presentamos una versión sencilla de un modelo dinámico de equilibrio general microfundado[1]. Asumiremos que el tiempo es discreto e indexado por $t = 0, 1, 2, ...$[2]. En cada período existe un sólo bien que no se produce ni almacena. Debemos asumir que existe un número finito de consumidores (de lo contrario, como veremos más adelante, no podremos demostrar el Primer Teorema del Bienestar). Denotaremos como c_t^i al consumo en el período t del individuo i. No habrá gobierno. Asumiremos, además, que las preferencias son estacionarias y las denotaremos por una función $u(c_t^i)$, continua, estrictamente cóncava y continuamente diferenciable de segundo orden[3]. Además, las dotaciones expresadas en unidades del bien de consumo denotadas por e_t^i también serán estacionarias.
En particular, para simplificar la resolución y cómputo del equilibrio y la demostración del Primer Teorema del Bienestar, asumamos que $i = 2$, que $u(c_t^i) = \ln(c_t^i)$, y que el vector de dotaciones está dado por $e^i = \{e_t^i\}_{t=0}^{\infty}$ con e_t^1 igual a 2 si t es par e igual a 0 si t es impar y con e_t^2 igual a 0 si t es par e igual a 2 si t es impar[4].
En este contexto, las preferencias sobre consumo de cada individuo estarán representadas por la función de utilidad

$$U(.) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t^i)$$

en donde $\beta \equiv \frac{1}{1+\rho} \in (0, 1)$ es el factor de descuento y ρ es la tasa de descuento subjetiva.
Este modelo puede ser interpretado de dos formas diferentes: en la primera interpretación existe un sistema completo de mercados de futuros que permite realizar todas las transacciones en el período inicial, es decir, en $t = 0$. En esta economía, conocida como Arrow-Debreu, los bienes son diferentes en función de la fecha en la que se producirá el intercambio; en la segunda interpretación, las decisiones de los consumidores son adoptadas de manera secuencial, es decir, período a período. En este contexto los precios son del tipo spot.

1.1.3 El Equilibrio Arrow-Debreu

En este equilibrio, en el período 0, antes que las dotaciones sean recibidas y que los consumos se hayan realizado, los dos agentes se reúnen en un mercado central e intercambian todos los bienes, es decir, intercambian el consumo para todas las fechas futuras. Denotaremos

[1] Los modelos que utilizaremos en estas notas tendrán la característica común de ser microfundados, es decir, los equilibrios que surjan de estos modelos serán resultado de procesos de optimización enfrentados por los agentes.

[2] También podríamos asumir que el tiempo es continuo y analizar los equilibrios gráficamente. Sin embargo, dos razones justifican nuestro supuesto: primero, los datos están disponibles de manera discreta; segundo, los equilibrios serán típicamente obtenidos mediante el uso de métodos numéricos. Estos requieren que especifiquemos el tiempo de manera discreta.

[3] Estos supuestos combinados con un set de restricción presupuestaria compacto (en un espacio euclideanos esta propiedad está garantizada por el hecho que el set es cerrado y acotado) garantizan la existencia y unicidad de una solución en el problema que resuelven los consumidores.

[4] Este modelo sólo diferencia a los individuos por su dotación de recursos. La versión de este modelo con un número grande de individuos y en el que las dotaciones son idénticas entre ellos es conocida como Modelo de Agente Representativo.

con p_t el precio en el período 0 de una unidad de consumo entregada en el período t. En los períodos siguientes, lo único que ocurre es que los agentes se encuentran en el mercado central y entregan los bienes de consumo que acordaron en el período inicial[5].

Definición 1
Una asignación es una secuencia $(c^1, c^2) = \{(c^1_t, c^2_t)\}_{t=0}^{\infty}$ *de consumo en cada período para cada individuo.*

En este contexto, la definición del equilibrio está dada por:

Definición 2
En esta economía, un Equilibrio Competitivo Arrow-Debreu es un vector de precios $\{\hat{p}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *y asignaciones* $(\{\hat{c}^i_t\}_{t=0}^{\infty})_{i=1,2}$ *tales que,*

1. *Se resuelve el Problema del Consumidor.*
   Dado $\{\hat{p}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *para* $i = 1, 2$, $\{\hat{c}^i_t\}_{t=0}^{\infty}$ *resuelve*

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c^i_t) \\ s.a \quad & \\ & \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t c^i_t = \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t e^i_t \\ & c^i_t \geq 0 \qquad \forall t \end{aligned} \tag{1.1}$$

2. *Condición de Factibilidad.*
   Para $i = 1, 2$, $\{\hat{c}^i_t\}_{t=0}^{\infty}$ *satisface*

$$\hat{c}^1_t + \hat{c}^2_t = e^1_t + e^2_t \qquad \forall t \tag{1.2}$$

Nótese que, en el problema 1.2, debido a que las preferencias son monotónicamente crecientes, imponemos la restricción presupuestaria con igualdad y, debido a que no hay libre disponibilidad de bienes, imponemos que la condición de factibilidad sea una ecuación. Además, hemos asumido implícitamente que las dotaciones de cada bien son finitas para asegurar la existencia de un equilibrio[6]. Podemos señalar también que con estas preferencias el equilibrio será interior, es decir, el vector de asignaciones tendrá solo componentes estrictamente positivos y finitos[7]. Además, el equilibrio será único. Por último, nótese que las cantidades de equilibrio sólo aparecen en la condición de factibilidad, descrita por la ecuación 1.2.

[5] Asumimos que podemos exigir perfectamente todos los contratos acordados en el período inicial.

[6] Como ya fue dicho, además, si la dotación agregada de recursos es finita podemos demostrar que el Primer Teorema del Bienestar se cumple. En esta economía, esto ocurre debido a que ambos, la dotación de cada bien y el número de individuos, son finitos en cada período.

[7] El consumo será estrictamente positivo y finito debido a que la función logarítmica satisface las condiciones de Inada, es decir, $\lim_{c\to 0} u'(c) = \infty$ y $\lim_{c\to\infty} u'(c) = 0$.

1.1.4 Resolviendo el Equilibrio Arrow-Debreu

Primero resolveremos el problema del consumidor i. Dada la senda de precios $\{p_t\}_{t=0}^{\infty}$, las asignaciones $\{c^i_t\}_{t=0}^{\infty}$ deben cumplir con las condiciones de primer orden (que en este caso son necesarias y suficientes debido a la concavidad de la función de utilidad) que surgen del Langrangiano del problema

$$L(\cdot) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c^i_t) + \lambda_i \left[\sum_{t=0}^{\infty} p_t e^i_t - \sum_{t=0}^{\infty} p_t c^i_t \right]$$

Derivando con respecto a c^i_t y con respecto a c^i_{t+1}, tenemos que

$$\frac{\beta^t}{c^i_t} = \lambda_i p_t \tag{1.3}$$

$$\frac{\beta^{t+1}}{c^i_{t+1}} = \lambda_i p_{t+1} \tag{1.4}$$

Las ecuaciones 1.3 y 1.4 implican que

$$p_{t+1} c^i_{t+1} = \beta p_t c^i_t \qquad \forall t \tag{1.5}$$

para $i = 1, 2$.
La ecuación 1.5, en conjunto con la restricción presupuestaria pueden ser utilizadas para obtener la secuencia óptima de consumo de la familia i como una función de la secuencia infinita de precios y dotaciones. Para obtener los precios de equilibrio, debemos combinar además la condición de factibilidad (demanda igual oferta) y las funciones de consumo anteriores. Es decir,

$$c^1_t(\{p_t\}_{t=0}^{\infty}) + c^2_t(\{p_t\}_{t=0}^{\infty}) = e^1_t + e^2_t \qquad \forall t \tag{1.6}$$

La ecuación 1.6 debe cumplirse para cada período (y por lo tanto es un sistema con infinitas ecuaciones). Además, tenemos un número infinito de incógnitas $\{p_t\}_{t=0}^{\infty}$, lo que dificulta la solución del problema. Kehoe(1989) muestra como resolver este tipo de problemas utilizando el método de Negishi.
En el caso de nuestro ejemplo, sin embargo, es fácil encontrar una solución debido a que las dotaciones iniciales son estacionarias. Sumando la ecuación 1.5 entre agentes, obtenemos

$$p_{t+1}(c^1_{t+1} + c^2_{t+1}) = \beta p_t (c^1_t + c^2_t)$$

Utilizando la condición de factibilidad, tenemos que

$$p_{t+1}(e^1_{t+1} + e^2_{t+1}) = \beta p_t (e^1_t + e^2_t)$$

y, por lo tanto

$$p_{t+1} = \beta p_t \tag{1.7}$$

Los precios de equilibrio, dados por la ecuación 1.7, deben satisfacer

$$p_t = \beta^t p_0 \tag{1.8}$$

Sin pérdida de generalidad podemos utilizar el precio del consumo en el período 0 como numerario, es decir, imponer en la ecuación 1.8 que $p_0 = 1$.[8] Entonces, los precios de equilibrio tienen que satisfacer

$$\hat{p}_t = \beta^t$$

de modo que, con $\beta < 1$, el precio en el período 0 del consumo en el período t es menor que el precio en el período 0 del consumo en el período 0. Esto refleja la impaciencia de los consumidores.
Utilizando nuevamente la ecuación 1.5 notamos que para todo t, $c^i_{t+1} = c^i_t = c^i_0$. Los agentes suavizan consumo a través del tiempo debido a que sus preferencias son convexas (la función de utilidad es estríctamente cóncava). Entonces, incorporando este resultado en la restricción presupuestaria, el valor del consumo para toda la vida está dado por

$$\sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t c^i_t = c^i_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t = \frac{c^i_0}{1-\beta} \qquad \text{para } i = 1, 2. \tag{1.9}$$

El agente 1 tiene un ingreso para toda la vida dado por

$$\sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t e^1_t = 2 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t} = \frac{2}{1-\beta^2} \tag{1.10}$$

y el agente 2 tiene un ingreso dado por[9]

$$\sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t e^2_t = 2\beta \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t} = \frac{2\beta}{1-\beta^2} \tag{1.11}$$

Entonces, de las ecuaciones 1.9-1.11, obtenemos que la asignación de equilibrio está dada por

$$\hat{c}^1_t = \hat{c}^1_0 = (1-\beta)\frac{2}{1-\beta^2} = \frac{2}{1+\beta} > 1 \tag{1.12}$$

$$\hat{c}^2_t = \hat{c}^2_0 = (1-\beta)\frac{2\beta}{1-\beta^2} = \frac{2\beta}{1+\beta} < 1 \tag{1.13}$$

[8] Si multiplicamos todos los precios por $\gamma > 0$ la restricción presupuestaria de los agentes no cambia, de modo tal que si los precios $\{p_t\}_{t=0}^{\infty}$ y las asignaciones $(\{c^i_t\}_{t=0}^{\infty})_{i=1,2}$ son un equilibrio Arrow-Debreu, también lo son los precios $\{\gamma p_t\}_{t=0}^{\infty}$ y las asignaciones $(\{c^i_t\}_{t=0}^{\infty})_{i=1,2}$. Esta propiedad de las funciones de demanda, conocida como homogeneidad de grado cero en precios implica que el equilibrio es único para cualquier vector de precios.

[9] En economías de dimensión infinita, la riqueza de cada agente debe ser finita (estar acotada) para permitir la existencia de un equilibrio. De lo contrario, el problema del consumidor no existiría.

En las ecuaciones 1.12 y 1.13 vemos que por tener una dotación mayor en el primer período, el agente 1 puede consumir durante toda su vida más que el agente 2. Pese a ello, nótese que ambos agentes se benefician por participar en el mercado, es decir, el intercambio es mutuamente beneficioso. Si no lo hicieran, recibirían una utilidad para toda la vida dada por $U(e^i_t) = -\infty$ mientras que, con comercio, obtienen

$$\begin{aligned} U(\hat{c}^1_t) &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(\frac{2}{1+\beta}) = \frac{\ln(\frac{2}{1+\beta})}{1-\beta} > 0 \\ U(\hat{c}^2_t) &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(\frac{2\beta}{1+\beta}) = \frac{\ln(\frac{2\beta}{1+\beta})}{1-\beta} < 0 \end{aligned}$$

En la próxima sección demostramos que participando en el mercado, ambos agentes no sólo están mejor que no haciéndolo, pero además, que en un sentido específico, la asignación de equilibrio descentralizada es socialmente óptima.

1.1.5 Optimalidad Paretiana

En esta sección demostraremos que un equilibrio competitivo es socialmente óptimo, es decir, que las asignaciones encontradas en el problema descentralizado resuelven el problema del consumidor y satisfacen la condición de factibilidad. Para ello, utilizaremos el concepto de optimalidad paretiana. En términos generales, una asignación es Pareto óptima si no existe otra asignación factible que permita mejorar al menos a un individuo sin empeorar a otro.

Definición 3
Una asignación $\{\hat{c}^1_t, \hat{c}^2_t\}_{t=0}^{\infty}$ *es Pareto Optima si es factible y si no hay otra asignación factible* $\{\tilde{c}^1_t, \tilde{c}^2_t)_{t=0}^{\infty}\}$ *tal que*

$$\begin{aligned} U(\tilde{c}^i) &\geq U(\hat{c}^i) \qquad \forall i = 1, 2 \\ U(\tilde{c}^i) &> U(\hat{c}^i) \qquad \textit{para al menos un } i = 1, 2 \end{aligned}$$

Nótese que el concepto de Pareto optimalidad no tiene ninguna relación con el concepto de justicia en términos de distribución de ingresos puesto que una asignación que concentra el consumo en un sólo individuo dejando al otro sin consumo es también socialmente óptima en este sentido.

Proposición 1
Deje que $(\{\hat{c}^i_t\}_{t=0}^{\infty})_{i=1,2}$ *sea una asignación de equilibrio competitivo. Entonces,* $(\{\hat{c}^i_t\}_{t=0}^{\infty})_{i=1,2}$ *es Pareto óptima.*

Prueba: La prueba será por contradicción.
Suponga que $(\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^{\infty})_{i=1,2}$ no es Pareto óptimo. Entonces, por definición de Pareto eficiencia hay otra asignación factible $(\{\tilde{c}_t^i\}_{t=0}^{\infty})_{i=1,2}$ tal que

$$\begin{aligned} U(\tilde{c}^i) &\geq U(\hat{c}^i) \qquad \forall i = 1,2 \\ U(\tilde{c}^i) &> U(\hat{c}^i) \qquad \text{para al menos un } i = 1,2 \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad asumamos que la desigualdad se cumple para $i = 1$.
Primero, nótese que, necesariamente

$$\sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t \tilde{c}_t^1 > \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t \hat{c}_t^1$$

de lo contrario, la asignación $\{\hat{c}_t^1\}_{t=0}^{\infty}$ no sería de equilibrio (es decir, no maximizaría la utilidad del agente 1 dados los precios de equilibrio) puesto que $\{\tilde{c}_t^1\}_{t=0}^{\infty}$ sería alcanzable presupuestariamente y es, por supuesto, preferida por el agente 1.
Además,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t \tilde{c}_t^2 \geq \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t \hat{c}_t^2 \tag{1.14}$$

de lo contrario, existiría un $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t \tilde{c}_t^2 + \delta \leq \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t \hat{c}_t^2 \tag{1.15}$$

y definiendo $\hat{p}_t \tilde{c}_t^2 + \delta \equiv \hat{p}_t \overline{c}_t^2$, esta nueva asignación sería más barata que las otras y estrictamente preferida, lo que nuevamente no puede ocurrir ya que en ese caso la asignación $\{\hat{c}_t^1\}_{t=0}^{\infty}$ no sería de equilibrio.
Entonces, sumando las desigualdades 1.14 y 1.15, tenemos que[10]

$$\sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t (\tilde{c}_t^1 + \tilde{c}_t^2) > \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t (\hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2)$$

Sin embargo, debido a que ambas asignaciones son factibles,

$$\tilde{c}_t^1 + \tilde{c}_t^2 = e_t^1 + e_t^2 = \hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2 \qquad \forall t$$

y por lo tanto,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t (e_t^1 + e_t^2) > \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t (e_t^1 + e_t^2)$$

[10] Nótese que esta prueba requiere que el número de agentes sea finito.

que es una contradicción. ■

Supondremos que existe un planificador social que busca maximizar la suma ponderada del bienestar individual de cada agente sujeto a la restricción de factibilidad de la economía. Este problema no involucra precios. En general, aplicaremos esta técnica para generar de manera sencilla los equilibrios[11]. Es decir, un asignación es Pareto eficiente si resuelve el problema general con n agentes

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U(c^i) \\ \text{s.a} \quad & \\ & c_t^i \geq 0 \qquad \forall t \\ & \sum_{i=1}^{n} c_t^i = \textstyle\sum_{i=1}^{n} e_t^i \qquad \forall t \end{aligned} \tag{1.16}$$

para ponderaciones paretianas $\alpha_i \in (0,1)$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Tarea 1: Demuestre que, para una función de utilidad general, la solución al problema 1.16 es un óptimo de Pareto.
En el caso de la economía utilizada en esta sección, es decir, con $n = 2$, y $U(c^i) = \ln(c^i)$, las condiciones de primer orden del problema 1.16 están dadas por

$$\frac{\alpha \beta^t}{c_t^1} = \pi_t \qquad \text{y} \tag{1.17}$$

$$\frac{(1-\alpha)\beta^t}{c_t^2} = \pi_t \qquad \forall t \tag{1.18}$$

en donde π_t es el multiplicador de Lagrange.
Comparando las ecuaciones de primer orden dadas por 1.17 y 1.18, con aquellas que surgen del equilibrio competitivo (ver las ecuaciones 1.3 y 1.4), podemos señalar que:

1. Se cumple el primer teorema del bienestar. De hecho, si $\alpha = \frac{1}{\lambda_1}$ y $(1-\alpha) = \frac{1}{\lambda_2}$ el equilibrio competitivo es un óptimo paretiano.

2. Se cumple el Segundo Teorema del Bienestar. Cualquier asignación eficiente puede implementarse como un equilibrio competitivo con transferencias. De hecho, toda asignación que resuelva el problema paretiano 1.16, es también una solución al problema del consumidor 1.2, si los precios de los bienes son los multiplicadores π_t y si se compensa a

[11] Esta técnica es conocida como el método de Negishi, descrito en Kehoe (1989), y ofrece un algoritmo para computar todos las asignaciones Pareto óptimas y separar aquellas que son de hecho un equilibrio competitivo.

los consumidores con una transferencia $t_i(\alpha)$ para asegurar que la asignación paretiana satisfaga la restricción presupuestaria, tal que

$$t_i(\alpha) = \sum_{t=0}^{\infty} \pi_t(\alpha)[c_t^i(\alpha) - e^i] \tag{1.19}$$

Nótese que de esta forma podemos resolver el equilibrio competitivo que originalmente tiene infinitas ecuaciones, por medio de un sistema finito de ecuaciones (una para cada agente i dada por la ecuación 1.19). Para ello, basta con resolver para cada agente el problema

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i) \\ \text{s.a} \quad & \\ & \sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i + t_i(\alpha) \\ & c_t^i \geq 0 \qquad \forall t \end{aligned}$$

de manera tal que cuando $t_i(\alpha) = 0$, la asignación eficiente coincide con el equilibrio competitivo original.

Tarea 2: Considere un modelo simple de intercambio puro con tres consumidores de vida infinita. Cada consumidor $i = 1, 2, 3$, tiene una función de utilidad de la forma

$$u_i(c_t^i) = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \ln(c_t^i)$$

en donde $1 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < 0$. Suponga que los consumidores 1 y 2 tienen una dotación de 1 unidad del único bien en cada período y que el consumidor 3 tiene dos unidades en cada período.

1. Encuentre las funciones de exceso de demanda para cada consumidor. Escriba las condiciones de equilibrio haciendo que las funciones de exceso de demanda sean iguales a cero.

2. Resuelva el problema de Pareto para este modelo; es decir, maximice la suma ponderada $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ sujeta a las condiciones de factibilidad.

3. Encuentre los pagos de transferencias necesarias para implementar las asignaciones eficientes como equilibrios competitivos. Demuestre que estos pagos son homogéneos de grado uno como función de los ponderadores de la utilidad $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y que suman cero. Interprete estas propiedades.

