

# **El Modelo de Crecimiento Neoclásico**

# Contenido

## El modelo neoclásico

- El modelo determinístico con ahorro endógeno
- El equilibrio competitivo
- El problema del planificador central
- Estado estacionario
- Transición numérica

## Temas siguientes:

- Incertidumbre: Ciclos
- Impuestos
- Heterogeneidad: dinámica de plantas

# Algunas Preguntas

Como en Solow +

- ¿Por qué algunos países ahorran más que otros?
- Microfundamentos => decisiones de agentes modeladas explícitamente => análisis de bienestar, asume crítica de Lucas (1976), permite análisis conjunto de largo y corto plazo.
- Laboratorio flexible para analizar ciclos (estocástico), política fiscal (impuestos) y monetaria (dinero), comercio (dos sectores), competencia imperfecta y rigideces nominales (neokeynesianos), distribución de ingreso y dinámica de plantas (heterogeneidad).

# El modelo neoclásico (Ramsey, Cass y Koopmans)

- Un único bien, para consumo o inversión
- Un número grande de consumidores idénticos
- Un número grande de productores idénticos
- Capital y trabajo, ambos propiedad del consumidor
- Preferencias:  $U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$ , con  $u' > 0$ ,  $u'' < 0$ .
- Ley de movimiento del capital:  $(1+n) k_{t+1} = (1-\delta) k_t + i_t$
- Función de producción agregada:  
$$Y_t = F(K_t, L_t); Y_t / L_t = F(K_t, 1) \equiv f(k_t), f_k > 0 \text{ y } f_{kk} < 0$$
- Firma maximiza beneficios  $\Pi_t = Y_t - w_t - r_t k_t$

Notas: Precio del bien normalizado,  $\Pi_t = 0$  por RCE.

**Definición:** Equilibrio General Competitivo: Un EC para esta economía es un conjunto de secuencias para las asignaciones  $\{c_t, i_t, k_{t+1}, y_t\}$  y precios  $\{w_t, r_t\}$ , tales que, dados los precios, y dado  $k_0$ , las asignaciones resuelvan,

1. El problema del consumidor (PC)

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

$$\text{s.a. } c_t + i_t = r_t k_t + w_t, \forall t$$

$$(1+n) k_{t+1} = (1-\delta) k_t + i_t, \forall t$$

2. El problema de la firma (PF)

$$\max y_t - w_t - r_t k_t \text{ s.a. } y_t = f(k_t), \forall t$$

3. La igualdad entre oferta y demanda se satisface (F)

$$c_t + i_t = y_t, \forall t$$

# Resolviendo el (EC)

del (PC):  $u'(c_t) / \beta u(c_{t+1}) = [r_{t+1} + (1-\delta)] / (1+n)$  (Ec. de Euler)

del (PF):  $r_t = f'(k_t)$  y  $w_t = f(k_t) - f'(k_t) k_t$

de (F):  $c_t = f(k_t) - (1+n) k_{t+1} + (1-\delta) k_t$

$\Rightarrow u'[f(k_t) - (1+n) k_{t+1} + (1-\delta) k_t] / \beta u[f(k_{t+1}) - (1+n) k_{t+2} + (1-\delta) k_{t+1}] = [f'(k_{t+1}) + (1-\delta)] / (1+n)$

$\Rightarrow G(k_t, k_{t+1}, k_{t+2}) = 0$

**Definición:** Optimo Paretiano (OP): Un Optimo de Pareto para esta economía es un conjunto de secuencias para las asignaciones  $\{c_t, i_t, k_{t+1}, y_t\}$ , tal que, dado  $k_0$ , las secuencias resuelven,

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ \text{s.a.} \quad & c_t + i_t = f(k_t) \\ & (1+n) k_{t+1} = (1-\delta) k_t + i_t, \quad \forall t \end{aligned}$$

Nota: se puede demostrar que si no existen distorsiones (impuestos que varían precios relativos, externalidades, etc..) todo equilibrio competitivo es OP y todo OP es un equilibrio competitivo.

