Otoño 2006
Raphael Bergoeing

El Modelo de Crecimiento Neoclásico

Contenido

El modelo neoclásico

- El modelo determinístico con ahorro endógeno
- El equilibrio competitivo
- El problema del planificador central
- Estado estacionario
- Transición numérica

Temas siguientes:

- Incertidumbre: Ciclos
- Impuestos
- Heterogeneidad: dinámica de plantas

Algunas Preguntas

Como en Solow +

- ¿Por qué algunos países ahorran más que otros?
- Microfundamentos => decisiones de agentes modeladas explícitamente => análisis de bienestar, asume crítica de Lucas (1976), permite análisis conjunto de largo y corto plazo.
- Laboratorio flexible para analizar ciclos (estocástico), política fiscal (impuestos) y monetaria (dinero), comercio (dos sectores), competencia imperfecta y rigideces nominales (neokeynesianos), distribución de ingreso y dinámica de plantas (heterogeneidad).

El modelo neoclásico (Ramsey, Cass y Koopmans)

- Un único bien, para consumo o inversión
- Un número grande de consumidores idénticos
- Un número grande de productores idénticos
- Capital y trabajo, ambos propiedad del consumidor
- Preferencias: $U = \sum^{\infty}_{t=0} \beta^t u(c_t)$, con $u' > 0$, $u'' < 0$.
- Ley de movimiento del capital: $(1+n)\, k_{t+1} = (1-\delta)\, k_t + i_t$
- Función de producción agregada:

  $$Y_t = F(K_t, L_t);\ Y_t / L_t = F(K_t, 1) \equiv f(k_t),\ f_k > 0 \text{ y } f_{kk} < 0$$

- Firma maximiza beneficios $\Pi_t = Y_t - w_t - r_t k_t$

Notas: Precio del bien normalizado, $\Pi_t = 0$ por RCE.

Definición: Equilibrio General Competitivo: Un EC para esta economía es un conjunto de secuencias para las asignaciones $\{c_t, i_t, k_{t+1}, y_t\}$ y precios $\{w_t, r_t\}$, tales que, dados los precios, y dado k_0, las asignaciones resuelvan,

1. El problema del consumidor (PC)

$$\max \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$
$$\text{s.a.} \quad c_t + i_t = r_t k_t + w_t, \ \forall t$$
$$(1+n) k_{t+1} = (1-\delta) k_t + i_t, \ \forall t$$

2. El problema de la firma (PF)

$$\max \quad y_t - w_t - r_t k_t \ \text{ s.a. } y_t = f(k_t), \ \forall t$$

3. La igualdad entre oferta y demanda se satisfaze (F)

$$c_t + i_t = y_t, \ \forall t$$

Resolviendo el (EC)

del (PC): $u'(c_t) / \beta u(c_{t+1}) = [r_{t+1} + (1-\delta)] / (1+n)$ (Ec. de Euler)

del (PF): $r_t = f\,'(k_t)$ y $w_t = f\,(k_t) - f\,'(k_t)\,k_t$

de (F): $c_t = f\,(k_t) - (1+n)\,k_{t+1} + (1-\delta)\,k_t$

$\Rightarrow\ u'[f(k_t) - (1+n)\,k_{t+1} + (1-\delta)\,k_t] / \beta u[f(k_{t+1}) - (1+n)\,k_{t+2} + (1-\delta)k_{t+1}] = [f'(k_{t+1}) + (1-\delta)] / (1+n)$

$\Rightarrow\ G(k_t\,,\,k_{t+1}\,,\,k_{t+2}) = 0$

Definición: Optimo Paretiano (OP): Un Optimo de Pareto para esta economía es un conjunto de secuencias para las asignaciones $\{c_t, i_t, k_{t+1}, y_t\}$, tal que, dado k_0, las secuencias resuelven,

$$
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
\text{s.a.} & c_t + i_t = f(k_t) \\
 & (1+n)\, k_{t+1} = (1-\delta)\, k_t + i_t \,, \ \forall t
\end{array}
$$

Nota: se puede demostrar que si no existen distorsiones (impuestos que varían precios relativos, externalidades, etc..) todo equilibrio competitivo es OP y todo OP es un equilibrio competitivo.

Definición: Un Estado Estacionario (EE) para la economía anterior, es un (EC) con las propiedades que, para todo t, $c_t = c$, $i_t = i$, $k_t = k$, $y_t = y$, $r_t = r$, $w_t = w$, para algunos números c, i, k, y, r, w.