4. Encuentre el único equilibrio competitivo en esta economía.

1.1.6 El equilibrio Secuencial

Un mundo en el que los agentes se reúnen para intercambiar derechos por todo consumo futuro en el período inicial resulta empíricamente inconsistente. En lo que sigue desarrollaremos una versión de la economía con agentes eternos en la que el intercambio se realiza período a período. Veremos que el equilibrio en el que los agentes intercambian bienes de consumo y bonos por un período es equivalente al equilibrio que surge de un mundo Arrow-Debreu.
En esta interpretación del modelo con agentes eternos, que llamaremos de mercados secuenciales, los mercados por consumo y por activos abrirén cada período. Asumimos que hay mercados completos y expectativas racionales. El primer supuesto implica que los consumidores pueden prestar y pedir prestado tanto como deseen a una tasa de interés competitivamente determinada. El segundo supuesto se traduce en que los agentes tienen previsión perfecta.
Denotemos r_{t+1} como la tasa de interés de bonos a un período entre t y $t+1$. Un bono por un período es un contrato que especifica el pago de una unidad del bien en el período $t+1$ en intercambio por $\frac{1}{1+r_{t+1}}$ unidades del bien de consumo en el período t. Es decir, $q_t \equiv \frac{1}{1+r_{t+1}}$ es el precio relativo (*spot*) de una unidad de consumo en $t+1$ en términos de una unidad de consumo en el período t. Por último, denotemos con $a_{t+1}^i > 0$ la cantidad de bonos comprados por el agente i en el período t y trasladados al período $t+1$[12]. En este contexto, y dado que hemos implíticitamente normalizado el precio del bien de consumo en cada período t, la restricción presupuestaria del consumidor está dada por

$$c_t + q_t a_{t+1}^i \leq e_t^i + a_t^i$$

Definición 4
En esta economía, un Equilibrio Competitivo con Mercados Secuenciales es una asignación $\{(\hat{c}_t^i, \hat{a}_{t+1}^i)_{i=1,2}\}_{t=0}^{\infty}$, *y precios spot* $\{\hat{q}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *tales que*

1. *Se resuelve el Problema del Consumidor.*
   Dado $\{\hat{q}_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{(\hat{c}_t^i, \hat{a}_{t+1}^i)_{i=1,2}\}_{t=0}^{\infty}$ *resuelve*

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t^i) \\ s.a. \quad & \\ & c_t + q_t a_{t+1}^i \leq e_t^i + a_t^i && (1.20) \\ & c_t^i \geq 0 \\ & a_{t+1}^i \geq -\overline{A}_i \qquad \forall t && (1.21) \end{aligned}$$

2. *Condición de Factibilidad.*

[12] Si $a_{t+1}^i < 0$, el agente ha asumido una deuda en el período t.

Para todo t, $\{(\hat{c}_t^i, \hat{a}_{t+1}^i)_{i=1,2}\}_{t=0}^{\infty}$ *satisface*

$$\begin{aligned} \hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2 &= e_t^1 + e_t^2 \quad (1.22) \\ \hat{a}_{t+1}^1 + \hat{a}_{t+1}^2 &= 0 \quad (1.23) \end{aligned}$$

La restricción representada por la ecuación 1.21 es necesaria para garantizar la existencia de un equilibrio. Si la deuda no estuviese acotada superiormente, el agente siempre preferiría pagar su deuda anterior con nueva deuda y toda asignación sería dominada por otra con mayor deuda. Un esquema en el que se contrae deuda para pagar la deuda anterior es conocido como Esquema de Ponzi.
Es importante destacar que la restricción al acceso de deuda no será relevante en esta economía. Si existiera restricción de liquidez, el equilibrio alcanzado sería diferente y la equivalencia entre una economía del tipo Arrow-Debreu y una secuencial no sería válida. En lo que sigue demostramos esta equivalencia en este entorno.

Proposición 2
Sean la asignación $\{(\hat{c}_t^i)_{i=1,2}\}_{t=0}^{\infty}$ *y precios* $\{\hat{p}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *un equilibrio competitivo Arrow-Debreu, entonces, existe un* $(\overline{A}_i)_{i=1,2}$ *y un equilibrio competitivo con mercados secuenciales con asignaciones* $\{(\tilde{c}_t^i, \tilde{a}_{t+1}^i)_{i=1,2}\}_{t=0}^{\infty}$ *y precios spot* $\{\tilde{q}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *tales que*

$$\hat{c}_t^i = \tilde{c}_t^i \ \forall i \ y \ \forall t.$$

Igualmente, sean las asignaciones $\{(\hat{c}_t^i, \hat{a}_{t+1}^i)_{i=1,2}\}_{t=0}^{\infty}$ *y precios spot* $\{\hat{q}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *un equilibrio secuencial tal que satisfazgan*

$$\hat{a}_{t+1}^i > -\overline{A}_i \ \text{para todo } i \text{ y para todo } t$$

y con precios spot finitos y estrictamente positivos. Entonces, hay un equilibrio Arrow-Debreu $\{(\check{c}_t^i)_{i=1,2}\}_{t=0}^{\infty}$, $\{\tilde{p}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *tales que*

$$\check{c}_t^i = \hat{c}_t^i \ \text{para todo } i \text{ y para todo } t.$$

Prueba: La prueba de la segunda parte de la proposición será por construcción.
Para probar esta proposición demostraremos que las restricciones presupuestarias son equivalents en ambos casos. Por ejemplo, y con relación a la segunda parte de la proposición anterior, es decir, a que un equilibrio secuencial es también un equilibrio Arrow-Debreu, normalicemos el precio Arrow-Debreu en el período inicial y definamos la tasa de interés como[13]

$$1 + \hat{r}_{t+1} \equiv \frac{1}{\hat{q}_t} = \frac{\hat{p}_t}{\hat{p}_{t+1}} \quad (1.24)$$

[13] Nótese que el retorno del activo (que puede ser interpretado como dinero sin respaldo) es igual al inverso de la inflación, es decir, $1 + r_{t+1} = \frac{p_t}{p_{t+1}} = \frac{1}{1+\pi_t}$, en donde π_t es la tasa de inflación. Por lo tanto, $(1 + r_{t+1})(1 + \pi_t) = 1$ y $r_{t+1} \simeq -\pi_t$. Es decir, el retorno real del dinero es igual al opuesto de la tasa de inflación.

Entonces, podemos manipular la restricción presupuestaria secuencial, dada por 1.20, utilizando directamente las tasas de interés, tal como se define en la ecuación 1.24, de manera tal que

$$\begin{aligned} c_0^i + \frac{a_1^i}{1+\hat{r}_1} &= e_0^i \\ c_1^i + \frac{a_2^i}{1+\hat{r}_2} &= e_1^i + a_1^i \quad (1.25) \\ &\vdots \\ c_t^i + \frac{a_{t+1}^i}{1+\hat{r}_{t+1}} &= e_t^i + a_t^i \quad (1.26) \end{aligned}$$

Substituyendo en 1.25 la segunda ecuación en la primera y sumando a través del tiempo, tenemos que

$$c_0^i + \frac{c_1^i}{1+\hat{r}_1} + \frac{a_2^i}{(1+\hat{r}_1)(1+\hat{r}_2)} = e_0^i + \frac{e_1^i}{(1+\hat{r}_1)(1+\hat{r}_2)}$$

y repitiendo T veces el ejercicio obtenemos

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{c_t^i}{\prod_{j=1}^{t}(1+\hat{r}_j)} + \frac{a_{T+1}^i}{\prod_{j=1}^{T+1}(1+\hat{r}_j)} = \sum_{t=0}^{T} \frac{e_t^i}{\prod_{j=1}^{t}(1+\hat{r}_j)} \quad (1.27)$$

Además, nótese que

$$\prod_{j=1}^{t}(1+\hat{r}_j) = \frac{1}{\hat{p}_1} \cdot \frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_2} \cdot \ldots\ldots \cdot \frac{\hat{p}_{t-1}}{\hat{p}_t} = \frac{1}{\hat{p}_t} \quad (1.28)$$

e imponiendo límites en la ecuación 1.27,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t c_t^i + \lim_{T\to\infty} \frac{a_{T+1}^i}{\prod_{j=1}^{T+1}(1+\hat{r}_j)} = \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t e_t^i$$

Entonces, dada la condición de transversalidad que asegura que cuando $T \to \infty$ el valor de la deuda es cero (el denominador tiende a infinito y el numerador está acotado),

$$\sum_{t=0}^{T} \hat{p}_t c_t^i = \sum_{t=0}^{T} \hat{p}_t e_t^i$$

que implica que un equilibrio secuencial es un equilibrio Arrow-Debreu. ■

Tarea 3: Demuestre la primera parte de la proposición anterior, es decir, que un equilibrio Arrow-Debreu es también un equilibrio secuencial.

Nótese que la equivalencia entre el equilibrio generado por un modelo Arrow-Debreu y aquel que surge de un modelo secuencial implica que, en una economía con agentes eternos, el dinero externo no afecta el equilibrio.

Proposición 3
En una economía con agentes que viven eternamente como la descrita anteriormente, el dinero sin respaldo no afecta el equilibrio.

Prueba: Para probar esta proposición basta con interpretar el activo a^i_{t+1} como dinero sin respaldo de manera tal que podemos definir la demanda agregada por dinero en la economía como

$$m_t = a^1_{t+1} + a^2_{t+1} = 0$$

tal como fue asumido en las condiciones de factibilidad de la Definición 4, dadas por las ecuaciones 1.22 y 1.23. De lo contrario, si $m_t \neq 0$, el valor de las cantidades demandadas superaría al valor de las dotaciones. Formalmente, supongamos que existe un equilibrio tal que cada consumidor debe satisfacer

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t c^i_t = \sum_{t=0}^{\infty} p_t e^i_t + a^i \tag{1.29}$$

en donde

$$m = a^1 + a^2 \neq 0$$

Nótese que si $m = 0$ pero $a^i \neq 0$ en la ecuación 1.29, tenemos simplemente un equilibrio con transferencias.
Interpretemos entonces m como dinero externo (es decir, sin respaldo). Sumando la restricción presupuestaria 1.29 para ambos consumidores,

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{\infty} p_t c^i_t = \sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{\infty} p_t e^i_t + m \tag{1.30}$$

Sin embargo, la ecuación 1.30 contradice la condición de equilibrio en el mercado de los bienes que exige

$$\sum_{i=1}^{2} c^i_t = \sum_{i=1}^{2} e^i_t$$

y que, multiplicada por precios y sumada través del tiempo, está dada por

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{\infty} p_t c^i_t = \sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{\infty} p_t e^i_t$$

Por lo tanto, $m = 0$. ■

1.2 El Modelo de Generaciones Traslapadas

En la sección anterior discutimos las propiedades de un modelo con un número finito de agentes eternos. En esta sección presentamos el modelo de Generaciones Traslapadas, en el que un número infinito de agentes vive finitamente. Los primeros trabajos desarrollados en este contexto fueron realizados por Allais (1947), Samuelson (1958) y Diamond (1965).
Como demostraremos más adelante, este modelo tiene tres propiedades que lo diferencian de un modelo con agentes infinitos. En particular:

1. Los equilibrios competitivos pueden ser ineficientes
2. El dinero externo puede tener un rol en el equilibrio
3. Puede haber un continuo de equilibrios

El modelo de generaciones traslapadas es una especificación interesante no sólo por tener propiedades distintas a las observadas en un modelo con agentes infinitos. En general, esta estructura es útil para discutir preguntas relacionadas con el ciclo de vida. Por ejemplo, con relación a los sistemas de seguridad social, al impacto de impuestos en los planes de retiro, o al efecto del ahorro en la acumulación de capital.
En lo que sigue desarrollamos una versión simple de este modelo, presentamos un algoritmo para resolver sus equilibrios, y demostramos que algunos de estos equilibrios pueden no ser eficientes y contener dinero externo.

1.2.1 Descripción del Modelo

El modelo que utilizaremos es una versión simple de una economía en la que los agentes viven un número finito de períodos. En particular, supondremos que el tiempo es discreto y representado por $t = 1, 2, 3, ...$ y que la economía existe de manera eterna. Los individuos, sin embargo, vivirán sólo dos períodos. En cada período, una nueva generación (con medida 1) nacerá y permanecerá viva durante dos períodos[14]. Nos referiremos a estas generaciones a través del tiempo como joven y adulta. El consumo del único bien disponible - y no almacenable - de la generación nacida en t durante su segundo período de vida, es decir en $t+1$, se denota por c^t_{t+1}. Cada generación tendrá dotaciones durante su vida dadas por (e^t_t, e^t_{t+1}). Adicionalmente, en el período 1 habrá una generación adulta con dotación e^0_1 y consumo c^0_1. También analizaremos el caso en que esta generación tiene una dotación de dinero externo m[15].
Las preferencias para una generación t estarán representadas por una función aditivamente separable en el tiempo de la forma

[14]Esto significa que la población está constituida por un continuo de individuos dado por el intervelo [0,1]. Una versión más general de este modelo puede suponer crecimiento de la población.
[15]En realidad m puede ser positivo o negativo. En el caso que sea positivo es interpretado como dinero externo. En el caso que sea negativo se interpreta como un préstamo a los jóvenes otorgado por una institución externa al modelo.

$$U_t(c) = u(c_t^t) + \beta u(c_{t+1}^t)$$

Para la única generación adulta en el período 1, esta función será

$$U_0(c) = u(c_1^0)$$

Las propiedades de la función de utilidad u son las mismas asumidas en el modelo con agentes eternos.

1.2.2 Definición de los Equilibrios

Podemos interpretar esta economía, análogamente a como lo hicimos en la economía con agentes eternos, en un mundo Arrow-Debreu y en un mundo secuencial. En lo que sigue definimos los equilibrios en cada uno de estos mundos.

Definición 5
En esta economía, un Equilibrio Competitivo Arrow-Debreu es un vector de precios $\{\hat{p}_t\}_{t=1}^{\infty}$ y asignaciones $\hat{c}_1^0$, $\{\hat{c}_t^t, \hat{c}_{t+1}^t)\}_{t=1}^{\infty}$ tales que, dado m,

1. *Dado $\{\hat{p}_t\}_{t=1}^{\infty}$ para cada $t \geq 1$, $(\hat{c}_t^t,\ \hat{c}_{t+1}^t)$ resuelve*

$$\begin{aligned} \max \quad & U_t(c_t^t, c_{t+1}^t) \\ s.a \quad & \\ & \hat{p}_t c_t^t + \hat{p}_{t+1} c_{t+1}^t = \hat{p}_t e_t^t + \hat{p}_{t+1} e_{t+1}^t \\ & c_t^t, c_{t+1}^t \geq 0 \qquad \forall t \end{aligned} \tag{1.31}$$

2. *Dado $\hat{p}_1$, $\hat{c}_1^0$ resuelve*

$$\begin{aligned} \max \quad & U_0(c_1^0) \\ s.a \quad & \\ & \hat{p}_1 c_0^1 = \hat{p}_1 e_1^0 + m \\ & c_0^1 \geq 0 \end{aligned}$$

3. *Para todo $t \geq 1$*

$$\hat{c}_t^{t-1} + \hat{c}_t^t = e_t^{t-1} + e_t^t$$

Finalmente, presentamos el equilibrio en el caso en el que los mercados se abren secuencialmente. En este contexto, denotemos con r_t a la tasa de interés desde el período t hasta el período $t+1$ y con s_t^t al ahorro de la generación t desde el período t hasta el período $t+1$.

Definición 6
En esta economía, un Equilibrio Competitivo con Mercados Secuenciales es un vector de tasas de interés $\{\hat{r}_t\}_{t=0}^{\infty}$ y asignaciones $\hat{c}_1^0$, $\{\hat{c}_t^t, \hat{c}_{t+1}^t, \hat{s}_t^t)\}_{t=1}^{\infty}$ tales que, dado m,

1. *Dado $\{\hat{r}_t\}_{t=0}^{\infty}$para cada $t \geq 1$ $(\hat{c}_t^t, \hat{c}_{t+1}^t, \hat{s}_t^t)$ resuelve*

$$\begin{aligned} \max \quad & U_t(c_t^t, c_{t+1}^t) \\ s.a \quad & \\ & c_t^t + s_t^t = e_t^t \\ & c_{t+1}^t = e_{t+1}^t + (1+\hat{r}_t)s_t^t \\ & c_t^t, c_{t+1}^t \geq 0 \qquad \forall t \end{aligned} \tag{1.32}$$

2. *Dado $\hat{r}_0$, $\hat{c}_1^0$ resuelve*

$$\begin{aligned} \max \quad & U_0(c_1^0) \\ s.a \quad & \\ & c_0^1 = e_1^0 + (1+r_0)m \\ & c_0^1 \geq 0 \end{aligned}$$

3. *Para todo $t \geq 1$*

$$\hat{c}_t^{t-1} + \hat{c}_t^t = e_t^{t-1} + e_t^t \tag{1.33}$$

Nótese que tanto en el problema 1.31 como en el problema 1.32 no necesitamos una condición que excluya el esquema de Ponzi ya que los agentes viven sólo un número finito de períodos. Por último, de las restricciones presupuestarias 1.33 para generaciones t y $t+1$, tenemos

$$C_{t+1}^t + C_{t+1}^{t+1} + S_{t+1}^{t+1} = e_{t+1}^t + (1+r_t)S_t^t + e_{t+1}^{t+1}$$

y de la condición de cierre en el mercado de los bienes 1.33,

$$S_{t+1}^{t+1} = (1+r_t)S_t^t$$

En el caso de las generaciones 0 y 1, tenemos

$$S_1^1 = (1+r_0)m$$

lo que iterando, permite obtener

$$S_t^t = \prod_{\tau=0}^{t-1}(1+r_\tau)m \tag{1.34}$$

Esta condición representa el cierre del mercado de activos[16].
Si $m = 0$, $S_t^t = 0$ para todo t y el equilibrio es autárquico por lo tanto, el único intercambio en esta economía puede estar dado por la existencia de un $m > 0$. Este permite que los jóvenes estén dispuestos a intercambiar con los adultos, en la medida que, cuando ellos sean adultos, puedan hacer lo mismo con los jóvenes de la próxima generación[17].

1.2.3 Análisis del Equilibrio Utilizando Curvas de Oferta

En lo que sigue analizaremos la multiplicidad de equilibrios, su potencial ineficiencia y el rol del dinero externo utilizando curvas de oferta (ver Gale, 1973). Para ello, asumiremos que las dotaciones son estacionarias y dadas por $(e_t^t, e_{t+1}^t) = (w_1, w_2)$ para todo t. Además, definimos las funciones de demanda para los jóvenes y adultos de la generación t como

$$\begin{aligned} y(p_t, p_{t+1}) &= c_t^t(p_t, p_{t+1}) - w_1 \\ z(p_t, p_{t+1}) &= c_{t+1}^t(p_t, p_{t+1}) - w_2 \end{aligned}$$

en donde $c_t^t(p_t, p_{t+1})$ y $c_{t+1}^t(p_t, p_{t+1})$ son las funciones de demanda que resuelven el problema del consumidor de la generación t. La curva de oferta estará definida por distintas duplas de funciones de exceso de demanda (y, z) que resultan de variar la razón de precios $\frac{p_{t+1}}{p_t}$, único determinante de las funciones de demanda debido a la homogeneidad de grado cero en precios que caracteriza a esta economía[18].

Definición 7
Un Equilibrio en esta economía es un stock de dinero externo m, y una secuencia de precios $\{\hat{p}_t\}_{t=1}^{\infty}$ que satisface las siguientes condiciones para las funciones de exceso de demanda,

$$\begin{aligned} y(\hat{p}_1, \hat{p}_2) + z_0(\hat{p}_1, m) &= 0 \qquad \textit{para } t = 1 && (1.35) \\ y(\hat{p}_t, \hat{p}_{t+1}) + z(\hat{p}_{t-1}, \hat{p}_t) &= 0 \qquad \textit{para } t = 2, 3, \ldots && (1.36) \end{aligned}$$

Antes de graficar la curva de oferta (el locus de exceso de demanda óptimas en el espacio (y, z) obtenido para $\frac{p_{t+1}}{p_t} \in (0, \infty)$), notemos que esta debe cumplir con las siguientes condiciones:

1. $y(p_t, p_{t+1}) \geq -\, w_1$; $z(p_t, p_{t+1}) \geq -\, w_2$ (debido a que las funciones de consumo son estrictamente positivas).

2. $p_t y(p_t, p_{t+1}) +\, p_{t+1} z(p_t, p_{t+1}) = 0$ (debido a que la restricción presupuestaria debe ser satisfecha). Por esto,
$$\frac{z(p_t, p_{t+1})}{y(p_t, p_{t+1})} = -\frac{p_t}{p_{t+1}} \qquad (1.37)$$
Además, para los adultos en el primer período, debe cumplirse que $z_0(p_1, m) = \frac{m}{p_1}$.

[16]Por la ley de Walras una de las condiciones de cierre es redundante.
[17]Con $m = 0$, $S_t^t = 0$ ya que todos los individuos al interior de una misma generación son idénticos.
[18]Si y y z no fueran homogéneas de grado cero en precios, p_t y p_{t+1} determinarían por separado a las funciones de exceso de demanda.

3. $(y, z) = (0, 0)$ es parte de la curva de oferta (es decir, la autarquía puede ser un equilibrio).

4. $y(p_t, p_{t+1}) +\, z(p_{t-1}, p_t) = 0$ (debido a que la restricción de factibilidad debe ser satisfecha).

En este contexto, la representación gráfica de la curva de oferta para una economía en la que $m > 0$ está dada por la Figura 1.1

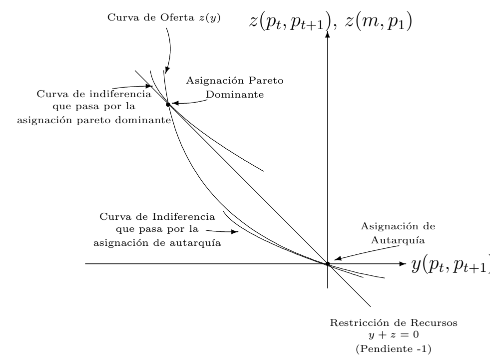


Figura 1.1: Curva de Oferta (*Offer Curve*).