**Definición:** Un Estado Estacionario (EE) para la economía anterior, es un (EC) con las propiedades que, para todo  $t$ ,  $c_t = c$ ,  $i_t = i$ ,  $k_t = k$ ,  $y_t = y$ ,  $r_t = r$ ,  $w_t = w$ , para algunos números  $c$ ,  $i$ ,  $k$ ,  $y$ ,  $r$ ,  $w$ .

Caracterización del estado estacionario. Dado un  $k^*$ ,

$$y^* = f(k^*)$$

$$i^* = (n+\delta)k^*$$

$$c^* = f(k^*) - (n+\delta)k^*$$

$$s^* = (n+\delta)k^* / f(k^*)$$

$$r^* = f'(k^*)$$

$$w^* = f(k^*) - f'(k^*)k^*$$

Nota: El EE está definido en relación a las variables en términos per capita. De hecho, en términos absolutos estas crecen a  $(1+n)$ . Si el modelo tuviera  $g \neq 0$ , hablaríamos de un crecimiento balanceado ya que las variables per capita estarían creciendo a  $(1+g)$ . Las variables absolutas, en este caso, estarían creciendo a  $(1+z)$ .

# Resolviendo el EE

de la ecuación de Euler, tenemos que,

$$f'(k^*) = [(1+n)/\beta] - (1-\delta) \Rightarrow k^*$$

y de las ecuaciones anteriores obtenemos todos los valores en el (EE).

Nótese que:

- si  $\beta$  sube,  $k^*$  sube y  $s^*$  sube (es decir, el país alcanza un EE mayor)
- si  $n$  o  $\delta$  suben,  $k^*$  cae y  $s^*$  cae

# Transición

Del equilibrio competitivo obtuvimos,

$$u'[f(k_t) - (1+n)k_{t+1} + (1-\delta)k_t] / \beta u[f(k_{t+1}) - (1+n)k_{t+2} + (1-\delta)k_{t+1}] = [f'(k_{t+1}) + (1-\delta)] / (1+n)$$

$$\Rightarrow G(k_t, k_{t+1}, k_{t+2}) = 0$$

¿Cómo resolver la transición de  $k$ 's para luego obtener las asignaciones y precios para cada  $t$ ? Con método numérico: Gauss-Seidel. Nótese que si  $\delta = 1$ , existe solución cerrada (analítica) para  $k_{t+1} = g(k_t)$ .

## ***Gauss Seidel*** (método numérico)

1. Calcular el (EE) para obtener  $k^*$
2. Asumir que el (EE) se alcanza en el período  $T$ .
3. Adivinar secuencia de  $k$ 's para los  $2 - T$ . Por ejemplo, suponiendo que la transición es lineal desde  $k_0$ .
4. Dado  $k_0$ , obtener  $k_1$  de  $G(k_0, k_1, k_2) = 0$ . Si no es posible resolver analíticamente, entonces hacerlo numéricamente (por ejemplo con Newton-Raphson).
5. Luego reemplazar  $k_1$  resuelto en el próximo período, y dado que se adivinó  $k_3$ , resolver de la forma anterior. Seguir hasta obtener la secuencia  $\{k_1, k_2, \dots, k_{T-1}\}$ .
6. Evaluar  $\det(k_{T-1} - k^*)$ . Si la distancia es mayor que el criterio de tolerancia acordado, regrear al paso 3 utilizando esta vez, la secuencia de  $k$ 's resuelta en la primera iteración en vez de el "Guess". Las iteraciones se detienen cuando la tolerancia es alcanzada.

# Un ejemplo ilustrativo

Considere el modelo de crecimiento Neoclásico visto en clase (en su versión más simple) con las siguientes formas funcionales:

$$u(c_t) = \log c_t, f(k_t) = A k_t^\alpha.$$

Dados los los parámetros:  $\alpha = 0.35$ ,  $\beta = 0.9$ ,  $n = 0.01$   
 $A = 10$ ,  $\delta = 0.06$  y con  $k_0 = k^*/2$ ,

El EGC está caracterizado por la ecuación de Euler

$$\frac{c_{t+1}}{\beta c_t} = \frac{\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1} - (1-\delta)}{1+n}$$

la condición de factibilidad

$$A k_t^\alpha = c_t + (1+n)k_{t+1} - (1-\delta)k_t$$

y los precios  $r_t = \alpha A k_t^{\alpha-1}$

$$w_t = (1-\alpha) A k_t^\alpha$$

En EE

$$\alpha A(k^*)^{\alpha-1} = \frac{1+n}{\beta} - (1-\delta)$$

por lo que

$$k^* = \left( \frac{\alpha A}{\frac{1+n}{\beta} - (1-\delta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

con lo que  $k^*$  aumenta si  $\alpha$  o  $\beta$  aumentan y cae si  $\delta$  o  $n$  caen.