Caracterización del estado estacionario. Dado un k*,

$$y^* = f(k^*)$$

$$i^* = (n+\delta)k^*$$

$$c^* = f(k^*) - (n+\delta)k^*$$

$$s^* = (n+\delta)k^* / f(k^*)$$

$$r^* = f'(k^*)$$

$$w^* = f(k^*) - f'(k^*)k^*$$

Nota: El EE está definido en relación a las variables en términos per capita. De hecho, en términos absolutos estas crecen a $(1+n)$. Si el modelo tuviera $g \neq 0$, hablaríamos de un crecimiento balanceado ya que las variables per capita estarían creciendo a $(1+g)$. Las variables absolutas, en este caso, estarían creciendo a $(1+z)$.

Resolviendo el EE

de la ecuación de Euler, tenemos que,

$f'(k^*) = [(1+n)/\beta] - (1-\delta) \Rightarrow k^*$

y de las ecuaciones anteriores obtenemos todos los valores en el (EE).

Nótese que:

- si β sube, k^* sube y s^* sube (es decir, el país alcanza un EE mayor)
- si n o δ suben, k^* cae y s^* cae

Transición

Del equilibrio competitivo obtuvimos,

$u'[f(k_t) - (1+n)k_{t+1} + (1-\delta)k_t] / \beta u[f(k_{t+1}) - (1+n)k_{t+2} + (1-\delta)k_{t+1}] = [f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]/(1+n)$

$\Rightarrow G(k_t, k_{t+1}, k_{t+2}) = 0$

¿Cómo resolver la transición de k´s para luego obtener las asignaciones y precios para cada t? Con método numérico: Gauss-Seidel. Nótese que si $\delta = 1$, existe solución cerrada (analítica) para $k_{t+1} = g(k_t)$.

Gauss Seidel *(método numérico)*

1. Calcular el (EE) para obtener k*
2. Asumir que el (EE) se alcanza en el período T.
3. Adivinar secuencia de k´s para los 2 - T. Por ejemplo, suponiendo que la transición es lineal desde k_0.
4. Dado k_0, obtener k_1 de $G(k_0 , k_1 , k_2) = 0$. Si no es posible resolver analíticamente, entonces hacerlo numérciamente (por ejemplo con Newton-Raphson).
5. Luego reemplazar k_1 resuelto en el próximo período, y dado que se adivinó k_3 ,resolver de la forma anterior. Seguir hasta obtener la secuencia $\{k_1, k_2......k_{T-1}\}$.
6. Evaluar $\det(k_{T-1} -k^*)$. Si la distancia es mayor que el criterio de tolerancia acordado, regrear al paso 3 utilizando esta vez, la secuencia de k's resuelta en la primera iteración en vez de el "Guess". Las iteraciones se detienen cuando la tolerancia es alcanzada.

Un ejemplo ilustrativo

Considere el modelo de crecimiento Neoclásico visto en clase (en su versión más simple) con las siguientes formas funcionales:

$u(c_t) = \log c_t$, $f(k_t) = A\, k_t^{\alpha}$.

Dados los los parámetros: $\alpha = 0.35$, $\beta = 0.9$, $n = 0.01$
$A = 10$, $\delta = 0.06$ y con $k_o = k^*/2$,

El EGC está caracterizado por la ecuación de Euler

$$\frac{c_{t+1}}{\beta c_t} = \frac{\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1} - (1-\delta)}{1+n}$$

la condición de factibilidad

$$A k_t^{\alpha} = c_t + (1+n) k_{t+1} - (1-\delta) k_t$$

y los precios

$$r_t = \alpha A k_t^{\alpha-1}$$

$$w_t = (1-\alpha) A k_t^{\alpha}$$

En EE

$$\alpha A(k^*)^{\alpha-1} = \frac{1+n}{\beta} - (1-\delta)$$

por lo que

$$k^* = \left(\frac{\alpha A}{\frac{1+n}{\beta} - (1-\delta)} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

con lo que k* aumenta si α o β aumentan y cae si δ o *n* caen.

Además,

$$s^* = \frac{1}{A}(n+\delta)(k^*)^{1-\alpha}$$

por lo que

$$s^* = \frac{(n+\delta)\alpha}{\frac{1+n}{\beta} - (1-\delta)}$$

con lo que s* aumenta si α o β aumentan.

Simulaciones numéricas