Podemos, entonces, describir un algoritmo que permite obtener los equilibrios en esta economía. En particular, dado un m podemos elegir un $p_1 > 0$ de manera tal de determinar $z_0(p_1, m) = \frac{m}{p_1}$[19]. Luego, de la condición de cierre de mercados 1.35, podemos determinar, $y(p_1, p_2)$. Entonces, obtenemos nuevamente de 1.37, la curva de oferta $z(p_1, p_2)$ y así sucesivamente de 1.36. Con esta secuencia de funciones de exceso de demanda y dado que conocemos las dotaciones, podemos obtener la asignación de consumos para todas las generaciones. Por último, los precios son obtenidos dado p_1, determinando la secuencia de precios con rayos desde el origen con pendiente $-\frac{p_t}{p_{t+1}}$ que intersectan a la curva de oferta en $(y(p_t, p_{t+1}), z(p_t, p_{t+1}))$. Es decir, obtenemos $\hat{p}_2$, con $\hat{p}_1 = 1$ dado, del rayo que intersecta la curva de oferta en $(y(\hat{p}_1, \hat{p}_2), z(\hat{p}_1, \hat{p}_2))$ y así sucesivamente (Ver figura 1.2).
El análisis de la Figura 1.1 permite constatar las tres propiedades específicas al modelo con generaciones traslapadas señaladas con anterioridad. En particular, nótese que hay dos

[19]Nótese que esto no es una normalización ya que el valor de p_1 determina el valor real de la dotación de dinero de la generación adulta inicial. Sólo para $m = 0$, la normalización $p_1 = 1$ es inocua.

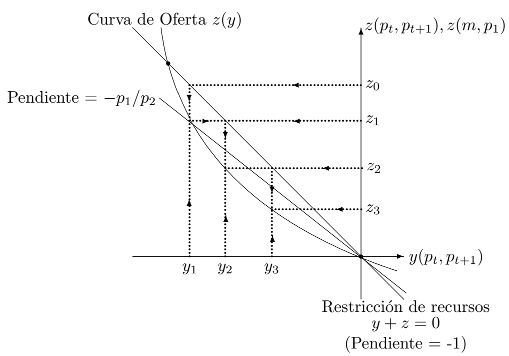


Figura 1.2: Obtención de los equilibrios de la economía.

equilibrios estacionarios, uno autárquico cuando $m = 0$ y otro en el que $z_0(p_1, m) = z(1, m) = -y(1, 1)$.
Por preferencias reveladas, el equilibrio estacionario con dinero externo es preferido al equilibrio autárquico (ya que la autarquía siempre es factible, los consumidores deben estar mejor si eligen intercambiar). Es decir, al menos un equilibrio es no deseado. De hecho, este equilibrio es preferido a cualquier otro con dinero externo positivo. Es, por lo tanto, el único Pareto óptimo de esta economía.
Además, dado un $m \neq 0$, para cada p_1 inicial, hay una secuencia de precios y asignaciones diferentes que convergen al estado estacionario autárquico. Es decir, hay un continuo de equilibrios. Nótese que durante este proceso de convergencia al estado estacionario autárquico, se produce inflación, es decir, $\hat{p}_{t+1} > \hat{p}_t$ para todo t[20].
Por último, el dinero externo m juega un rol en los equilibrios. Su existencia además, determina la ineficiencia de algunos equilibrios.
Este modelo, por lo tanto, requiere de alguna institución que permita alcanzar equilibrios socialmente deseados. Estos equilibrios ineficientes emergen porque no hay mercados completos. Los jóvenes no quieren transar con los adultos y por lo tanto, no suavizan consumo a través del tiempo.
La institución que permite alcanzar equilibrios no autárquicos puede ser interpretada de dos formas. Como un banco central que introduce dinero externo o como un sistema de seguridad social que grava a los jóvenes para luego devolverles el impuesto recaudado por gravar a los

[20]Si $m = 0$, cualquier p_1 inicial genera la misma asignación de equilibrio. En particular, para cualquier secuencia de precios generada por p_1, el equilibrio es autárquico. Con $m \neq 0$, sin embargo, cada secuencia de precios soporta una asignación de equilibrio distinta. Alternativamente, dado $p_1 = 1$, distintos m implican distintas secuencias de precio y asignaciones.

nuevos jóvenes.
La falla del Primer Teorema del Bienestar en este contexto es resultado de la existencia de un número infinito de agentes. De hecho, en una economía Arrow-Debreu (con mercados completos) en la que los individuos viven eternamente, asumimos que el número de agentes por período era finito. De lo contrario, la riqueza hubiese sido infinita y el equilibrio no hubiese existido. En este contexto, no era posible mejorar a alguien sin empeorar a otro debido a que en el equilibrio competitivo se gasta toda la riqueza. En un mundo con un número infinito de agentes que viven finitamente, sin embargo, la riqueza es infinita y es posible transferir recursos desde los jóvenes a los adultos sin que estos últimos se vean afectados. La primera generación de adultos recibe el monto de dinero externo aceptado por los jóvenes iniciales (o la recaudación del impuesto de seguridad social pagado por los primeros jóvenes) y estos, reciben luego el monto del dinero externo aceptado por la generación siguiente de jóvenes. Así, sucesivamente, se transfiere recursos desde los jóvenes a los adultos hasta converger al equilibrio autárquico. La última generación nunca es compensada ya que existe un infinito número de ellas[21]. Por último, la institución impuesta en el modelo (dinero externo o seguridad social) permite asegurar que los jóvenes recibirán, cuando adultos, recursos de los futuros jóvenes.

Tarea 4: Considere un modelo simple de generaciones traslapadas en el que el consumidor nacido en el período $t = 1, 2, \ldots$. tiene una función de utilidad de la forma

$$U(c_t^t, c_{t+1}^t) = c_t^t + \frac{(c_{t+1}^t)^b - 1}{b}$$

en donde $b < 1$. Suponga que su dotación es (w_1, w_2)

1. ¿Cuál es la función de utilidad en el caso en que $b = 0$?
2. Derive las funciones de exceso de demanda $y(p_t, p_{t+1})$ y $z(p_t, p_{t+1})$. Demuestre que son homogéneas de grado cero y que satisfacen la ley de Walras.

$$p_t y(p_t, p_{t+1}) + p_{t+1} z(p_t, p_{t+1}) \equiv 0$$

3. Suponga que la primera generación tiene una función de exceso de demanda de la forma

$$z_0(p_1, m) = \frac{m}{p_1}$$

   Escriba las condiciones de equilibrio para este modelo.
4. Encuentre una expresión para la curva de oferta en este modelo. (ayuda: usted debe resolver y como función de z; z como función de y no es posible)
5. Suponga que $w_1 = 1$ y que $w_2 = \frac{1}{4}$. Dibuje la curva de oferta para los tres casos $b = \frac{1}{2}, b = 0$ y $b = -1$.

[21]Esto se conoce como la paradoja del hotel N_{++}. Basta con enviar a los actuales inquilinos a una habitación con un número superior a la actual para que, en el caso de haber infinitas habitaciones, siempre haya espacio para recibir más clientes.

Capítulo 2

Crecimiento Económico

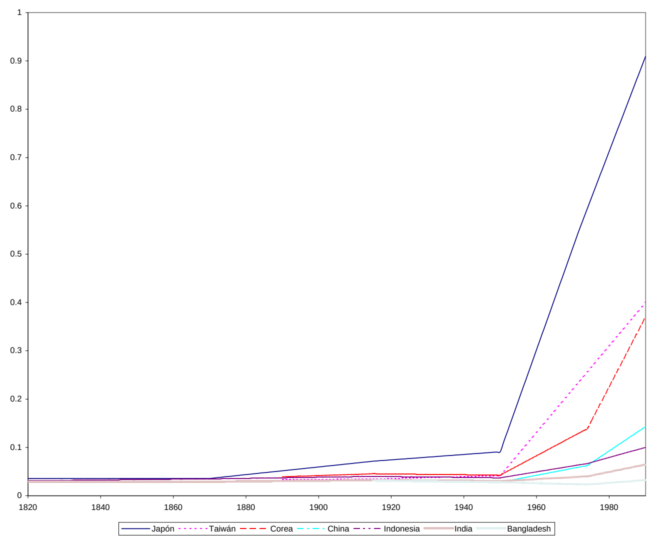
En este capítulo analizaremos temas relacionados con crecimiento económico. Entre otros, discutiremos los determinantes del ingreso per cápita y la convergencia entre países. El análisis se basará en la estructura básica utilizada por la macroeconomía moderna, el Modelo de Crecimiento Neoclásico. Este modelo será motivado, primero, introduciendo una versión del modelo de Solow con unidades efectivas de trabajo. En este contexto, las decisiones de ahorro son exógenas. Luego, en el modelo de Ramsey, Cass y Koopmans, permitiremos que la tasa de ahorro de la economía sea generada como resultado de un problema de optimización explícito. Adicionalmente, incorporaremos crecimiento endógeno para discutir los determinantes del crecimiento en el tiempo y sus implicancias en términos de convergencia entre países.

2.1 Los Hechos Estilizados

Durante los últimos 100 años, la evidencia empírica demuestra que existen grandes variaciones en el comportamiento entre países tanto en el nivel absoluto de ingreso (medido típicamente a través del producto georgáfico bruto, PGB) como en el ingreso per cápita. Las diferencias, además, son marcadas en un momento en el tiempo. Mientras los países desarrollados generalmente experimentan tasas de crecimiento cercanas al 3%, los países en desarrollo presentan tasas de crecimiento que fluctúan entre -10% y +10%. Además, algunos países que al término de la segunda guerra mundial pertenecían al grupo de naciones subdesarrolladas, han logrado mantener durante largos períodos en los últimos 40 años tasas de crecimiento cercanas al 7%, accediendo de esta forma a niveles de desarrollo cercanos a los obtenidos en países tradicionalmente ricos.

El Cuadro 2.1 compara la evolución del ingreso per cápita entre los países del Oeste y Este durante el período 1820-1992. En él se observa que la diferencia entre ambas regiones llegó a crecer más de tres veces hasta la segunda guerra mundial, después de lo cual se ha reducido en cerca de un 40%. De hecho, como muestra la Figura 2.1, durante las últimas cuatro décadas se han observado espectaculares tasas de crecimiento en algunos países del sudeste asiático. Esto les ha permitido transformar dramáticamente sus sociedades acercándose a los niveles de riqueza de los países más ricos y consiguientemente, reduciendo sus niveles de pobreza. Japón, por ejemplo, que en el año 1820 tenía un ingreso per cápita equivalente a 1/32 del nivel de los Estados Unidos, en la actualidad ha logrado prácticamente igualar este ingreso. Estos cambios han demostrado ser esenciales para mejorar las condiciones de vida de la población (por ejemplo, a través de un mayor acceso a la salud y a la educación). Sin embargo, otras naciones han permanecida sumidas en su pobreza, ajenas, por ejemplo, a los desarrollos tecnológicos del mundo en el que están insertas.

Figura 2.1: PGB per cápita relativo a Estados Unidos 1985



Fuente: Madison (1995).

Un ejemplo numérico puede ilustrar la relevancia que, distintas tasa de crecimiento en el ingreso per cápita, tienen en la capacidad de un país de alcanzar mayores niveles de riqueza. Si el ingreso real por persona en India continua creciendo a las tasas experimentadas durante la post segunda guerra mundial, esta demorará 200 años en alcanzar el actual nivel de ingreso per cápita que tiene Estados Unidos. Sin embargo, si India crece al 3 por ciento por año, la convergencia tardará un poco menos de 100 años. Por último, si crece en promedio 6 por

Cuadro 2.1: Evolución del ingreso per-cápita.

Año	**Oeste**	**Este**	**Oeste/Este**
1820	1.140	540	2,1
1870	1.880	560	3,3
1900	2.870	680	4,2
1913	3.590	740	4,8
1950	5.450	727	7,5
1973	10.930	1.670	6,5
1989	13.980	2.970	4,7
1992	13.790	3.240	4,3

Fuente: Madison (1995).

ciento, el proceso sólo requerirá de 40 años[1].

En un contexto tan variable como el anterior, ¿podemos determinar regularidades empíricas que caractericen el comportamiento de largo plazo de las economías? Kaldor y Kuznets establecieron un conjunto de regularidades que, en 1970, Robert Solow caracterizó como 5 (ó 6) hechos estilizados que, en el largo plazo, las economías (al menos de mercado) cumplen. Estos hechos son:

1. $\frac{Y}{N}$ crece a una tasa constante (crecimiento estacionario en el ingreso per cápita).

2. $\frac{K}{N}$ crece a una tasa constante (crecimiento estacionario en el capital per cápita).

3. $\frac{K}{Y}$ es constante (la razón capital a producto es constante. Esto surge de los dos hechos anteriores).

4. Las proporciones en el producto del capital y del trabajo son aproximadamente constantes.

5. La tasa de interés es aproximadamente constante.

6. Existen amplias diferencias en la tasa de crecimiento de la productividad entre países.

Estos hechos definirán nuestra caracterización del comportamiento económico en el largo plazo y condicionarán el modelo de crecimiento que utilicemos. Sin embargo, es importante agregar algunos comentarios. En particular: (1) durante los años 1970s, 1980s y 1990s, las tasas de crecimiento fueron inferiores a las observadas durante las décadas inmediatamente posteriores a la segunda guerra mundial. Esto podría reflejar que estamos en un nuevo estado

[1]Lucas (1988) ilustra la relevancia de este tema y el dramatismo de la evidencia empírica con relación al crecimiento económico al sostener que "Una vez que se empieza a pensar con respecto al crecimiento económico, es difícil pensar en algo distinto".

estacionario o que, durante los años 1950s y 1960s las economías estaban regresando, a través de una transición dinámica, al estado estacionario actual[2]; y (2) Lucas (1988) sugiere que la razón K/Y cae en el tiempo. Además, observamos distintas razones entre países y en el tiempo. Estas diferencias se pueden deber a problemas en la medición del capital (esto es particularmente importante en las economías en desarrollo en las que los propietarios del capital tienden a ser sobre estimados), a la existencia de sistemas financieros distintos entre países o a que las naciones tienen distintas propensiones al ahorro. Los temas anteriores tienen relación con inversión y ahorro, tanto en un momento como a través del tiempo.

Uno de los primeros trabajos en incorporar sustitución intertemporal en el consumo en el análisis dinámico de una economía es Solow (1956). De esta forma, la relación entre ahorro e ingreso per cápita en el largo plazo es formalizada. El principal resultado de ese trabajo es que al aumentar el ahorro como proporción del producto, la acumulación de capital por trabajador aumenta generando mayores niveles de ingreso per cápita[3].

Adicionalmente, el modelo de Solow en general, y la función de producción neoclásica que lo caracteriza, en particular, generan equilibrios consistentes con cinco de los seis hechos estilizados de Kaldor. Su principal debilidad empírica reside en su incapacidad para replicar las diferencias observadas en ingreso per cápita entre países.

Como veremos más adelante, el modelo de Solow supone la existencia de un único bien producido con capital y trabajo mediante una tecnología con retornos constantes a escala y decrecientes al factor. Este tipo de tecnología es conocida como neoclásica. La función Cobb-Douglas satisface estas propiedades. En particular, supongamos que el producto Y es generado mediante la tecnología

$$Y = \gamma K^{\alpha} N^{1-\alpha} \tag{2.1}$$

en donde $\alpha \in (0,1)$. Es trivial demostrar que la tecnología en 2.1 es consistente con los primeros cinco hechos estilizados de Kaldor. Por ejemplo, la proporción del producto que es recibida por el capital está dada por α que es constante. Además, el ingreso per cápita y el capital per cápita crecen a la misma tasa. En las próximas secciones demostraremos formalmente estos resultados. En lo que sigue, sin embargo, analizaremos las implicancias del sexto hecho estilizado de Kaldor para el caso de Chile y Estados Unidos, con el fin de mostrar que una función neoclásica, en el contexto anterior, no puede explicar las diferencias en el ingreso per cápita entre países.

Si las funciones de producción son iguales entre países, para cada país j

$$Y_j = \gamma K_j^{\alpha} N_j^{1-\alpha}$$

Expresando esta función en términos per cápita, de manera tal que $x \equiv \frac{X}{N}$

$$y_j = \gamma k_j^{\alpha} \tag{2.2}$$

[2]Definiremos estado estacionario como un equilibrio en el que las variables satisfacen algunas de las propiedades anteriores. En particular, las asignaciones en términos per cápita se mantienen constantes o crecen a una tasa constante.

[3]Empíricamente, este resultado ha sido corroborado por Mankiw, Romer y Weil (1992).

y obteniendo la productividad marginal del capital, que debe ser igual a la tasa de interés real r_j más la depreciación δ,

$$\gamma \alpha k_j^{\alpha-1} = r_j + \delta \tag{2.3}$$

Parametrizaremos la función dada por 2.2 utilizando información de Naciones Unidas y del Fondo Monetario Internacional para el año 1990 con el fin de analizar las implicancias en términos de las diferencias entre el ingreso per cápita en Chile y en Estados Unidos, de la ecuación 2.3. En particular, asumiremos que $\alpha = 0,3$ y que $\delta = 0,06$. Además, $r_{us} = 0,05$. Por último, Summers y Heston (1991)[4] reportan $y_{us} = US\$44.409$ y $y_{ch} = US\$14.281$, expresados en dólares de 1991. Utilizando la ecuación 2.2, esto implica que

$$\frac{k_{us}}{k_{ch}} = 43,89$$

y por lo tanto,

$$r_{ch} = (r_{us} + \delta)\left(\frac{k_{us}}{k_{ch}}\right)^{1-\alpha} - \delta = 1,49. \tag{2.4}$$

Es decir, la tasa de interés real que predice el modelo para Chile, de acuerdo a la ecuación 2.4, es casi 30 veces la tasa de interés real observada en Estados Unidos. Nótese que si utilizamos datos de Naciones Unidas, en reemplazo por los datos de Summers y Heston, $r_{ch} = 7$. Por último, si utilizamos $\alpha = 0.6$ (la cifra que surge de los datos para Chile), $r_{ch} = 0.35$, todavía 7 veces superior a la tasa de interés real en Estados Unidos.

Lo anterior sugiere que la función de producción neoclásica no puede explicar la diferencia en el ingreso per cápita entre países. Al asumir tecnologías idénticas entre países y dada la especificación de la función Cobb-Douglas, se requiere de tasas de interés (productividad marginal del capital) inusitadamente elevadas para aceptar el bajo nivel de ingreso per cápita en Chile, y por ende, su bajo stock de capital. El problema del modelo radica en su incapacidad para explicar por qué los capitales no fluyen desde los países ricos hacia los países pobres[5].

Una forma de generar resultados más cercanos a las observaciones empíricas consiste en permitir que las tecnologías sean distintas en ambos países. En particular, podemos preservar la formulación Cobb–Douglas pero permitir que la productividad total de los factores γ sea específica a cada país. Ahora tenemos, para cada país, un sistema de dos incógnitas (k_j y γ_j) y dos ecuaciones,

$$y_j = \gamma_j k_j^{\alpha} \tag{2.5}$$

$$\gamma_j \alpha k_j^{\alpha-1} = r_j + \delta \tag{2.6}$$

[4]Summers y Heston reportan cifras ajustadas por paridad cambiaria para diversas series agregadas durante el período 1950 - 1990. La base de datos incluye 144 países.

[5]Un ejercicio similar realizado para India y Estados Unidos aparece en Lucas (1988). En él, se encuentra que la productividad marginal del capital en India debe ser 58 veces mayor que en Estados Unidos. Lucas (1990) formaliza la eventual diferencia en productividades entre países incorporando capital humano.

Es decir, las ecuaciones 2.5 y 2.6 para Estados Unidos están dadas por

$$\begin{aligned} 44.409 &= \gamma_{us} k_{us}^{0,3} && (2.7)\\ \gamma_{us} 0.3 k_{us}^{-0.7} &= 0.05 + 0,06 = 0.11 && (2.8) \end{aligned}$$

y para Chile

$$\begin{aligned} 14.281 &= \gamma_{ch} k_{ch}^{0,3} && (2.9)\\ \gamma_{ch} 0.3 k_{ch}^{-0.7} &= 0.08 + 0,06 = 0.14 && (2.10) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema dado por 2.7-2.10, tenemos que

$$k_{us} = 123.358, \gamma_{us} = 1318,6,\ k_{ch} = 30.602, \gamma_{ch} = 644,2 \Rightarrow \frac{k_{us}}{k_{ch}} = 4,01$$

De hecho, Summers y Heston reportan una razón de capitales $\frac{k_{us}}{k_{ch}} = 3,63$. Es decir, al permitir que las tecnologías difieran entre países a través de diferentes productividades totales de los factores, el modelo es capaz de replicar la diferencia observada en ingresos per cápita. Sin embargo, persiste la duda con respecto a por qué los países adoptan distintas tecnologías[6].