Además,

$$s^* = \frac{1}{A} (n + \delta)(k^*)^{1-\alpha}$$

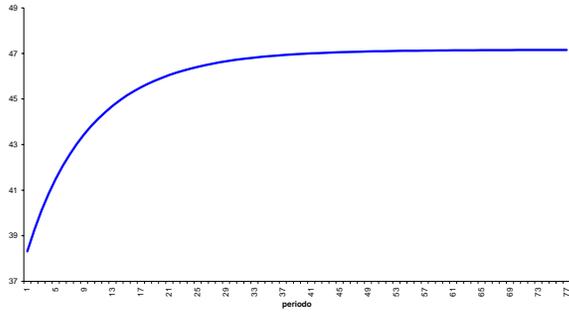
por lo que

$$s^* = \frac{(n + \delta)\alpha}{\frac{1 + n}{\beta} - (1 - \delta)}$$

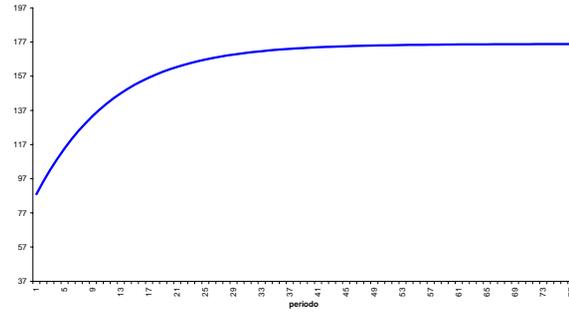
con lo que  $s^*$  aumenta si  $\alpha$  o  $\beta$  aumentan.

# Simulaciones numéricas

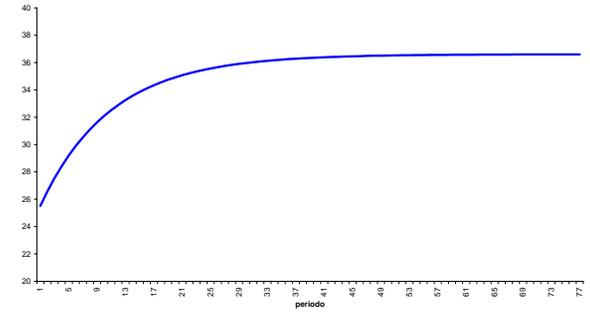
Producto



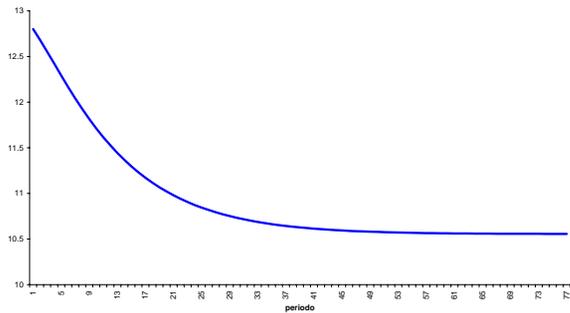
Stock de Capital



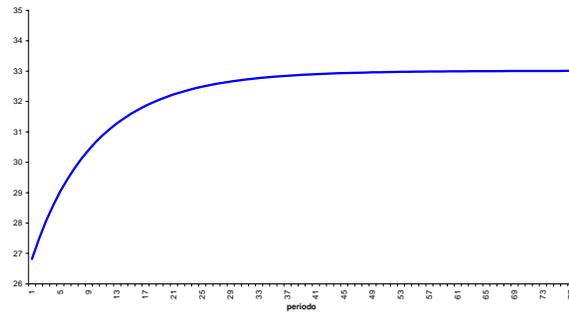
Consumo



Inversión



Productividad Marginal del Trabajo



Productividad Marginal del Capital