2.2 El Modelo de Solow

En lo que sigue presentamos una versión en tiempo discreto del modelo de Solow. Existe un único bien que puede ser usado para consumo o para inversión. La producción de este bien es realizada mediante una función de producción agregada neoclásica. Es decir,

$$Y_t = F(K_t, A_t N_t) \tag{2.11}$$

en donde K es el stock de capital, N es la fuerza laboral que crece a través del tiempo a una tasa exógena n,

$$N_{t+1} = (1+n)N_t$$

[6] Parente y Prescott (2000) analizan la relevancia de barreras a la adopción de tecnologías para explicar la diferencia en productividad observada entre países. En particular, sugieren que la existencia de derechos monopólicos protegidos en diversos sectores pueden generar diferencias en productividad total de factores consistentes con las diferencias observadas en la distribución mundial de ingresos per cápita. En el contexto latinoamericano, Bergoeing et al. (2001), muestran que el distinto crecimiento experimentado por Chile y México durante durante las dos últimas décadas es explicado, principalmente, por un comportamiento distinto en la productividad total de los factores en cada país. En el capítulo 3, se muestra evidencia que corrobora lo anterior al analizar la relación entre productividad y ciclo económico durante los procesos de recuperación que siguen a las depresiones.

y A es un parámetro que puede ser interpretado como conocimiento, de manera tal que AN representa unidades efectivas de trabajo[7]. Suponemos que este parámetro crece a través del tiempo a una tasa exógena g[8],

$$A_{t+1} = (1+g)A_t$$

La función F en 2.11, tiene retornos constantes a escala y se caracteriza por,

$$\begin{aligned} F_K,\ F_N &> 0\\ F_{KK},\ F_{NN} &< 0,\\ F_{NK} = F_{KN} &> 0. \end{aligned}$$

Además, esta función tiene la propiedad que $F(0) = 0$ y satisface las condiciones de Inada[9].
Los factores de producción son propiedad de los hogares en la economía, quienes dedican todo su tiempo a trabajar y asignan todo su capital al mercado[10].
La existencia de rendimientos constantes a escala implica que a nivel agregado, la función de producción es independiente del número y tamaño de las firmas individuales en la economía. En este contexto, podemos suponer que toda la producción es realizada por una empresa representativa. Además, y consistentemente con las observaciones empíricas, no existen beneficios extraordinarios sistemáticos[11].
La inversión (y por ende el ahorro) se supone como una proporción constante y exógena del producto s,

$$I_t = sY_t \tag{2.12}$$

en donde

[7] Este parámetro permite incorporar exógenamente progreso tecnológico en el modelo. Al introducirlo de esta forma, diremos que el progreso tecnológico es ahorrador de trabajo (o neutral según Harrod) pues permite aumentar el producto en la misma forma que tiene lugar un aumento en el volumen del trabajo.
El progreso tecnológico que permite obtener la misma cantidad de producto empleando relativamente menos capital, es conocido como ahorrador de capital o neutral según Solow. En este caso $Y = F(AK, N)$ y la distribución de la renta permanecerá inalterada para una proporción trabajo/producto dada. Por último, el progreso tecnológico será neutral según Hicks cuando $Y = AF(K, N)$. En este caso, la distribución de la renta se mantendrá constante durante toda trayectoria en que se mantenga constante la relación capital/trabajo. En el caso de la función Cobb-Douglas, los tres tipos de neutralidad son equivalentes.

[8] En la versión original del modelo de Solow, $g = 0$. Esto afectará, como veremos, el comportamiento de las variables per cápita en el largo plazo.

[9] Los modelos de crecimiento anteriores a Solow imponían una única combinación posible entre trabajo y capital (ver Harrod, 1939 y Domar, 1946). Por ello, no podían analizar el proceso de transición hacia un estado estacionario.

[10] En una versión microfundada de este modelo se puede demostrar que, con preferencias sin saturación, la asignación de todas las horas al mercado laboral se debe a que el ocio no es valorado en la función de utilidad.

[11] La existencia de beneficios cero puede ser corroborada mediante la aplicación del teorema de Euler. En particular, la contribución de los factores debe agotar el producto. Es decir, $F(K, AN) = F_K K + F_{AN} AN = rK + wAN$.

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t \tag{2.13}$$

con la tasa de depreciación $\delta \in (0,1)$[12].
Por último, la condición de cierre del mercado requiere que

$$Y_t = C_t + I_t \tag{2.14}$$

Este modelo, por lo tanto, no incorpora gobierno, supone una economía cerrada y es determinístico. Sus únicas fuentes de crecimiento son exógenas y están dadas por cambios en la población (n), cambios tecnológicos (g) y cambios en el conocimiento (A).

2.2.1 Estabilidad

Analizaremos la estabilidad del modelo, es decir, determinaremos si el modelo converge globalmente a un valor determinado. Si esto es así, podemos analizar las propiedades de largo plazo de esta economía y garantizar la existencia de una senda de crecimiento balanceada (o equilibrio estacionario) consistentemente con los hechos estilizados de Kaldor.
En lo que sigue, expresamos el modelo en forma intensiva. Para ello, definimos $\tilde{x}_t \equiv \frac{X_t}{A_t N_t}$ para cualquier variable X. En este contexto, las ecuaciones 2.11, 2.12, 2.13 y 2.14, que caracterizan el equilibrio, se transforman en[13]

$$\tilde{y}_t = f(\tilde{k}_t) \text{ con } f(\tilde{k}_t) \equiv \frac{F(K_t, A_t N_t)}{A_t N_t} = F(\tilde{k}_t, 1) \tag{2.15}$$

$$\tilde{i}_t = s\tilde{y}_t \tag{2.16}$$

$$\tilde{k}_{t+1}(1+z) = (1-\delta)\tilde{k}_t + \tilde{i}_t, \text{ con } (1+z) \equiv (1+g)(1+n) \tag{2.17}$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{c}_t + \tilde{i}_t \tag{2.18}$$

Entonces, para determinar si para cualquier $\tilde{k}_0 > 0$ inicial, el modelo converge a un único $\tilde{k}^*$, analizaremos $\phi(\tilde{k}_t) \equiv \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t$.
Reemplazando las ecuaciones 2.15, 2.16 y 2.17 en $\phi(\tilde{k}_t)$,

$$\phi(\tilde{k}_t) = \frac{(1-\delta)\tilde{k}_t + \tilde{i}_t}{1+z} - \tilde{k}_t = \frac{sf(\tilde{k}_t) - (\delta+z)\tilde{k}_t}{1+z} \tag{2.19}$$

La Figura 2.2 muestra el comportamiento del capital (expresado en unidades intensivas) durante la transición hacia el equilibrio de largo plazo. Nótese que, debido a las condiciones de

[12] La inversión i_t es neta. Es decir, es igual a la inversión bruta $k_{t+1} - k_t$ menos la depreciación δk_t.
[13] Nótese que al especificar la ley de movimiento para el capital en términos intensivos, K_{t+1}se transforma en $\tilde{k}_{t+1}(1+z)$ debido a que $\frac{K_{t+1}}{A_t N_t}\frac{A_{t+1}N_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}} = \frac{I_t}{A_t N_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{A_t N_t}$, que es equivalente a la ecuación $\tilde{k}_{t+1}(1+z) = (1-\delta)\tilde{k}_t + \tilde{i}_t$.

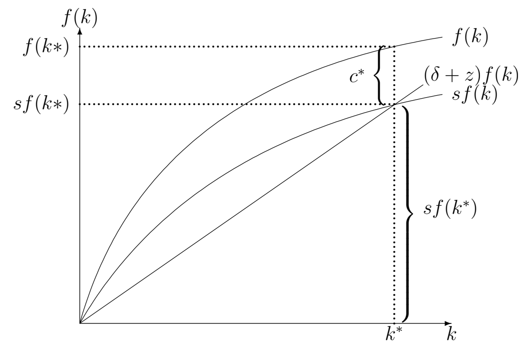


Figura 2.2: Dinámica del capital en el modelo de Solow.

Inada, la función $sf(\tilde{k}_t)$ tiene, para valores suficientemente pequeños de $\tilde{k}_0$, mayor pendiente que $(\delta+z)\tilde{k}_t$.
El equilibrio se caracteriza como sigue,

1. $\phi(\tilde{k}^*) = 0$
2. $\phi(0) = 0$
3. $\phi(\tilde{k}_t) > 0$ para todo $0 < \tilde{k}_t < \tilde{k}^*$
4. $\phi(\tilde{k}_t) < 0$ para todo $\tilde{k}_t > \tilde{k}^*$

Además, por Inada, inicialmente se acumula capital (invierte) por sobre su uso (valor de reposición para mantener su valor en unidades efectivas de trabajo), es decir en 2.19, $sf(\tilde{k}_t) > (\delta+z)\tilde{k}_t$, y debido a que $f''(\tilde{k}_t) < 0$ y a la monotonicidad de ambas funciones, estas se intersectan sólo una vez para valores estrictamente positivos de $\tilde{k}_t$.
El modelo, por lo tanto, tiene dos equilibrios estacionarios, uno estrictamente positivo, que surge si $\tilde{k}_0 > 0$, y otro equilibrio autárquico, en el que la economía se queda si el capital inicial es cero. El equilibrio estacionario estrictamente positivo resulta del hecho que, en $\tilde{k}^*$, el ahorro se iguala al capital utilizado. Analíticamente, $sf(\tilde{k}_t) = (\delta+z)\tilde{k}_t$.
Además, si el stock de capital por unidad efectiva de trabajador está por debajo (encima) de $\tilde{k}^*$, este crecerá a una tasa positiva (negativa).

Definición 8
Un equilibrio de largo plazo es un equilibrio en el que las variables per cápita crecen a una

tasa constante (crecimiento balanceado) si $g \neq 0$ o en el que las variables per cápita se mantienen constantes (estado estacionario) si $g = 0$. En el primer caso, el precio del trabajo crece a una tasa constante y el precio del capital se mantiene constante. En el segundo caso, ambos precios se mantienen constantes.

2.2.2 Caracterización del Equilibrio de Largo Plazo

¿Qué ocurre cuando el capital converge a $\tilde{k}^*$? Sabemos que la fuerza de trabajo N crece a $(1+n)$ y que el conocimiento A crece a $(1+g)$. Además, y debido a que $\tilde{k}^*$ es constante, $\tilde{y}^*$, $\tilde{i}^*$, y $\tilde{c}^*$ son constantes. Entonces, las variables en términos absolutos y per cápita se comportan como sigue:

- AN, K, Y crecen a $(1+z)$
- $\frac{Y}{N}$, $\frac{K}{N}$ crecen a $(1+g)$

En particular, sin pérdida de generalidad podemos asumir que el crecimiento balanceado se alcanza en $t = \tau$ y que $A_0 \equiv 1$, de modo que $k_{t+\tau} = A_{t+\tau}\tilde{k}^* = (1+g)^{t+\tau}A_0\tilde{k}^*$. Por ello, de las ecuaciones 2.15-2.18, y con $\tau = 0$, sabemos que en la senda de crecimiento balanceado se cumple que

$$
\begin{aligned}
k_t &= (1+g)^t\tilde{k}^* && (2.20)\\
y_t &= (1+g)^t\tilde{y}_t = (1+g)^t f(\tilde{k}^*) && (2.21)\\
i_t &= sy_t = s(1+g)^t f(\tilde{k}^*) && (2.22)\\
c_t &= (1-s)y_t = (1-s)(1+g)^t f(\tilde{k}^*) && (2.23)
\end{aligned}
$$

Utilizando el hecho que el pago a los factores es igual a la productividad marginal del factor (con precios normalizados para el bien),

$$r_t = f'(\tilde{k}^*) \tag{2.24}$$

de manera tal que la tasa de arriendo por capital (y por ende la tasa de interés[14]) es constante[15]. Por último, debido a la homogenidad de grado uno de la tecnología, el salario está dado por

$$w_t = y_t - k_t f'(k_t) = (1+g)^t\left[f(\tilde{k}^*) - \tilde{k}^* f'(\tilde{k}^*)\right] \tag{2.25}$$

[14]En equilibrio, como ya dijimos, la tasa de interés sumada a la depreciación se iguala a la tasa de arriendo del capital.

[15]Es fácil demostrar que $f'(\tilde{k})$ es, al igual que $F_K(K, AN)$, la productividad marginal del capital. De hecho debido a que $F(K, AN)$ tiene retornos constantes a escala, $F(K, AN) = ANf(\frac{K}{AN})$ y derivando con respecto a K, obtenemos $ANf'(\frac{K}{AN})\frac{1}{AN} = f'(\tilde{k})$.

De las ecuaciones 2.20-2.25, constatamos que los cinco primeros hechos estilizados de Kaldor se cumplen y que la economía converge a una senda con crecimiento balanceado[16]. Es obvio, además, que si $g = 0$ la economía alcanza un estado estacionario en el largo plazo. La versión original del modelo de Solow asume que $g = 0$ y predice, por ende, que las variables expresadas en términos per cápita se mantienen constantes en el largo plazo, inconsistentemente con los hechos estilizados de Kaldor. Esto sugiere que el crecimiento en la economía es generado por algo más que la acumulación de factores productivos, K y N[17].

2.2.2.1 El Residuo de Solow

Utilizando una función de producción Cobb-Douglas podemos calcular el porcentaje de la renta per cápita determinado exclusivamente por la acumulación física de factores. En particular, con

$$Y_t = \gamma_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha}$$

expresada en términos per cápita

$$y_t = \gamma_t k_t^\alpha$$

Aplicando diferencias y logaritmos para aproximar las tasas de crecimiento,

$$\ln\frac{y_{t+1}}{y_t} = \ln\frac{\gamma_{t+1}}{\gamma_t} + \alpha\ln\frac{k_{t+1}}{k_t}$$

que puede ser escrita como

$$\triangle\ln y_t = \triangle\ln\gamma_t + \alpha\triangle\ln k_t \tag{2.26}$$

La serie obtenida de $\triangle\ln\gamma_t$ en la ecuación 2.26, recibe el nombre de residuo de Solow y representa a los otros factores que pueden incidir en el crecimiento, por ejemplo educación o progreso técnico. En este contexto, el porcentaje que no es explicado por la acumulación de factores productivos está dado por[18]

$$\frac{\triangle\ln\gamma_t}{\triangle\ln y_t} = 1 - \alpha\frac{\triangle\ln k_t}{\triangle\ln y_t}$$

[16]El hecho que las proporciones del pago al capital y al trabajo en el producto se mantienen constantes, se corrobora con una función de producción tipo Cobb-Douglas. Estos pagos, como proporción del producto, están dados por el parámetro del factor en la función.

[17]En nuestra versión, por ejemplo, agregamos conocimiento.

[18]Solow calculó que, para Estados Unidos durante el período 1909-1949, sólo un tercio del crecimiento en el ingreso por trabajador era explicado por acumulación física de factores. Por otra parte, sin embargo, Mankiw, Romer y Weil (1992) concluyen que una fracción importante del crecimiento de una muestra representativa de economías, puede explicarse por la acumulación de factores productivos. Por último, Young (1995) concluye que los "milagros asiáticos" fueron más aparentes que reales ya que su proceso de elevado crecimiento experimentado durante la post guerra es resultado de su elevada tasa de inversión.

2.2.3 Convergencia

Uno de los temas que más análisis ha generado en crecimiento económico durante las últimas dos décadas es la discusión con respecto a convergencia. En particular, la literatura analiza la velocidad a la que los países convergen. En el modelo de Solow, si dos países tienen la misma tecnología y especificación paramétrica, es decir, propensión al ahorro, tasa de crecimiento de la población y tasa de crecimiento del conocimiento, convergerán al mismo nivel de ingreso per cápita, independientemente del nivel inicial de capital con que cuenten (siempre y cuando este nivel sea estrictamente positivo).
Para conocer la rapidez con que los países convergen al equilibrio de largo plazo, derivamos $\Phi(\tilde{k}_t) \equiv \frac{\phi(\tilde{k}_t)}{\tilde{k}_t}$ con respecto a $\tilde{k}_t$.

$$\frac{\partial \Phi(\tilde{k}_t)}{\partial \tilde{k}_t} = \frac{s}{(1+z)\tilde{k}_t^2}\left[\tilde{k}_t f'(\tilde{k}_t) - f(\tilde{k}_t)\right] < 0 \qquad \forall \tilde{k}_t \tag{2.27}$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento del capital por unidad efectiva de trabajador $\Phi(\tilde{k}_t)$ disminuye a medida que $\tilde{k}_t$ se acerca a $\tilde{k}^*$[19]. Obviamente, además, la tasa de crecimiento del producto por unidad efectiva de trabajador disminuye a medida que nos acercamos a $\tilde{k}^*$.
En otras palabras, si tenemos dos economías con el mismo equilibrio de largo plazo pero con distintos niveles iniciales de capital (y por ende de producto), la economía más pobre crecerá a una tasa mayor. Si las economías tienen distintos equilibrios de largo plazo (por ejemplo por distintas propensiones al ahorro), lo único que podemos decir es que mientras más lejos de su equilibrio de largo plazo se encuentre una economía, más rápido crecerá.
De lo anterior surgen dos conceptos de convergencia. El concepto de convergencia absoluta indica que, en un mundo con iguales equilibrios de largo plazo, los países más pobres crecerán más rápidamente que los países más ricos. Por otro lado, el concepto de convergencia condicional se refiere a que la tasa de crecimiento de un país está inversamente relacionada con la distancia a la que su ubica de su propio equilibrio de largo plazo. La convergencia es condicional porque el equilibrio de largo plazo depende de los parámetros del modelo que son específicos a cada país[20].

Tarea 5: Analice los determinantes de la tasa de crecimiento de largo plazo en el modelo de Solow. En particular, demuestre que esta tasa no depende de la fracción del producto ahorrada.

2.2.4 Consumo y Ahorro

El equilibrio encontrado en la sección anterior no ha sido condicionado por criterios de optimalidad. En particular, hemos encontrado el capital por trabajador que maximiza el

[19] El término entre paréntesis en la ecuación 2.27 es negativo debido a que los beneficio son cero. Es decir, el producto supera a la contribución real del capital.

[20] Actualmente se denomina *convergencia β condicional* a la propiedad que predice la convergencia de cada país hacia su propio equilibrio de largo plazo, *convergencia β absoluta* a la propiedad que predice la convergencia de todos los países hacia un mismo nivel de vida, y *convergencia σ* a la que predice la reducción de la dispersión de las rentas en el tiempo, medida por la varianza, para un grupo de países.

ingreso por trabajador en el largo plazo. Sin embargo, el bienestar de los individuos depende del consumo, no de la inversión, ahorro o producto.
Para discutir las implicancias del modelo de Solow con respecto a consumo, asumamos, sin pérdida de generalidad, que el equilibrio de largo plazo es un estado estacionario, es decir, que $g = 0$. En este contexto, sabemos de la ecuación 2.19 que en estado estacionario $sf(k^*) = (\delta + n)k^*$. Por otro lado, el nivel de consumo en estado estacionario está dado por

$$c^* = f(k^*) - sf(k^*) = f(k^*) - (\delta + n)k^* \tag{2.28}$$

¿Cuál es entonces la tasa de ahorro que maximiza el consumo en estado estacionario? Derivando la ecuación 2.28 con respecto a s, e igualando a cero[21],

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = \left(f'(k^*(s,n,\delta)) - (\delta + n)\right)\frac{\partial k^*(s,n,\delta)}{\partial s} = 0 \tag{2.29}$$

y debido a que $\frac{\partial k^*(s,n,\delta)}{\partial s} > 0$,

$$f'(k^*_{oro}) = (\delta + n) \tag{2.30}$$

en donde k^*_{oro} es el capital per cápita de estado estacionario que maximiza a c^*[22].
Entonces, $c^*_{oro} = f(k^*_{oro}) - (\delta + n)k^*_{oro}$. Esta condición se conoce como Regla de Oro y fue enunciada por primera vez por Phelps (1967). Con ella, se determina el capital per cápita que garantiza la maximización del consumo per cápita y por ende, aquel que garantiza que la trayectoria de crecimiento se mantendrá permanentemente. En la próxima sección, analizaremos las implicancias de esta regla en términos de optimalidad. Veremos que, si la economía convergiera a un $k^* < k^*_{oro}$, desahorrando parte del capital acumulado durante la transición, se podría haber conseguido un mayor nivel de bienestar. En este modelo, esta *ineficiencia dinámica* ocurre debido a que la tasa de ahorro es exógena.

2.3 El Modelo de Ramsey, Cass y Koopmans

El modelo de Solow asumió que la tasa de ahorro s es exógena. Es decir, no es determinada como parte del proceso de optimización de los agentes económicos. Este supuesto impide entender, por ejemplo, por qué distintos países invierten distintas proporciones de su producto. De hecho, resulta conveniente analizar el impacto que distintas políticas de gobierno pueden tener en la tasa de ahorro en la economía. Por ello, en esta sección extenderemos el modelo de Solow para permitir que la tasa de ahorro sea determinada como parte del equilibrio.
Este modelo, conocido como Modelo Neoclásico, es ampliamente utilizado para discutir aspectos de la teoría de crecimiento, ciclos económicos y, en general, diversas aplicaciones cuantitativas en equilibrio general[23].

[21] Nótese que $k^* = k^*(s, n, \delta)$.

[22] Nótese que este capital per cápita es menor al encontrado como solución en el modelo de Solow.

[23] Como dijimos en la sección anterior, este modelo ha recibido recientemente sustento empírico en los trabajos realizados por Mankiw, Romer y Weil (1992) y por Young (1995).

2.3.1 El Modelo Básico

Asumiremos que el tiempo es discreto e indexado por $t = 0, 1, 2, 3, ...$ Hay un número grande de consumidores idénticos y de firmas idénticas. El análisis se concentrará en el consumidor representativo y en la firma representativa. La economía tiene tres bienes, capital k_t, trabajo n_t, y producto final y_t, que puede ser consumido c_t o invertido i_t. Estas asignaciones están expresadas en términos intensivos. Para completar la descripción del modelo, debemos especificar las preferencias, tecnologías, dotaciones y estructura de información.

- La tecnología está determinada por una función de producción agregada que utiliza trabajo y capital con retornos constantes a escala
$$y_t = F(k_t, n_t)$$
y con $F_k,\ F_n > 0$, $F_{kk},\ F_{nn} < 0$, $F_{nk} = F_{kn} > 0$.
- Las preferencias del consumidor representativo están dadas por una función separable en el tiempo
$$U(c_0, c_1, c_2, ...) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$
en donde $\beta \in (0, 1),\ u' > 0,\ u'' < 0$.
- El consumidor representativo nace con una dotación de capital inicial $\overline{k}_0$ y con una unidad de trabajo por período.
- La información disponible es completa y asumimos previsión perfecta (caso especial de expectativas racionales).

Por último, y debido que el producto puede ser consumido o invertido,
$$y_t = c_t + i_t$$
en donde
$$i_t = k_{t+1} - (1 - \delta)k_t \tag{2.31}$$
con la tasa de depreciación $\delta \in (0, 1)$.

2.3.2 El Equilibrio Competitivo

Para definir el concepto de equilibrio que utilizaremos, debemos determinar la propiedad de los factores productivos. En particular, supondremos que el consumidor representativo es dueño de los servicios del trabajo y capital y que los arrienda a la firma representativa. Además, asumiremos que este consumidor posee esta firma a través de acciones, por lo que recibe sus eventuales beneficios. En este contexto, sin embargo, sabemos que estos beneficios serán cero.

Denotemos con p_t el precio en el período t del producto final, expresado en el período 0; con w_t el precio de una unidad de trabajo entregada en el período t expresado en el período 0 y en términos del bien de consumo en el período t[24]; y por último, con r_t el precio de una unidad de capital entregada en el período t expresada en el período 0 y en términos del bien de consumo en el período t.
El consumidor representativo maximiza la utilidad a través de toda su vida sujeto a la restricción presupuestaria. La firma, por su parte, maximizará el valor presente de los beneficios de toda la vida. Su problema, sin embargo, no estará intertemporalmente conectado por lo que podremos concentrarnos en un problema estático, que será resuelto período a período.
La estructura de mercado será asumida como competitiva, por lo que tanto el consumidor representativo como la firma representativa tomarán precios como dados.

Definición 9
Un Equilibrio Competitivo (Arrow-Debreu) consiste en precios $\{p_t, r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$ y asignaciones para la firma $\left\{k_t^d, n_t^d, y_t\right\}_{t=0}^{\infty}$ y para el consumidor $\left\{c_t, i_t, k_{t+1}^s, n_t^s\right\}_{t=0}^{\infty}$ tales que

1. *Dados los precios $\{p_t, r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$, la asignación del consumidor representativo $\left\{c_t, i_t, k_{t+1}^s, n_t^s\right\}_{t=0}^{\infty}$ resuelve*

$$\max_{\left\{c_t, i_t, k_{t+1}^s, n_t^s\right\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$
$$s.a.$$
$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t (c_t + i_t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} p_t (r_t k_t^s + w_t n_t^s) + \pi \tag{2.32}$$
$$k_{t+1}^s = (1 - \delta)k_t^s + i_t$$
$$0 \leq n_t^s \leq 1$$
$$c_t, k_{t+1}^s \geq 0 \qquad \forall t \geq 0$$
$$\overline{k}_0 > 0 \tag{2.33}$$

2. *Dados los precios $\{p_t, r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$, la asignación de la firma representativa $\left\{k_t^d, n_t^d, y_t\right\}_{t=0}^{\infty}$ resuelve*

$$\pi = \max_{\left\{k_t^d, n_t^d, y_t\right\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} p_t \left(y_t - r_t k_t^d + w_t n_t^d\right)$$
$$s.a. \tag{2.34}$$
$$y_t = F\left(k_t^d, n_t^d\right) \tag{2.35}$$
$$y_t, k_t^d, n_t^d \geq 0 \qquad \forall t \geq 0 \tag{2.36}$$

[24] El salario $w_t$es real. El salario nominal está dado por $p_t w_t$.

3. *Los mercados cierran (demanda y oferta se igualan)*

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + i_t \\ k_t^s &= k_t^d \\ n_t^s &= n_t^d \end{aligned}$$

Nótese que en equilibrio, además, debe ocurrir que la restricción presupuestaria se cumpla con igualdad, que $n_t^s = n_t^d = n_t = 1$, y que $\pi = 0$.

2.3.2.1 Caracterización del Equilibrio Competitivo

Las propiedades de las funciones asumidas garantizan que las condiciones de primer orden son no sólo necesarias sino que también suficientes para la existencia de un equilibrio en la economía anterior[25].
Las propiedades que satisface el equilibrio nos permiten reescribir la restricción presupuestaria del problema 2.32 del consumidor representativo como

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t\left(c_t + i_t\right) = \sum_{t=0}^{\infty} p_t\left(r_t k_t + w_t\right)$$

Denotando por λ al multiplicador langrangeano de esta restricción presupuestaria e ignorando la no negatividad de las asignaciones, obtenemos las condiciones de primer orden con respecto a c_t, c_{t+1} y k_{t+1}

$$\begin{aligned} \beta^t u'(c_t) &= \lambda p_t && (2.37) \\ \beta^{t+1} u'(c_{t+1}) &= \lambda p_{t+1} && (2.38) \\ \lambda p_t &= \lambda\left(1 - \delta + r_{t+1}\right) p_{t+1} && (2.39) \end{aligned}$$

Combinando las ecuaciones 2.37-2.39 generamos la ecuación de Euler[26]

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = \frac{p_t}{p_{t+1}} = 1 - \delta + r_{t+1} \tag{2.40}$$

La ecuación 2.40 nos dice que la tasa marginal de sustitución entre el consumo presente y el consumo en el siguiente período, ajustada por el factor de descuento, es igual a la tasa de retorno de la inversión por un período.
Nótese que estamos imponiendo soluciones interiores. Por ello, estas condiciones se dan con igualdad.

[25] En el caso del problema del consumidor, y como consecuencia del horizonte infinito en el que el problema está definido, requeriremos también de una condición de transversalidad.

[26] Este enfoque para resolver el problema anterior es conocido como enfoque de Euler. Alternativamente, este problema puede ser expresado recursivamente, en cuyo caso se resuelve mediante el uso de programación dinámica. Una sección posterior desarrollará esta técnica.

Adicionalmente, y debido al horizone infinito en el que está definido este problema, debemos imponer una condición de transversalidad que asegure que cuando $t \to \infty$, el valor del stock capital en la economía es cero. Es decir,

$$\lim_{t\to\infty} p_t k_{t+1} = 0$$

De las condiciones de primer orden sabemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} p_t k_{t+1} &= \frac{1}{\lambda}\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t) k_{t+1} \\ &= \frac{1}{\lambda}\lim_{t\to\infty} \beta^{t-1} u'(c_{t-1}) k_t \\ &= \frac{1}{\lambda}\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t)\left(1 - \delta + r_{t+1}\right) k_t. \end{aligned}$$

Si esta condición no se cumple, una disminución en la inversión incrementaría el bienestar de la economía[27].
Del problema de la firma dado por 2.35 tenemos que

$$r_t = f'(k_t) \tag{2.41}$$

en donde $f(k_t) \equiv F(k_t, 1)$ y, debido a que la tecnología es de retornos constantes a escala,

$$w_t = f(k_t) - f'(k_t) k_t \tag{2.42}$$

Por último, de la condición de cierre del mercado del producto final,

$$y_t = f(k_t) = c_t + k_{t+1} - (1 - \delta) k_t \tag{2.43}$$

Entonces, combinando las ecuaciones 2.40, 2.41 y 2.43, tenemos la ecuación en diferencia de segundo orden

$$\frac{u'\left(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t\right)}{\beta u'\left(f(k_{t+1}) - k_{t+2} + (1-\delta)k_{t+1}\right)} = 1 - \delta + f'(k_{t+1}) \tag{2.44}$$

Resolviendo la ecuación 2.44 para la secuencia de capitales $k_1, k_2, k_3, \ldots$, podemos encontrar las secuencias para los precios de los factores productivos, w_t y r_t (de las ecuaciones 2.41 y 2.42), y para las asignaciones y_t, i_t, c_t (de las ecuaciones 2.31 y 2.43). Entonces, para completar el equilibrio competitivo, sólo falta encontrar la secuencia para el precio del producto final, p_t. Esta se obtiene de la ecuación 2.40 y de normalizar $p_0 \equiv 1$, de manera tal que

$$p_{t+1} = \frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} p_t = \frac{\beta^{t+1} u'(c_{t+1})}{u'(c_0)} \tag{2.45}$$

Es importante destacar que en esta economía la tasa de ahorro s_t, está endógenamente determinada. En particular, corresponderá cada período a $\frac{i_t}{y_t}$.

[27] Stokey, Lucas y Prescott (1989) demuestran que la ecuación de Euler y la condición de transversalidad son necesarias y suficientes para la existencia de un equilibrio en esta economía.

2.3.2.2 Estado Estacionario

Esta economía, como fue demostrado al resolver el modelo de Solow, tiene un equilibrio de largo plazo caracterizado por un estado estacionario. Es decir, uno en el que las variables per cápita se mantienen constantes en el tiempo. Si introducimos crecimiento de la población, el equilibrio de largo plazo se caracterizaría por variables absolutas creciendo a la tasa de crecimiento de la población. Por último, si agregamos además conocimiento y permitimos que crezca en el tiempo, el equilibrio de largo plazo correspondería a una senda de crecimiento balanceado y se caracterizaría por las variables per cápita creciendo a una tasa constante (determinada por el crecimiento del conocimiento).

Definición 10
Un Estado Estacionario es un Equilibrio Competitivo en el que los precios de factores y las asignaciones se mantienen constantes y el precio del producto final decrece a la tasa subjetiva de descuento intertemporal $\rho = \frac{1}{\beta} - 1$. *Es decir,* $p_t = \beta^t p^*$, $r_t = r^*$, $w_t = w^*$, $c_t = c^*$, $i_t = i^*$, $k_t = k^*$, $y_t = y^*$, *con* p^* *representando el precio en el período en que se alcanza el estado estacionario.*

El estado estacionario es obtenido de manera trivial expresando cada precio y asignación en función del capital de estado estacionario. Este, es obtenido de la ecuación 2.44 con $k_t = k^*$ para todo t,

$$f'(k^*) = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta \tag{2.46}$$

Nótese que debido a que f' es monotónicamente decreciente, podemos mostrar que existe en 2.46 un único stock de capital per cápita en estado estacionario.
Por último, nótese que la tasa de ahorro en estado estacionario está determinada por

$$s^* = \frac{f(k^*) - c^*}{f(k^*)} = \delta \frac{k^*}{f(k^*)}$$

Los precios Arrow-Debreu decrecen en el tiempo debido a que existe impaciencia, es decir, debido a que $\beta < 1$. Esto simplemente refleja el hecho que a medida que nos alejamos en el tiempo del período inicial, el valor asignado por el consumidor a una cantidad dada del bien de consumo decrece expresado en términos del período inicial. De hecho si $\beta = 1$, vemos en la ecuación 2.45 que para todo t, $p_t = p^*$.

Tarea 6: Suponga una economía neoclásica en la que hay tres factores de producción, trabajo N, capital K, y conocimiento A. La población crece a la tasa n y el conocimiento crece a la tasa g. Las leyes de movimiento para N y A están dadas por

$$N_{t+1} = (1+n)N_t \text{ y por } A_{t+1} = (1+n)A_t$$

En este contexto:

1. Defina y caracterice un equilibrio general competitivo.

2. Defina y caracterice un equilibrio con senda de crecimiento balanceado.
3. ¿Es este modelo consistente con los hechos estilizados de Kaldor? Explique.
4. ¿Qué explica la tasa de ahorro en el largo plazo en esta economía?

2.3.3 Solución Numérica del Equilibrio Competitivo

El problema anterior sólo tiene solución analítica para un conjunto limitado de funciones. Más adelante veremos un ejemplo ilustrativo al respecto. En general, sin embargo, la solución debe ser encontrada de manera numérica. Es decir, mediante el uso de métodos que aproximan el equilibrio competitivo. Estos métodos permiten encontrar mediante el uso de un computador los valores numéricos para las secuencias de consumo, inversión, capital, producto y precios que satisfacen la definición del equilibrio competitivo[28].
En el caso de la economía neoclásica descrita anteriormente, una aproximización numérica de la trayectoria de equilibrio de las principales variables puede ser obtenida de manera sencilla utilizando el método de Gauss-Seidel.

2.3.3.1 El Método de Gauss-Seidel

La ecuación de Euler en el modelo anterior está dada por la ecuación en diferencia de segundo orden en k_t

$$\frac{u'\left(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t\right)}{\beta u'\left(f(k_{t+1}) - k_{t+2} + (1-\delta)k_{t+1}\right)} = 1 - \delta + f'(k_{t+1})$$

Utilizaremos esta ecuación para generar la trayectoria completa de capital que cumple con la definición de equilibrio presentada anteriormente. Con ella podemos, como ya fue señalado, obtener la trayectoria del resto de las variables que conforman el equilibrio general competitivo. Además, sabemos que la trayectoria del capital que satisface esta ecuación de Euler, también converge monotónicamente hasta su estado estacionario dado por

$$k^* = f'^{-1}(k^*)\left[\frac{1}{\beta} - 1 + \delta\right]$$

En este contexto, reescribiendo la ecuación de Euler como

$$\Omega\left(k_t, k_{t+1}, k_{t+2}\right) = 0$$

el problema consiste en resolver la ecuación no lineal anterior dada una condición inicial $\overline{k}_0 > 0$, y una condición final k^*
Para ello, partimos suponiendo que existe un número finito T de períodos en los que la economía alcanza el estado estacionario. Luego, adivinamos, dados $\overline{k}_0$ y k^*, una secuencia $k_2^0, k_3^0, k_4^0, \ldots, k_T^0$ mediante la cual iniciamos el proceso iterativo. Sea $j = 1$ la primera iteración, el método consiste en:

[28] Una descripción de los principales métodos numéricos utilizados para resolver modelos de equilibrio general dinámicos aparece en Urrutia (1998).

1. Dados $\overline{k}_0$ y k_2^{j-1}, hallar k_1^j resolviendo

$$\Omega\left(\overline{k}_0, k_1^j, k_2^{j-1}\right) = 0$$

2. Generalmente esta ecuación no puede ser resuelta analíticamente por lo que es necesario utilizar algún método adicional para encontrar puntos fijos, por ejemplo Newton-Raphson[29].

3. Calcular $k_2^j, k_3^j, ..., k_T^j$ resolviendo de manera recursiva el sistema

$$\begin{aligned}\Omega\left(k_1^j, k_2^j, k_3^{j-1}\right) &= 0\\ \Omega\left(k_2^j, k_3^j, k_4^{j-1}\right) &= 0\\ &\vdots\\ \Omega\left(k_{T-2}^j, k_{T-1}^j, k_T^{j-1}\right) &= 0\end{aligned}$$

4. Evaluar la distancia entre k_{T-1}^j y k^*, $\left|k_{T-1}^j - k^*\right|$. Si esta distancia es menor que el criterio de tolerancia definido, terminamos y $k_t = k_t^j$, de lo contrario, regresar al primer paso con $j = 2$. Nótese que para las próximas iteraciones la secuencia adivinada inicialmente es reemplazada por la trayectoria resuelta encontrada en la iteración anterior.

El método Gauss–Seidel tiene dos restricciones relevantes: primero, a medida que el número de variables del equilibrio dadas en cada período crece, por ejemplo por la existencia de capital humano junto al capital físico, el método se torna ineficiente al requerir múltiples iteraciones; segundo, y más importante, la incorporación de incertidumbre no permite su uso. Por ello, se han desarrollado un conjunto de métodos más complejos que son tradicionalmente utilizados al resolver modelos de equilibrio general dinámicos y estocásticos. Más adelante, al desarrollar la teoría de ciclos reales, retomaremos esta discusión.

2.3.4 Crecimiento Óptimo

Consideremos el problema de un planificador social que, en el contexto de la economía anterior, busca maximizar el bienestar del individuo representativo sujeto a las condiciones tecnológicas de la economía. En este contexto, mientras consideremos un conjunto de individuos idénticos, la asignación que resuelve el problema anterior es Pareto eficiente y cualquier asignación Pareto eficiente es una solución al problema anterior.

Definición 11
En esta economía, una asignación $\{k_{t+1}, i_t, c_t\}_{t=0}^{\infty}$ *es Pareto eficiente si*

[29]Rutinas que permiten utilizar el método de Newton-Raphson para problemas generales están disponibles en variados lenguajes de programación. Un ejemplo es la serie *Numerical Recipes* disponible para los lenguajes Fortran, Gauss, C y Matlab, entre otros. Algunas versiones están disponibles en `http://www.nr.com/`.

1. *Es factible*

$$f(k_t) = c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t$$

2. *No hay otra asignación* $\left\{\tilde{k}_{t+1}, \tilde{i}_t, \tilde{c}_t\right\}_{t=0}^{\infty}$ *factible tal que*

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(\tilde{c}_t) > \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)$$

Definición 12
Un Pareto óptimo para esta economía es una asignación $\{k_{t+1}, i_t, c_t\}_{t=0}^{\infty}$, *dado* $\overline{k}_0 > 0$, *tal que resuelve el problema*

$$\begin{aligned}\max_{\{c_t,i_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)\\ s.a \quad & \\ & f(k_t) = c_t + i_t \qquad (2.47)\\ & i_t = k_{t+1} - (1-\delta)k_t\\ & c_t, k_{t+1} \geq 0 \qquad \forall t \geq 0\end{aligned}$$

Debido a que en esta economía no hay distorsiones tales como impuestos o externalidades, la solución a este problema permite obtener la asignación del equilibrio general competitivo. Además, toda asignación de equilibrio es una solución de este problema. La equivalencia entre el equilibrio general competitivo y el problema del planificador social es resultado de los teoremas del bienestar. En macroeconomía, para encontrar el equilibrio competitivo, generalmente resolvemos el problema Pareto óptimo debido a su sencillez.
Obteniendo las condiciones de primer orden del problema anterior, vemos que

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = 1 - \delta + f'(k_{t+1})$$

y combinando las ecuaciones de factibilidad y la ley de movimiento del capital en 2.47, tenemos que

$$f(k_t) = c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t$$

Por último, obtenemos los precios de los factores de manera tal que

$$\begin{aligned}r_t &= f'(k_t)\\ w_t &= f(k_t) - f'(k_t)k_t\end{aligned}$$

y la razón de precios del bien de consumo tal que

$$\frac{p_t}{p_{t+1}} = 1 + r_t^f \equiv 1 - \delta + r_{t+1} \qquad (2.48)$$

en donde r_t^f es la tasa de interés.
La solución al problema anterior es una *función de política* del tipo $k_{t+1} = g(k_t)$. Esta función indica el nivel óptimo de stock de capital mañana, dada la variable de estado hoy (k_t). Luego, todas las sendas son obtenidas utilizando la secuencia $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ a través de la función $g(\cdot)$.
Por último, nótese que si el problema es expresado en términos de mercados secuenciales (es decir, mercados que se abren cada período), el precio *spot* del único bien de consumo q_t puede ser normalizado a la unidad, los precios de los factores trabajo y capital entregados en t, r_t y w_t, estarían expresados en unidades del producto final en t, y el equilibrio estaría representado por las secuencias $\{k_{t+1}, i_t, c_t, r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$, y su solución surgiría del sistema anterior excluida la ecuación 2.48.

2.3.4.1 La Regla de Oro Modificada

Con anterioridad vimos que el modelo de Solow es dinámicamente ineficiente. Disminuyendo la acumulación de capital realizada durante la transición, el bienestar de la economía puede ser aumentado gracias al mayor nivel de consumo alcanzado en el largo plazo. En el modelo neoclásico, sin embargo, el capital de estado estacionario k^* será siempre menor que el capital asociado a la regla de oro. La mayor valoración de los individuos por el consumo presente con relación al consumo futuro, es decir, su impaciencia, acota los beneficios de un mayor consumo en el largo plazo. De hecho, y debido a que la productividad marginal del capital es decreciente, si $k^* > k^*_{oro}$, $f'(k^*) < f'(k^*_{oro})$. Pero como sabemos que,

$$f'(k^*) = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta$$

y de la ecuación 2.30 que

$$f'(k^*_{oro}) = \delta,$$

$k^* > k^*_{oro}$, implicaría que

$$\frac{1}{\beta} - 1 + \delta < \delta \Rightarrow \beta > 1.$$

Es decir, $k* < k^*_{oro}$. El k^* encontrado al resolver el problema Pareto óptimo es conocido como *Regla de Oro Modificada*[30].
Nótese que si $\beta = 1$, es decir, si los individuos no son impacientes, ambas reglas son equivalentes. Esto refleja el hecho que la sustitución intertemporal en el consumo no afecta al bienestar.

2.3.5 Un Ejemplo Ilustrativo

Con el fin de ilustrar la discusión anterior, restringiremos nuestra economía para un conjunto específico de formas funcionales. De esta forma podremos resolver analíticamente el equilibrio competitivo.

[30] Nótese que en este caso $n = 0$.

Las funciones utilizadas son

$$u(c_t) = \ln c_t \quad (2.49)$$
$$f(k_t) = Ak_t^{\alpha} \quad (2.50)$$

La función de utilidad logarítmica en 2.49 cumple con las propiedades señaladas anteriormente, es decir, es monotónica creciente y cóncava. Además, garantiza una solución interior ya que $\ln c_t$ no está definido cuando $c_t = 0$. La función de producción en 2.50 es una representación intensiva de una tecnología Cobb-Douglas en la que la productividad total de factores es constante.
En este contexto, la ecuación de Euler es

$$\frac{c_{t+1}}{\beta c_t} = 1 - \delta + \alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}$$

Esta ecuación, además, se iguala a la relación de precios Arrow-Debreu,

$$\frac{c_{t+1}}{\beta c_t} = 1 - \delta + \alpha A k_{t+1}^{\alpha-1} = \frac{p_t}{p_{t+1}} \quad (2.51)$$

La condición de factibilidad (o cierre en el mercado del producto final) es

$$c_t = Ak_t^{\alpha} - k_{t+1} + (1-\delta)k_t \quad (2.52)$$

Los precio de los factores, en unidades del único bien de consumo en el período t son

$$r_t = \alpha A k_t^{\alpha-1} \quad (2.53)$$
$$w_t = (1-\alpha) A k_t^{\alpha} \quad (2.54)$$

En estado estacionario, combinando las ecuaciones 2.51-2.53, tenemos que

$$\alpha A (k^*)^{\alpha-1} = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta$$

y por lo tanto,

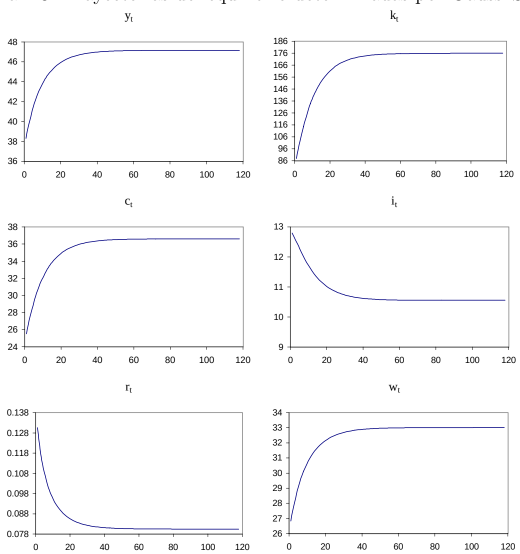
$$k^* = \left(\frac{\alpha A}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Además, la tasa de ahorro está dada por

$$s^* = \frac{\delta (k^*)^{1-\alpha}}{A} = \frac{\delta\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}$$

Por lo tanto, la tasa de ahorro aumenta a medida que incrementa la proporción del capital en la producción, la tasa de depreciación o el factor de descuento.
Por último, restringimos nuestra economía en una segunda dimensión (la primera restricción tuvo relación con la especificación de formas funcionales) para determinar un único equilibrio.

Figura 2.3: Trayectorias del equilibrio determinadas por Gauss–Seidel



En particular, utilizando el método de Gauss-Seidel y suponiendo que $\beta = 0.98$, $\alpha = 0.30$, $\delta = 0.06$ y $A = 10$, podemos obtener las trayectorias para todo el equilibrio (asignaciones y precios)[31].
Los gráficos de la Figura 2.3 muestran, consistentemente con el análisis formal realizado con anterioridad, que las variables convergen a un estado estacionario.

Tarea 7: Obtenga numéricamente las trayectorias anteriores cuando $\beta = 0.95$. Explique sus resultados y compárelas con el caso en que $\beta = 0.98$.

2.3.6 La Transición Analítica

En la sección anterior obtuvimos, para un caso particular, la solución analítica para el equilibrio de estado estacionario. Además, generamos numéricamente la transición hacia el estado estacionario de las variables que componen el equilibrio. En esta sección, obtendremos

[31]Estas trayectorias fueron obtenidas asumiendo que el capital inicial es igual a la mitad del capital de estado estacionario.

la senda de equilibrio para la asignación de manera analítica. Es decir, caracterizaremos completamente las secuencias para las asignaciones que surgen de la función de política $k_{t+1} = g(k_t)$ sin asumir una parametrización específica. Para obtener una solución analítica, estamos obligados a simplificar la economía anterior, asumiendo que $\delta = 1$.
El problema a resolver en este caso está dado para $\overline{k}_0 > 0$, por

$$\max_{\{c_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t$$
$$s.a.$$
$$Ak_t^{\alpha} = c_t + k_{t+1}$$

En este problema, debemos determinar, en cada momento del tiempo, cuál debe ser el nivel de stock de capital del período siguiente dado el nivel de stock del capital en este período. La regla que permite encontrar esta solución está dada por $k_{t+1} = g(k_t)$ y el capital de estado estacionario es el punto fijo k^*, es decir, el capital que cumple con $k^* = g(k^*)$.
La ecuación de Euler para este problema está dada por

$$\frac{Ak_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2}}{\beta\left(Ak_t^{\alpha} - k_{t+1}\right)} = \alpha A k_{t+1}^{\alpha-1} \tag{2.55}$$

La ecuación 2.55 puede ser reescrita como

$$A\left(1+\alpha\beta\right)k_{t+1}^{\alpha} - \alpha\beta A^2 k_t^{\alpha} k_{t+1}^{\alpha-1} - k_{t+2} = 0$$

Definiendo la tasa de ahorro en la economía en el período t (es decir, la fracción del producto en el período t que es ahorrada como capital para mañana) como $s_t \equiv \frac{k_{t+1}}{Ak_t^{\alpha}} = \frac{i_t}{y_t}$, y multiplicando por $\frac{1}{Ak_{t+1}^{\alpha}}$

$$(1+\alpha\beta) - \frac{\alpha\beta}{s_t} - s_{t+1} = 0 \tag{2.56}$$

Esta es una ecuación en diferencia de primer orden que tiene dos soluciones estacionarias, es decir, aquellas en las que $s_{t+1} = s_t = s$. Estas soluciones son[32]

$$s = 1 \qquad \text{y} \qquad s = \alpha\beta.$$

Sin embargo, nótese que si $s = 1$, entonces $c_t = 0$, lo que no es posible[33].
La ecuación 2.56 tiene además tres posibles soluciones no estacionarias. La Figura 2.4 muestra esta ecuación.
Vemos que s_t puede adoptar los siguientes valores:

- $s_t > 1$, en cuyo caso el consumo sería negativo.

[32]Esto es obvio de $s = 1+\alpha\beta - \frac{\alpha\beta}{s}$ que se puede reescribir como $s^2 = (1+\alpha\beta)s + \alpha\beta$ o $(s-1)(s-\alpha\beta) = 0$.
[33]Formalmente, esta posibilidad se excluye imponiendo la condición de transversalidad que asegura que el valor del capital en T cuando $T \to \infty$ es 0.

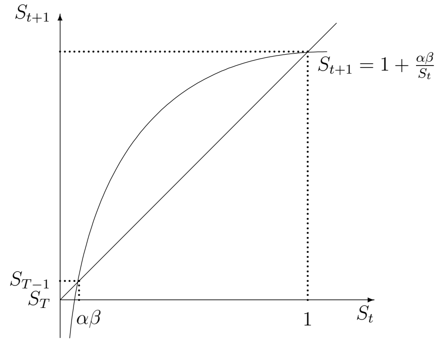


Figura 2.4: Soluciones a la ecuación de Euler.

- $s_t < \alpha\beta$, en cuyo caso la inversión sería negativa.
- $1 > s_t > \alpha\beta$, en cuyo caso $s_t \to 1$, y por lo tanto, el consumo converge a 0.

Por lo anterior, ninguna de estas soluciones es posible y el único punto fijo está dado por $s_t = \alpha\beta$ para todo t.
Entonces, la función de política está dada por

$$k_{t+1} = g(k_t) = \alpha\beta A k_t^{\alpha}.$$

La regla de acumulación está caracterizada por una inversión como fracción del producto fija, $i_t = \alpha\beta y_t$[34], y consumo $c_t = (1-\alpha\beta)y_t$. Además, sabemos que $r_t = \frac{\alpha y_t}{k_t}$ y $w_t = y_t - r_t k_t$. De esta forma, partiendo de un capital inicial k_0 dado, obtenemos $\{k_1, i_0, c_0, r_0, w_0\}$, luego, dado k_1 obtenemos $\{k_2, i_1, c_1, r_1, w_1\}$, y así sucesivamente hasta alcanzar el estado estacionario $\{k^*, i^*, c^*, r^*, w^*\}$, caracterizado en este caso por $k^* = (\beta\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ y las ecuaciones para los elementos restantes del equilibrio, totalmente determinadas por k^*.

2.3.7 Calibración del Modelo Neoclásico

El modelo neoclásico resuelto en la sección anterior reproduce los primeros cinco hechos estilizados de Kaldor. Por ello, se ha transformado en un instrumento popular para discutir aspectos de la teoría de crecimiento y de diversas aplicaciones cuantitativas en equilibrio

[34] Nótese que la tasa de inversión (o de ahorro) se incrementa cuando la productividad de la inversión (relacionada con α) es mayor y cuando la impaciencia (relacionada con β) es menor.

general. Con este fin, el modelo es típicamente resuelto de manera numérica y simulado para diversos shocks.
Para responder preguntas concretas, sin embargo, debemos restringir el modelo en dos dimensiones. Primero, utilizando formas funcionales particulares; luego, especificando el set de parámetros.
Existen dos enfoques, no necesariamente antagónicos, para parametrizar nuestra economía. El enfoque econométrico tradicional especifica el set paramétrico minimizando el Error Mínimo Cuadrado de la innovación u_t (errores en la especificación del modelo) asumiendo que el error y el diseño del modelo son ortogonales. Esto equivale a minimizar la distancia entre momentos de los datos reales y el modelo o a maximizar la función de verosimilitud de los datos dado el diseño del modelo. Es decir, se hacen supuestos con respecto a las propiedades de las series de tiempo de u_t, en particular con respecto al primer y segundo momento de u_t.
Las principales críticas a este enfoque radican en la falta de contenido económico en los criterios estadísticos utilizados para determinar los parámetros.
El segundo enfoque, conocido como calibración, consiste en elegir el valor de los parámetros de manera que el equilibrio del modelo sea consistente con algunas observaciones para alguna economía en particular. La métrica utilizada para evaluar la calidad de la calibración incluye dos etapas: primero, se simula el modelo calibrado; luego, se comparan las implicancias cuantitativas del modelo con relación a diversos momentos para las series relevantes con respecto a las observadas en los datos[35]. Por ejemplo, se estudia la desviación estándar o variabilidad, la correlación o persistencia y la autocorrelación o asociación, para consumo, inversión, producto y empleo[36]. Cooley (1998), define esta técnica de parametrización como un procedimiento que restringe el mapa entre el equilibrio competitivo y los datos de manera tal que el equilibrio generado por el modelo muestre ciertas propiedades. En teoría de ciclos, por ejemplo, estas propiedades son las asociadas con crecimiento balanceado. El modelo, por lo tanto, tendrá tantas propiedades como parámetros calibrados y formas funcionales elegidas. El modelo no nos ayudará a entender estos rasgos, sino que la respuesta a la pregunta que motivó su diseño[37].

2.3.7.1 Una Versión del Modelo Neoclásico

Para ejemplificar el uso de la calibración como método de parametrización, utilicemos una versión del modelo neoclásico en la que la población crece a una tasa n y el progreso tec-

[35] En teoría de ciclos las series utilizadas son típicamente filtradas para separar la tendencia del componente cíclico.

[36] Canova (1994) define calibración como una técnica econométrica en la que los parámetros del modelo son estimados con un criterio "económico" en vez de "estadístico".

[37] En ocasiones la palabra calibración es utilizada para referirse al uso de métodos de simulación para evaluar la capacidad explicativa de un modelo en contraste con el testeo estadístico de hipótesis sobre las restricciones entre ecuaciones. Obviamente, sin embargo, los parámetros de un modelo de equilibrio general también pueden ser estimados con métodos econométricos al mismo tiempo que el modelo es evaluado mediante el uso de simulaciones como en McGrattan (1994).

nológico adopta la forma de crecimiento ahorrador de trabajo a una tasa g[38]. Además, asumamos una función logarítmica para las preferencias y una función Cobb-Douglas para la tecnología. En este caso, el problema del planificador central consiste en resolver

$$\begin{aligned} \max_{\{C_t,K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log C_t \\ s.a. & \\ & C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = (1+g)^{(1-\alpha)t} A K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \\ & K_0 > 0 \\ & N_t = (1+n)^t N_0 \qquad \forall t \end{aligned} \tag{2.57}$$

Redefiniendo el problema en unidades efectivas de trabajo, de manera tal que $\tilde{x}_t \equiv \frac{X_t}{(1+g)^t N_t}$ para cualquier variable X, tenemos que

$$\begin{aligned} \max_{\{\tilde{c}_t,\tilde{k}_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(1+g)^t N_t \tilde{c}_t \\ s.a. & \\ & \tilde{c}_t + (1+n)(1+g)\tilde{k}_{t+1} - (1-\delta)\tilde{k}_t = A\tilde{k}_t^{\alpha} \\ & \tilde{k}_0 > 0 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Nótese que $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(1+g)^t N_t \tilde{c}_t$ puede ser aproximado por $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log \tilde{c}_t$ sin cambiar las condiciones de primer orden. Por ello, el problema 2.58 se expresa con una función de utilidad para cada período t dada por $\log \tilde{c}_t$.
Resolviendo este problema podemos demostrar que los primeros cinco hechos estilizados de Kaldor se cumplen. En particular, podemos constatar la consistencia entre los hechos estilizados de Kaldor y las implicancias de este modelo para su senda de crecimiento balanceado. En esta senda, sabemos que para todo t, $\tilde{c}_t = \tilde{c}$ y $\tilde{k}_t = \tilde{k}$.
Los hechos estilizados de Kaldor que el modelo replica son

1. $\frac{Y}{N} = (1+g)^t A\tilde{k}^{\alpha}$ crece a una tasa constante g (crecimiento estacionario en el ingreso per cápita)

2. $\frac{K}{N} = (1+g)^t \tilde{k}$ crece a una tasa constante g (crecimiento estacionario en el capital per cápita)

3. $\frac{K}{Y} = \frac{\tilde{k}^{1-\alpha}}{A}$ es constante (la razón capital a producto es constante. Esto surge de los dos hechos anteriores)

[38]Debido a que la parametrización requiere que la parte determinística del estado estacionario replique observaciones de largo plazo, continuaremos asumiendo que el modelo es determinístico. En el próximo capítulo, sin embargo, incorporaremos incertidumbre para discutir el efecto de diversos shocks en el equilibrio.

4. $\frac{rK}{Y} = \alpha$ y $\frac{wN}{Y} = 1-\alpha$ (las proporciones en el producto del capital y del trabajo son aproximadamente constantes)

5. $r - \delta = \alpha A\tilde{k}^{1-\alpha} - \delta$ (la tasa de interés es aproximadamente constante)

2.3.7.2 Calibrando la Economía de los Estados Unidos

En esta sección asignaremos valores a los parámetros de nuestro modelo de manera tal de replicar los valores promedio para ciertas series relevantes para la economía de los Estados unidos durante las últimas cuatro décadas.
Los parámetros a calibrar son: $\alpha, \beta, A, \delta, n$, y g. Utilizaremos observaciones para Estados Unidos entre los años 1960 y 1995 (es decir, el año 1960 corresponde a $t = 0$ en nuestro modelo). Los datos han sido obtenidos del Economic Report of the President (1996).
Primero generamos, en el Cuadro 2.2, las tasas de crecimiento de la población n y del progreso tecnológico g. Definiendo producción agregada Y_t como producto geográfico bruto, y empleo N_t como fuerza laboral civil. Además, utilizamos el hecho que

$$\begin{aligned} \log\frac{Y_\tau}{N_\tau} - \log\frac{Y_t}{N_t} &= \log(1+g)^\tau A\tilde{k}^{\alpha} - \log(1+g)^t A\tilde{k}^{\alpha} = (\tau - t)\log(1+g) \\ N_t &= (1+n)^t N_0 \end{aligned}$$

Luego, podemos obtener en el Cuadro 2.3 la proporción de los factores en el producto

Cuadro 2.2: Calibración para Estados Unidos.

Año	$\mathbf{Y}_t$	$\mathbf{N}_t$	$\mathbf{Y}_t/\mathbf{N}_t$	**1 + g**	**1 + n**
1960	1970,8	65778	29961	—	—
1965	2470,5	71088	34752	1,030114	1,015648
1970	2873,9	78678	36527	1,010011	1,018069
1975	3221,7	85846	37528	1,005424	1,017910
1980	3776,3	99303	38028	1,002646	1,020808
1985	4279,8	107150	39942	1,009870	1,019709
1990	4897,3	117914	41532	1,007841	1,019646
1995	5528,2	124900	44261	1,012805	1,018490
Promedio	—	—	—	**1,011245**	**1,018611**

total α, utilizando información con respecto al ingreso nacional y_t y a la compensación a empleados ajustada por ingreso a propietarios $w_t N_t$(asignamos un medio de este último a la compensación a empleados). Este parámetro es obtenido de la ecuación $\frac{wN}{Y} = 1-\alpha$. El ingreso nacional en unidades efectivas $\tilde{y}$ fue obtenido de $\tilde{y}_t = \frac{y_t}{(1+g)^t N_t}$.

Cuadro 2.3: Participación de factores para Estados Unidos.

Año	$\mathbf{y_t}$	$\mathbf{w_t N_t}$	α	$\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{t}$
1960	426,2	321,9	0,244603	29961
1965	587,8	431,5	0,265822	32863
1970	836,6	657,1	0,214559	32663
1975	1295,5	1009,5	0,220726	31733
1980	2216,1	1737,8	0,215807	30407
1985	3351,5	2554,4	0,237834	30201
1990	4611,9	3533,3	0,233873	29696
1995	5912,3	4538,6	0,232338	29926
Promedio	—	—	**0,233195**	**31070**

Por último, el Cuadro 2.4 muestra las series para la inversión doméstica privada neta ($K_{t+1} - K_t$) y el componente de depreciación en el capital δK_t. Estos datos serán utilizados para obtener la productividad total de factores A y la tasa de depreciación δ.

Cuadro 2.4: Inversión y depreciación para Estados Unidos.

Año	$(\mathbf{K}_{t+1}-\mathbf{K}_t)$	$(\mathbf{K}_{t+1}-\mathbf{K}_t)/\mathbf{Y}_t$	$\delta\mathbf{K}_t$	$\delta\mathbf{K}_t/\mathbf{Y}_t$
1960	117,1	0,059417	173,7	0,087934
1965	208,1	0,084234	205,0	0,082979
1970	171,1	0,059536	2580,0	0,089773
1975	114,8	0,035633	322,8	0,100196
1980	193,7	0,051294	400,7	0,106109
1985	274,4	0,064115	471,5	0,110169
1990	192,0	0,039205	554,8	0,113287
1995	426,0	0,077059	658,4	0,119098
Promedio	—	**0,058725**	—	**1,103087**

Utilizando las series anteriores y debido a que

$$\frac{(K_{t+1} - K_t)}{Y_t} = \frac{((1+g)(1+n) - 1)\,\tilde{k}}{\tilde{y}} = 0,058725,$$

tenemos que,

$$\tilde{k} = \frac{0,058725 * 31070}{1,030065 - 1} = 60688$$

Entonces,

$$A = \frac{\tilde{y}}{\tilde{k}^{\alpha}} = \frac{31070}{60688^{0,233}} = 2382,032 \tag{2.59}$$

$$\frac{K_t}{Y_t} = \frac{\tilde{k}^{1-\alpha}}{A} = 1,95326$$

$$\delta\frac{K_t}{Y_t} = 0,103087 \Rightarrow \delta = 0,0527.$$

Finalmente,

$$\frac{r_t K_t}{Y_t} = \alpha = 0,233 \Rightarrow r_t = r = 0,1194$$

y

$$r - \delta = 0,0666 = \frac{(1+g)(1+n)}{\beta} - 1 \Rightarrow \beta = \frac{1,011245 \times 1.018611}{1,0666} = 0,9657.$$

El Cuadro 2.5 resume la parametrización de esta economía

Cuadro 2.5: Parametrización de la economía de Estados Unidos.

Parámetros	**Valores**
α	0,233
β	0,966
δ	0,053
n	1,019
g	1,011
A	2382

Esta sección ha presentado un ejemplo en el que la parametrización del modelo corresponde a lo que conocemos como calibración. Este procedimiento ha surgido como complemento - y para muchos como sustituto - a las técnicas estadísticas de medición de parámetros tradicionalmente utilizadas entre 1950 y 1970. Su uso se asocia a una serie de ventajas con relación a los métodos econométricos tradicionales de estimación. Entre ellas, dos aparecen como especialmente relevantes: primero, el valor de los parámetros se obtiene basándose en evidencia microeconómica. Por ello, existe gran cantidad de información que puede ser utilizada; y segundo, los parámetros elegidos no corresponden a los que entregan el mejor ajuste de los datos en un sentido estadístico. En modelos calibrados se eligen los parámetros de tal manera que una pregunta del tipo "cuánto del hecho X puede ser explicado por Y" se responda de acuerdo a *alguna* métrica específica - no a una *buena* métrica. De hecho, al calibrar, algunas veces se hace que el modelo sea inconsistente con las observaciones en una dimensión de manera tal que sea consistente en otra. En las estimaciones econométricas, la importancia económica de un rechazo estadístico - o la falta de rechazo - de un modelo es difícil de interpretar. Un modelo puede ajustar los datos bien en todas las dimensiones, excepto en una y ser rechazado estadísticamente. Por último, un modelo puede no ser rechazado simplemente porque los datos son consistentes con una amplia gama de posibilidades. Finalmente, es importante mencionar algunas de las críticas que se ha hecho a la técnica de calibración como procedimiento de parametrización. En primer lugar, y debido al estado actual del conocimiento económico, no es claro que replicar ciertos momentos (covarianza, desviación estándar, etc.) de los datos sea un rasgo deseable de los modelos. Los modelos utilizados son típicamente abstracciones bastante "gruesas" de la realidad y por lo tanto, parece difícil determinar si estos modelos calibrados ofrecen información útil o no al reproducir ciertas observaciones. Además, los modelos, al ser calibrados, no siempre asocian todos los parámetros con información microeconómica. Para ciertas formas funcionales, por ejemplo, esto no es posible y se utiliza la información disponible en la literatura, es decir, el parámetro pasa a ser un objeto libre. Esta flexibilidad no permite conocer con certeza la relevancia del modelo como reproductor de evidencia. Por último, la falta de experimentos que contrasten estos modelos con otros impide saber si especificaciones diferentes pueden hacer lo mismo[39].

2.4 Formulación Recursiva

Con anterioridad obtuvimos la función de política $k_{t+1} = g(k_t)$ en el contexto del modelo neoclásico utilizando el enfoque de la ecuación de Euler. En esta sección presentamos un método alternativo para resolver las trayectorias de equilibrio basado en Bellman (1957). Este método, conocido como programación dinámica, permite encontrar la función de política explotando la recursividad del problema de crecimiento.
Primero formalizaremos el enfoque de Euler y la condición de transversalidad y luego desarrollaremos los métodos que permiten resolver el problema planteado de manera recursiva, en particular, describiremos el método de aproximaciones sucesivas y el método de adivinar y verificar.

2.4.1 El Enfoque de Euler para Optimización

El método de Euler (o enfoque basado en las condiciones de Kuhn-Tucker) consiste en manipular las condiciones de primer orden del problema bajo análisis para obtener una función de política $u_t = h(y_t)$ que relaciona la variable de control u_t (es decir aquella variable decidida por el agente optimizador) y la variable de estado y_t (es decir aquella variable que resume completamente el estado actual de la economía y que proviene del pasado). La formulación básica del problema dinámico, es decir, de la determinación de las secuencias de las variables de control y estado que maximizan el funcional objetivo, puede representarse en el caso de horizonte finito, como

$$\begin{aligned} \max_{\{u_t, y_{t+1}\}_{t=0}^{T}} \quad V = & \sum_{t=0}^{T} \phi_t(y_t, u_t) + Z(y_{T+1}) \\ s.a. \quad & \\ & y_{t+1} \leq g_t(y_t, u_t) \qquad \forall t = 1, ..., T. \qquad (2.60) \\ & y_0 \quad \text{dado} \\ & y_{T+1} \quad \text{libre} \\ & y_t, u_t \geq 0 \end{aligned}$$

[39]Ver Romer (1996).

en donde, como ya fue mencionado, u_t es la variable de control, y_t es la variable de estado, g es la ecuación de transición o de movimiento, ϕ es la función de retorno y V es el funcional objetivo.
La función de política se obtiene de las condiciones de primer orden del problema 2.60 trabajando desde el período $t = T$ hacia atrás (inducción hacia atrás).
El lagrangeano del problema 2.60 está dado por:

$$L = \sum_{t=0}^{T} \phi_t(y_t, u_t) + z(y_{T+1}) + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t \left(g_t(y_t, u_t) - y_{t+1}\right)$$

utilizando Kuhn–Tucker, encontramos las condiciones de primer orden del problema, dadas por

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial L}{\partial u_t} &\leq 0,\ u_t \geq 0,\ \tfrac{\partial L}{\partial u_t} u_t = 0 \\ \tfrac{\partial L}{\partial y_{t+1}} &\leq 0,\ y_{t+1} \geq 0,\ \tfrac{\partial L}{\partial y_{t+1}} y_{t+1} = 0 \qquad \forall t = 0, 1, 2, \ldots, T \\ \tfrac{\partial L}{\partial \lambda_t} &\leq 0,\ \lambda_t \geq 0,\ \tfrac{\partial L}{\partial \lambda_t} \lambda_t = 0 \end{aligned}$$

Suponiendo solución interior,

$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = \frac{\partial \phi_t}{\partial u_t} + \lambda_t \frac{\partial g_t}{\partial u_t} = 0 \qquad (2.61)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_{t+1}} = \frac{\partial \phi_{t+1}}{\partial y_{t+1}} + \lambda_{t+1} \frac{\partial g_{t+1}}{\partial y_{t+1}} - \lambda_t = 0 \qquad (2.62)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = = 0 g_t(y_t - u_t) - y_{t+1} \qquad (2.63)$$

Para t=T, de 2.62

$$\frac{\partial z}{\partial y_{T+1}} - \lambda_T = 0 \qquad (2.64)$$

y reemplazando en 2.61

$$\frac{\partial \phi_T}{\partial y_T} + \lambda_T \frac{\partial g_T}{\partial y_T} - \lambda_{T-1} = 0 \qquad (2.65)$$

La ecuación 2.65 junto a la ecuación de transición en $t = T$, $y_{T+1} = g_T(y_T, u_T)$ representan un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas (u_T, y_T, y_{T+1}) que permite hallar una función de política, es decir, la elección óptima para la variable de control u_T, dada la variable de estado y_T, $u_T = h(y_T)$. Nótese, además, que en $t = T$, $y_{T+1} = 0$ por condición de transversalidad.
Para $t = T - 1$, tenemos de 2.62

$$\frac{\partial \phi_T}{\partial y_T} + \lambda_T \frac{\partial g_T}{\partial y_T} - \lambda_{T-1} = 0 \qquad (2.66)$$

reemplazando 2.66 y 2.64 en 2.61

$$\frac{\partial \phi_{T-1}}{\partial u_{T-1}} + \frac{\partial g_{T-1}}{\partial u_{T-1}} \left[\frac{\partial \phi_T}{\partial y_T} + \frac{\partial g_T}{\partial y_T} \frac{\partial z}{\partial y_{T+1}} \right] = 0 \tag{2.67}$$

Nuevamente, tenemos un sistema de dos ecuaciones (la ecuación 2.67 y la ecuación de transición para $t = T-1$) y tres incógnitas (u_{T-1}, y_{T-1}, y_T).
En general, por lo tanto, para el periodo t, la función de política $u_t = h(y_t)$ se obtiene a partir de un sistema recursivo con tres incógnitas (u_t, y_t, y_{t+1}) y dos ecuaciones

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial u_t} + \frac{\partial g_t}{\partial u_t} \left[\frac{\partial \phi_{t+1}}{\partial y_{t+1}} + \frac{\partial g_{t+1}}{\partial y_t + 1} \left\{ \frac{\partial \phi_{t+2}}{y_{t+2}} + \frac{\partial g_{t+1}}{\partial y_t + 1} \left(\dots \frac{\partial z}{\partial y_{T+1}} \right) \right\} \right] = 0 \tag{2.68}$$

$$y_{t+1} = g_t(y_t, u_t) \tag{2.69}$$

Una vez obtenida la función de política para cada período, la secuencia de variables de control y estado se obtiene de acuerdo a

$$\begin{tikzcd} y_t \arrow[r] \arrow[dr] & h(y_t) \arrow[r] & u_t \arrow[dl] \\ & g(y_t, u_t) \arrow[r] & y_{t+1} \end{tikzcd}$$

Es decir, en $t = 0$ tenemos un y_0 dado y usamos la función de política $h(\cdot)$ para obtener el control óptimo u_0. Luego reemplazamos y_0 y u_0 en la ecuación de transición, con lo cual se obtiene la variable de estado en el siguiente período y_1. Se repite el procedimiento para $t = 1$ y se obtiene y_2 y u_1. Siguiendo el mismo procedimiento hasta el último período, se halla el valor óptimo de las $2T + 2$ variables que intervienen en el problema. Nótese, además, que a través de la función de política, se relaciona la variable de estado en el tiempo, $y_{t+1} = g_t(y_t, h(y_t))$.

2.4.1.1 Una Aplicación al Modelo Neoclásico

Anteriormente, generamos las trayectorias óptimas para una versión del modelo neoclásico con $\delta = 1$ utilizando, a través de las condiciones de primer orden, la función de política

$$k_{t+1} = \alpha \beta A k_t^\alpha.$$

Ahora, nuevamente generaremos de manera analítica esta función de política para ilustrar el método recursivo.
El problema del planificador social en el contexto del modelo de crecimiento de un sector con $\delta = 1$, corresponde, de acuerdo a lo anterior, a

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^T} \quad \sum_{t=0}^T \beta^t \phi(c_t)$$

$$\begin{aligned} &s.a. \\ &c_t + k_{t+1} = f(k_t) \qquad \forall t = 1, \dots, T. \\ &k_0 > 0 \qquad \text{dado} \\ &k_{T+1} \quad \text{libre} \\ &k_{t+1}, c_t \geq 0 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Entonces, asumiendo que $\phi(c_t) = \ln c_t$ y que $f(k_t) = Ak_t^\alpha$, el langrangeano para el problema 2.70 está dado por:

$$L = \sum_{t=0}^T \beta^t \ln(Ak_t^\alpha - k_{t+1})$$

y la condición de primer orden con respecto a k_{t+1} es

$$-\frac{\beta^t}{Ak_t^\alpha - k_{t+1}} + \frac{\beta^{t+1}\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}}{Ak_{t+1}^\alpha - k_{t+2}} \leq 0 \quad (= 0 \text{ si } k_{t+1} > 0)$$

En $t = T$ (inducción hacia atrás)

$$-\frac{\beta^T}{Ak_T^\alpha - k_{T+1}} \leq 0 \quad (= 0 \text{ si } k_{T+1} > 0)$$

y de Kuhn-Tucker,

$$\frac{\partial L}{\partial k_{T+1}} k_{T+1} = \frac{-\beta^T}{Ak_T^\alpha - k_{T+1}} k_{T+1} = 0.$$

Entonces, $k_{T+1} = 0$, ya que tanto el consumo $c_T = Ak_T^\alpha - k_{T+1}$ como el factor de descuento β son estrictamente positivos.
En $t = T-1$,

$$-\frac{\beta^{T-1}}{Ak_{T-1}^\alpha - k_T} + \frac{\beta^T \alpha A k_T^{\alpha-1}}{Ak_T^\alpha - k_{T+1}} = 0$$

y reemplazando $k_{T+1} = 0$

$$k_T = \alpha\beta A k_{T-1}^\alpha \frac{1}{1+\alpha\beta}$$

En $t = T-2$,

$$-\frac{\beta^{T-2}}{Ak_{T-2}^\alpha - k_{T-1}} + \frac{\beta^{T-1}\alpha A k_{T-1}^{\alpha-1}}{Ak_{T-1}^\alpha - k_T} = 0$$

y reemplazando el anterior k_T,

$$k_{T-1} = \alpha\beta A k_{T-2}^\alpha \frac{(1+\alpha\beta)}{1+\alpha\beta+\alpha^2\beta^2}$$

En general, cuando $T \to \infty$, la función de política tiende a

$$k_{t+1} = \alpha\beta A k_t^\alpha \tag{2.71}$$

que es la misma función de política que obtuvimos con anterioridad[40].

[40]La condición de transversalidad para este problema está dada por: $\lim_{t\to\infty} \beta^{t+1} \frac{\alpha A k_t^\alpha}{Ak_t^\alpha - k_{t+1}} = 0$.

2.4.2 Programación Dinámica

La solución al problema del planificador presentado con anterioridad exige que maximicemos sobre secuencias infinitas. En particular, debemos encontrar una secuencia óptima (k_1,k_2,k_3,....) que resuelva el problema representado por la ecuación 2.70. La naturaleza estacionaria y recursiva de este problema, sin embargo, permite utilizar un método de solución más sencillo que el ofrecido por el enfoque de Euler.

El método utilizado se conoce como programación dinámica y se basa en el principio de optimalidad. Este principio establece que en cualquier período t, si el plan de decisiones (variables de control) es óptimo, dado el vector de variables de estado, el plan de decisiones futuras también será óptimo en cualquier período $\tau > t$[41].

A través de la programación dinámica, y aprovechando la naturaleza estacionaria de este problema, podemos encontrar un problema de maximización más sencillo que el presentado en la sección anterior cuya solución resuelve el problema original.

El problema anterior puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} w(k_0) &= \max_{\substack{0\le k_{t+1}\le f(k_t)\\ k_0 \text{ dado}}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t)-k_{t+1}) \\ &= \max_{\substack{0\le k_1\le f(k_0)\\ k_0 \text{ dado}}} \left(u(f(k_0)-k_1) + \beta \left[\max_{\substack{0\le k_{t+1}\le f(k_t)\\ k_1 \text{ dado}}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(f(k_t)-k_{t+1}) \right] \right) \\ &= \max_{\substack{0\le k_1\le f(k_0)\\ k_0 \text{ dado}}} \left(u(f(k_0)-k_1) + \beta \left[\max_{\substack{0\le k_{t+2}\le f(k_{t+1})\\ k_1 \text{ dado}}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t} u(f(k_{t+1})-k_{t+2}) \right] \right) \end{aligned}$$

Es decir, a medida que avanzamos en el tiempo la función objetivo se mantiene inalterada. El problema es formalmente idéntico, independientemente del momento en el tiempo en que nos encontremos en el futuro (el problema es estacionario en el sentido que los agentes no envejecen y la tecnología y función de utilidad no cambian en el tiempo). Lo único que cambia es la variable de estado, en este caso el stock de capital dado sobre el que se maximiza. Por esto, el problema 2.70 puede ser nuevamente reescrito como,

$$w(k_0) = \max_{\substack{0\le k_{t+1}\le f(k_t)\\ k_0 \text{ dado}}} u(f(k_0)-k_1) + \beta w(k_1) \tag{2.72}$$

Nótese que ahora el problema es efectivamente más sencillo pues en vez de resolver un problema de dimensión infinita, la optimización se realiza sólo sobre un número, k_1[42].

[41] Esta propiedad también es conocida como consistencia temporal.

[42] La única dificultad radica en que la maximización se realiza para todo posible capital k. Esto, aunque exige mayor trabajo en los experimentos computacionales, es igualmente más sencillo (salvo en casos muy específicos) que resolver para encontrar una secuencia infinita de capitales $\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$.

La solución de este problema requiere que identifiquemos la función $w(\cdot)$ que aparece a ambos lados de la ecuación (el problema es recursivo). En lo que sigue discutiremos distintos métodos para ello.

Con el fin de especificar el problema de manera recursiva, modificamos la notación, en donde $w(\cdot)$ está asociada con la formulación secuencial, para denotar con $v(\cdot)$ la función correspondiente para la formulación recursiva del problema. Entonces,

$$v(k) = \max_{0\le k'\le f(k)} u(f(k)-k') + \beta v(k') \tag{2.73}$$

con $v(k)$ siendo interpretada como la utilidad descontada para toda la vida del agente representativo a partir del período actual hacia el futuro en un contexto en el que el planificador social, dado el stock de capital al inicio de actual período, asigna óptimamente el consumo a través del tiempo para la familia[43]. En este contexto, la variable k representa el estado de la economía y la variable k' representa la decisión o control.

La ecuación 2.73 será llamada un ecuación funcional (o ecuación de Bellman). Su solución es una función en vez de un vector de valores. En particular, la solución es una función v que resuelve 2.73 y una función óptima de política $k' = g(k)$ que denota el valor óptimo de k' para todo posible valor de k.

La ecuación funcional enfatiza que la utilidad descontada para toda la vida del agente representativo está dada por la utilidad que el agente recibe hoy, $u(f(k)-k')$, más la utilidad descontada para toda la vida a partir de mañana. Esta función muestra el *trade off* que existe entre utilidad hoy, a través de mayor consumo hoy, y utilidad mañana, a través de mayor acumulación de capital hoy.

2.4.2.1 Método de Adivinar y Verificar

Este método requiere que adivinemos una forma funcional particular para la solución y luego que verifiquemos las condiciones bajo las cuales esta forma funcional es efectivamente una solución al problema que estamos estudiando. En el caso del problema del planificador en una economía neoclásica como la descrita en las secciones anteriores, adivinaremos $v(k) = a_0 + a_1 \ln k$ en donde a_0 y a_1 son coeficientes que están determinados.

En primer lugar, debemos resolver el problema de maximización dada nuestra adivinanza. Es decir, resolver

$$\max_{0\le k'\le Ak^{\alpha}} \ln(Ak^{\alpha}-k') + \beta(a_0 + a_1 \ln k')$$

La condición de primer orden es[44]

[43] La igualdad entre las funciones w y v surge del principio de optimalidad. La existencia de una única solución al problema recursivo está garantizada por el teorema del *contraction mapping*. Para una descripción detallada de esta literatura ver Stokey, Lucas y Prescott (1989).

[44] Estas condiciones son necesarias y suficientes para la única solución. La restricción no es relevante ya que utilizamos una función objetivo estrictamente cóncava y el set de restricción es compacto, para cualquier k dado.

$$\begin{aligned}\frac{1}{Ak^{\alpha}-k'} &= \frac{\beta a_1}{k'} \\ \Rightarrow k' &= Ak^{\alpha}\frac{\beta a_1}{1+\beta a_1}.\end{aligned}$$

Luego, evaluamos la solución anterior en el óptimo. Es decir, el lado derecho de la ecuación de Bellman está dado por

$$\begin{aligned}& \ln(Ak^{\alpha}-k')+\beta(a_0+a_1\ln k') \\ = \;& \ln(\frac{Ak^{\alpha}}{1+\beta a_1})+\beta a_0+\beta a_1\ln Ak^{\alpha}\frac{\beta a_1}{1+\beta a_1}\end{aligned}$$

Entonces, todo lo que acompaña a $\ln k$ representa a a_1 y el resto representa a a_0. Es decir,

$$a_0+a_1\ln k=\ln(\frac{Ak^{\alpha}}{1+\beta a_1})+\beta a_0+\beta a_1\ln Ak^{\alpha}\frac{\beta a_1}{1+\beta a_1}$$

De esta forma, podemos despejar los coeficientes consistentes con el óptimo. En particular,

$$\begin{aligned}a_0 &= \beta a_0+\ln\left[\frac{1}{1+\beta a_1}A\right]+\beta a_1\ln\left[\frac{\beta a_1}{1+\beta a_1}A\right] \\ a_1 &= \alpha(1+\beta a_1)\Rightarrow a_1=\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\end{aligned}$$

por lo que

$$a_0=\frac{1}{1-\beta}\left[\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\ln\alpha\beta+\frac{\ln A}{1-\alpha\beta}+\ln(1-\alpha\beta)\right]$$

Finalmente, la función de política óptima está dada por

$$k'=Ak^{\alpha}\frac{\beta a_1}{1+\beta a_1}=Ak^{\alpha}\frac{\alpha\beta/(1-\alpha\beta)}{1/(1-\alpha\beta)}=\alpha\beta Ak^{\alpha} \tag{2.74}$$

que es la misma función de política óptima encontrada con anterioridad[45]. Nótese que para este ejemplo específico la política óptima para el planificador social de acuerdo a la ecuación 2.71 es ahorrar (invertir en capital para mañana) una fracción constante $\alpha\beta$ del producto Ak^{α}. Esto significa que el consumo debe ser una fracción $1-\alpha\beta$ del producto.

Finalmente, la secuencia de stock de capital que resuelve el problema secuencial está dada por

$$k_0 \text{ dado, } k_1=g(k_0)=\alpha\beta Ak_0^{\alpha}, k_2=\alpha\beta Ak_1^{\alpha}=(\alpha\beta A)^{1+\alpha}k_0^{\alpha^2}.$$

En general, $k_t=(\alpha\beta A)^{\sum_{j=0}^{t-1}\alpha^j}k_0^{\alpha^t}$ y en el límite, con $\alpha\in(0,1)$, para todo $k_0>0$ dado,

$$\lim_{t\to\infty}k_t=(\alpha\beta A)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

que es consistente con 2.74 para k en estado estacionario.

[45] Aunque en este caso específico la solución es única, en general puede haber otras soluciones para la ecuación funcional.

2.4.2.2 Método de Aproximaciones Sucesivas

Un método alternativo al de adivinar y verificar consiste en resolver de atrás hacia adelante el problema fijando el número de períodos en T y partiendo de una función $v_{T+1}(k)=0$ que representa a la función de valor en el período $T+1$. Se resuelve este problema para la función de valor y regla de política e incorpora la solución en el problema en $T-1$ y así sucesivamente hasta que tanto la ecuación de Bellman como la función de política converjan a una solución v y g.

En particular, la solución en $T+1$ es $k_{T+1}=g(k_T)=0$. Luego, en $t=T$ tenemos

$$\begin{aligned}v_T(k_T) &= \max_{0\le k_{T+1}\le Ak_T^{\alpha}}\ln(Ak_T^{\alpha}-0)+\beta v_{T+1}(0) \\ &= \ln Ak_T^{\alpha} \\ &= \ln A+\alpha\ln k_T\end{aligned}$$

Luego, en $t=T-1$ tenemos

$$\begin{aligned}v_{T-1}(k_{T-1}) &= \max_{0\le k_T\le Ak_{T-1}^{\alpha}}\ln(Ak_{T-1}^{\alpha}-k_T)+\beta v_T(k_T) \\ &= \max_{0\le k_T\le Ak_{T-1}^{\alpha}}\ln(Ak_{T-1}^{\alpha}-k_T)+\beta(\ln A+\alpha\ln k_T)\end{aligned}$$

que podemos optimizar con respecto a k_T. En particular,

$$\frac{\partial v_{T-1}}{\partial k_T}=0\Rightarrow k_T=k_{T-1}^{\alpha}\frac{\alpha\beta A}{1+\alpha\beta}$$

que, reemplazado en la función de valor para $T-1$, nos permite obtener su máximo.

En $t=T-2$, tenemos

$$\begin{aligned}v_{T-2}(k_{T-2}) &= \max_{0\le k_{T-1}\le Ak_{T-2}^{\alpha}}\ln(Ak_{T-2}^{\alpha}-k_{T-1})+\beta v_{T-2}(k_{T-1}) \\ &= \max_{0\le k_{T-1}\le Ak_{T-2}^{\alpha}}\ln(Ak_{T-2}^{\alpha}-k_{T-1})+\alpha\beta\ln k_{T-1}+\alpha^2\beta^2\ln k_{T-1}+J)\end{aligned}$$

con

$$J=\beta\left[\ln\frac{A}{1+\alpha\beta}+\alpha\beta\ln\frac{\alpha\beta A}{1+\alpha\beta}+\beta\ln A\right]$$

La solución a este problema está dada por

$$\frac{\partial v_{T-2}}{\partial k_{T-1}}=0\Rightarrow k_{T-1}=Ak_{T-1}^{\alpha}\frac{(\alpha\beta+\alpha^2\beta^2)}{1+\alpha\beta+\alpha^2\beta^2}$$

En términos genéricos, la solución debería ser

$$k'=Ak^{\alpha}\frac{(\sum_{i=1}^{t-1}\alpha^i\beta^i)}{\sum_{i=0}^{t-1}\alpha^i\beta^i}$$

que cuando $t \to \infty$, converge a la solución anterior dada por la ecuación 2.74, es decir,

$$k' = \alpha\beta A k^{\alpha}.$$

La función de valor óptima converge a:

$$V(k) = \frac{1}{1-\beta}\left[\ln(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\ln\alpha\beta\right] + \frac{1}{1-\alpha\beta}\ln k^{\alpha}.$$

2.4.2.3 Solución Numérica

El método de aproximaciones sucesivas requiere que, para todo k, en cada iteración encontremos la función de política $k' = g(k)$. De esta forma encontramos la función de valor $v_n(k)$ que luego incorporamos en la ecuación de Bellman para $v_{t-1}(k)$. Esto, sin embargo, debería ser realizado infinitas veces. Por ello, aproximamos la solución analítica con algún procedimiento numérico y el uso de un computador.
Por ejemplo, para ilustrar este procedimiento, supongamos que k y k' pueden tomar valores solamente del set $\Omega = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. En este caso la función de valor consiste en cinco números $(v_t(1), v_t(3), v_t(5), v_t(7), v_t(9))$.
La aplicación numérica del algoritmo anterior requiere que tomemos un valor inicial $v_0(k) = 0$ para todo $k \in \Omega$ y valores para los parámetros. Por ejemplo, $\alpha = 0,3, \beta = 0,98$, y $A = 10$.
Luego, resolvemos

$$v_1(k) = \max_{0 \leq k' \leq 10k^{0,3}} \{\ln(10k^{0,3} - k') + 0,98 * 0\}$$

y obtenemos el k' que maximiza $v_1(k)$. Con ellos, resolvemos

$$v_2(k) = \max_{0 \leq k' \leq 10k^{0,3}} \{\ln(10k^{0,3} - k') + 0,98 v_1(k')\}$$

y así sucesivamente hasta que $v_n(k)$ y $v_{n-1}(k)$ sean lo suficientemente parecidas. Es decir, satisfagan el criterio de tolerancia asumido.
Nótese, por último, que estamos comparando funciones. Utilizaremos la norma (distancia) que permita determinar si ambas funciones son o no iguales. En particular, con un criterio de tolerancia ε, el proceso de iteración se detiene cuando

$$\|v_n(k) - v_{n-1}(k)\| < \varepsilon.$$

Tarea 8: Suponga un individuo que cuenta con un stock de ahorros igual a S_t. Cada período el individuo retira de sus ahorros un monto igual a C_t para destinarlo a bienes de consumo. El stock de ahorros remanente $(S_t - C_t)$ se deposita en un banco que paga una tasa por período constante e igual a r. Esta operación se repite período a período hasta el momento T.
El problema que enfrenta el consumidor está representado por:

$$\max \quad \sum_{t=0}^{T} \beta^t \ln C_t$$

$$\begin{aligned} &s.a. \\ &\quad S_{t+1} \leq (1+r)(S_t - C_t) \quad \forall t = 0, 1, \ldots, T \\ &\quad S_0 > 0 \\ &\quad S_t, C_t \geq 0 \end{aligned}$$

1. Desarrolle la ecuación de Euler para este problema.
2. Encuentre la función de política para este problema.
3. Plantee este problema recursivamente y obtenga la función de política y función de valor. Utilice el método de aproximaciones sucesivas.
4. Suponga ahora que el horizonte temporal es infinito. Obtenga la función de política, función de valor y función de valor corriente utilizando el método de "adivinar y verificar". (*Hint: Adivine que la función de política toma la forma $C_t = \chi S_t$ dónde χ constituye una constante por determinar.*).

Tarea 9: Deje que $V(k_t, k_{t+1})$ resuelva:

$$\begin{aligned} \max \quad & \ln c_t \\ s.a. \quad & \\ & c_t + k_t + 1 \leq \theta k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha} \\ & l_t \leq 1 \end{aligned}$$

para k_t, k_{t+1} fijos.

1. ¿Qué es $V(k_t, k_{t+1})$?
2. Escriba las condiciones de Euler y la condición de transversalidad para el problema
$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t V(k_t, k_{t+1}) \\ s.a. \quad & \\ & k_0^* \geq k_0 \end{aligned}$$
3. Considere el problema de pogramación dinámica con ecuación funcional
$$V(k) = \max_{k'} v(k, k') + \beta V(k').$$
Adivine que $V(k)$ tiene la forma $\alpha_1 + \alpha_2 \ln k$ y resuelva para α_1 y α_2.
4. ¿Cuál es la función de política $g(k)$ tal que $k' = g(k)$? Verifique que $k_{t+1} = g(k)$ satisface las ecuaciones de Euler.

2.5 Crecimiento Endógeno

El modelo neoclásico de crecimiento asume una tasa de crecimiento exógena. En este contexto, las economías convergen a una tasa de crecimiento determinada por elementos ajenos a nuestros modelos. Sólo las condiciones tecnológicas o estructurales de la economía pueden explicar las distintas tasas de crecimiento entre países. La evidencia empírica, sin embargo, sugiere que la tasa de crecimiento en el largo plazo está endógenamente determinada por el equilibrio, es decir, por las decisiones adoptadas por los agentes durante sus procesos de optimización. En este contexto, resulta interesante intentar modelar los determinantes del crecimiento económico. Por ejemplo, a través del análisis del impacto de distintas políticas gubernamentales en la tasa de crecimiento sostenible en una economía. Si, en el largo plazo, los cambios en el ingreso per cápita están dados fundamentalmente por progreso tecnológico, ¿puede un subsidio a la investigación y desarrollo aumentar la tasa de crecimiento de un país?.
Adicionalmente, esta literatura intenta explicar la magnitud y persistencia en las diferencias en ingreso per cápita entre países ricos y pobres.
En lo que sigue desarrollamos algunos modelos sencillos asociados a la literatura de crecimiento endógeno, en los que extendemos la teoría de crecimiento neoclásico para permitir innovaciones determinadas por el mercado.

2.5.1 El Modelo AK

Supongamos una economía en la que existe un consumidor representativo con preferencias dadas por

$$U_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-1/\sigma}}{1-1/\sigma}; \qquad \sigma > 0, \sigma \neq 1$$

en donde c_t es el consumo del único producto final[46]. Este bien puede ser consumido o invertido y es producido con una tecnología de retornos constantes a escala que utiliza solamente capital. La función de producción está dada por

$$F(K_t, N_t) = AK_t$$

que en forma intensiva puede ser reescrita como

$$f(k_t) = y_t = Ak_t$$

Esta función, a diferencia de la tradicionalmente utilizada en un contexto neoclásico con capital y trabajo, no tiene rendimientos decrecientes al capital.

[46]Esta función de utilidad instantánea es isoelástica. Es decir, la elasticidad de sustitución del consumo en dos momentos cualquiera del tiempo es constante e igual a σ. Cuando $\sigma \to 1$, la función se transforma en logarítmica. En modelos con incertidumbre, este coeficiente tiene una segunda interpretación, dada por el inverso del coeficiente de aversión relativa al riesgo, definido como $-u''(c)c/u'(c)$. Por ello, esta función también es conocida como de Aversión Relativa al Riesgo Constante (*CRRA*).

Suponemos, además, que la inversión está caracterizada por una ecuación que define la ley de movimiento del capital de acuerdo a

$$i_t = (1+n)k_{t+1} - (1-\delta)k_t$$

en donde n es la tasa de crecimiento de la población, es decir,

$$N_{t+1} = (1+n)N_t$$

Resolviendo el problema del consumidor, tenemos la ecuación tradicional de Euler,

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = \frac{1-\delta+f'(k_{t+1})}{1+n}$$

que en este contexto corresponde a[47]

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{1/\sigma} = \frac{1-\delta+A}{1+n} \tag{2.75}$$

Finalmente, la condición de cierre en el mercado del producto final está dada por

$$Ak_t = c_t + (1+n)k_{t+1} - (1-\delta)k_t$$

En el modelo neoclásico tradicional (es decir con $f''(k) < 0$), el equilibrio de largo plazo está caracterizado por un estado estacionario, es decir, c_t, k_t, y_t e i_t permanecen constantes. En este modelo, sin embargo, podemos ver que no existe un estado estacionario debido a que las asignaciones no permanecen necesariamente constantes.
La ecuación 2.75 requeriría que, en estado estacionario

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1-\delta+A}{1+n} \tag{2.76}$$

Sin embargo, no existe ninguna variable en esta ecuación que permita ajustar la igualdad para cualquier especificación paramétrica. La ecuación 2.76 sólo se cumple en un caso particular, dado el set de parámetros que la caracteriza completamente.
El modelo posee una senda de crecimiento balanceada en la que las asignaciones crecen a la misma tasa g, tal que

$$1+g = \frac{c_{t+1}}{c_t} = \left(\frac{\beta(1-\delta+A)}{1+n}\right)^{\sigma}$$

La Figura 2.5 muestra que para toda productividad marginal del capital $f'(k)$, existe una única tasa de crecimiento en el consumo deseada, dada por

$$g = \left(\frac{\beta(1-\delta+A)}{1+n}\right)^{\sigma} - 1 \tag{2.77}$$

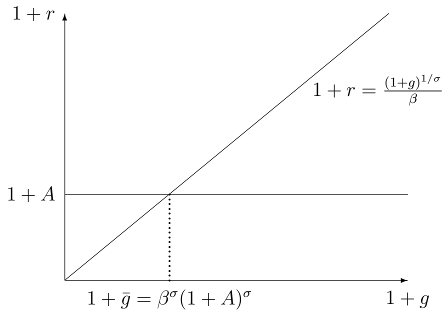


Figura 2.5: Crecimiento del consumo en el modelo AK.

Esta tasa caracteriza a la senda de crecimiento balanceada de la economía, que está dada por

$$c_t = [A - (n + g + ng + \delta)]\, k_t = \frac{A - (n + g + ng + \delta)}{A} y_t$$

Por último, la tasa de ahorro, que es constante, está dada por

$$s = \frac{y_t - c_t}{y_t} = \frac{n + g + ng + \delta}{A}.$$

El modelo Ak tiene cuatro implicancias interesantes:

1. Cambios en la tasa de ahorro afectan permanentemente a la tasa de crecimiento de la economía. Por ejemplo, si aumenta la paciencia de los individuos (mayor β), en la ecuación 2.77 vemos que aumenta g. En el modelo neoclásico, los cambios en la tasa de ahorro afectan la transición hacia el estado estacionario, pero no afectan la tasa de crecimiento a la que se converge, la que está exógenamente determinada.

2. No existe convergencia condicional ya que la tasa de crecimiento de la economía es independiente de las condiciones iniciales. Es decir, para cualquier $k_0 > 0$ dado, la asignación en $t = 0$ satisface la ecuación 2.77. En este contexto, dos economías con la misma especificación paramétrica pero con distintas condiciones iniciales, mantienen permanentemente su brecha. En el modelo de Solow, sin embargo, estas economías convergen al mismo nivel de ingreso per cápita y a la misma tasa de crecimiento.

[47]Nótese que $f'(k_t) = A$ es constante para todo t. Es decir, el capital no presenta retornos decrecientes.

3. Este modelo no exhibe transiciones. La convergencia hacia la senda de crecimiento balanceado es instantánea. Esto se debe a que, para todo t, $f'(k_t) = A$.

4. Por último, nótese que, a diferencia de lo que ocurre en otros modelos de crecimiento endógeno más complejos, en esta economía los teoremas del bienestar se cumplen y los retornos al capital son equivalentes desde una perspectiva social y privada. Romer (1986) y Romer (1990) inician una literatura que desarrolla modelos en los que las políticas gubernamentales pueden alterar el crecimiento de largo plazo, a través de *learning by doing* y de investigación y desarrollo, respectivamente. El modelo Ak, aunque teóricamente más pobre que estos nuevos modelos, contribuye a entender de manera sencilla las bases del crecimiento endógeno.

2.5.2 La Incorporación de *Learning by Doing*

En la versión anterior del modelo AK, el equilibrio era eficiente. En lo que sigue extenderemos este modelo incorporando externalidades con el fin de ilustrar el rol potencial que tiene la autoridad económica como generadora de crecimiento.
Al igual que en la sección anterior, supongamos que las preferencias están descritas por una función isoelástica, de manera tal que la ecuación de Euler está dada por

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{1/\sigma} = \frac{1 - \delta + f'(k_{t+1})}{1+n} \tag{2.78}$$

La función de producción de una firma individual j, sin embargo, está representada por

$$f^j(k_t^j) = y_t^j = A(k_t^j)^{\alpha} K_t^{1-\alpha}$$

en donde k^j es el nivel de capital por trabajador de una firma j y K es el nivel promedio de capital por trabajador para toda la economía.
En este contexto, cada firma enfrenta retornos decrecientes a su propio capital pero la función de producción enfrenta retornos constantes a escala en k^j y K.
La ecuación 2.78 representa la existencia de externalidades en el proceso productivo. A mayor nivel de capital promedio en la economía, mayor la productividad marginal de la inversión en cada empresa.
Cada firma visualiza su productividad marginal como

$$f^{j'}(k^j) = \alpha A \left(\frac{K}{k^j}\right)^{1-\alpha}$$

que en equilibrio con $k^j = K$, está dada por

$$f^{j'}(k^j) = \alpha A \tag{2.79}$$

La ecuación 2.79 combinada con la ecuación de Euler 2.78 determinará que, en equilibrio, la tasa de crecimiento en estado estacionario de la economía esté dada por

$$1+\hat{g}=\frac{c_{t+1}}{c_t}=\left(\frac{\beta(1-\delta+\alpha A}{1+n}\right)^{\sigma} \tag{2.80}$$

Comparando esta tasa de crecimiento con la encontrada en 2.77, vemos que, debido a que las firmas no internalizan la externalidad que generan en la producción de las otras firmas, la economía crece a una tasa subóptima. En otras palabras, el mercado genera menor inversión que la socialmente deseada.
La solución de este problema por parte de un planificador social es obtenida al resolver

$$\begin{aligned}
\max_{\{c_t,k_{t+1},i_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\frac{c_t^{1-1/\sigma}}{1-1/\sigma}; \qquad \sigma>0,\sigma\neq 1\\
s.a \quad & \\
& y_t=Ak_t\\
& y_t=c_t+i_t\\
& i_t=(1+n)k_{t+1}-(1-\delta)k_t \qquad \forall t
\end{aligned}$$

La tasa de crecimiento óptima g^*, que surge de este problema, es igual a la encontrada con anterioridad, y dada por 2.77, es decir,

$$g^*=g>\hat{g}$$

Para alcanzar la tasa óptima de crecimiento g^*, el gobierno puede subsidiar el retorno a la inversión privada de forma tal de aumentarlo desde αA hasta A. Un subsidio a la producción bruta en $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ permite generar el resultado deseado[48].
Los modelos anteriores tenían la propiedad que un país puede sostener un crecimiento indefinido en el ingreso per cápita a través de enfatizar el uso del capital. La evidencia empírica, sin embargo, no apoya esta propiedad. Por ello, modelos recientes en la literatura de crecimiento endógeno han incorporado la existencia de innovaciones como una actividad económica que utiliza recursos en la economía. Este énfasis microeconómico en el proceso de investigación y desarrollo en las industrias permite caracterizar de mejor forma el rol de la autoridad en el crecimiento económico. Un ejemplo de esta literatura está dado por Romer (1990).

2.5.3 Limitaciones de la Teoría de Crecimiento Endógeno

Los modelos con crecimiento endógeno han permitido, a través de la eliminación del supuesto de rendimientos decrecientes al capital, el desarrollo de economías en las que el crecimiento

[48]Nótese que este subsidio puede ser financiado con un impuesto constante y proporcional al consumo que, en este contexto sin ocio, no distorsiona.

económico resulta del proceso de optimización de los agentes y sus tasas pueden ser sostenidas de manera estable en el tiempo. En este contexto, podemos explicar, al menos en términos teóricos, la existencia de diferentes tasas de crecimiento entre países y la falta de convergencia en ingresos per cápita[49]. Esta literatura ha permitido enfocar los procesos de investigación y desarrollo y de acumulación de capital humano desde una perspectiva microeconómica. Sin embargo, existen diversas limitaciones asociadas a esta teoría. En particular:

1. Algunos de estos modelos conducen a crecimiento explosivo, inconsistentemente con la evidencia empírica.

2. No es posible caracterizar la naturaleza de las externalidades en esta teoría dada la evolución experimentada por las economías de mercado durante los últimos 50 años. En particular, no entendemos cómo operan las externalidades o de qué modo las actividades privadas potencian a los bienes y servicios públicos.

3. Estos modelos no explican por qué los países presentan tasas de crecimiento diferentes. Sólo presentan una abstracción teórica en la que esto ocurre. Una línea de investigación reciente que intenta explicar, a través de barreras a la adopción de tecnologías, la distribución mundial de ingreso per cápita, es la desarrollada en Parente y Prescott (2000). En este trabajo, la existencia de derechos monopólicos protegidos en diversos sectores generan diferencias en productividad total de factores como las observadas entre países. En esta misma línea de investigación, un paso adicional consiste en endogeneizar las políticas que generan derechos monopólicos protegidos.

[49]La existencia o no de convergencia entre países no es un hecho que esté empíricamente demostrado

Capítulo 3

Ciclos Económicos

3.1 Medición de los Ciclos Económicos

3.2 Los Hechos Estilizados

3.3 Teoría de Ciclos Reales

3.3.1 El Modelo Básico

3.3.2 El Equilibrio Competitivo

3.3.3 El Problema del Planificador Social

3.3.4 Calibración del Modelo

3.3.5 Solución Numérica del Equilibrio Competitivo

3.3.6 Implicancias del Modelo

Capítulo 4

Política Macro en Equilibrio General

Bibliografía

[1] Allais, Maurice. , 1947

[2] Bellman, . , 1957

[3] Bergoeing, Kehoe y Soto, ., 2001.

[4] Canova, Fabio. , 1994.

[5] da Rocha, José María, E. Giménez y F. Lores. , 2000.

[6] Diamond, . , 1965.

[7] Domard, . , 1946.

[8] Economic Report of the President. , 1996.

[9] Gale, Douglas. , 1973.

[10] Harrod, . , 1939.

[11] Kehoe, Timothy. , 1989.

[12] Krueger, Dirk. , 2000.

[13] Lucas, Robert. “Why Capitals ...?”, 1990.

[14] Lucas, Robert. “On the Mechaniscs of Economic Development”, 1988.

[15] McGrattan, Elen. , 1994.

[16] Mankiw, Romer y Weil. , 1992.

[17] Parente, Steven y Edward Prescott. *Barriers to Riches.* The MIT Press, 2000.

[18] Phelps, . , 1967.

[19] Romer, David. *Advanced Macroeconomics.* McGraw-Hill, 1996.

[20] Romer, Paul. , 1990.

[21] Romer, Paul. , 1986.

[22] Samuelson, Paul. , 1958.

[23] Solow, Robert. , 1956.

[24] Stokey, Nancy, Robert Lucas y Edward Prescott. *Recursive Methods in Economic Dynamics*. The MIT Press, 1989.

[25] Summers y Heston. , 1995.

[26] Urrutia, Carlos. "Notas sobre Crecimiento y Ciclos Económicos", *Serie Documentos Docentes D-5,* Ilades-Georgetown University, 1996.

[27] Urrutia, Carlos. "Métodos Numéricos para Resolver Modelos de Equilibrio General", *Serie Documentos Docentes D-7,* Ilades-Georgetown University, 1998.