$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Gauss $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oint (\varepsilon_0 \vec{E}) d\vec{s} = Q_T$

De modo gral, en un medio $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \underset{\text{medio}}{\vec{P}}$

Si el dieléctrico (medio) es lineal $\Rightarrow \vec{P} \propto E$

$\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + k\vec{E} = (\varepsilon_0 + k)\vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

$\Rightarrow$ 1ª ec gral: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

2ª ec gral: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ No importa el vol $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$, no hay carga

3ª ec gral $\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

4ª ec gral $\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

motores

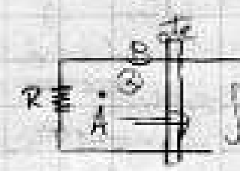
$B = \mu_0 (H + M)$

medio lineal e isótropo $\Rightarrow M \propto H$

$\Rightarrow \underline{B = \mu H}$

$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \wedge \vec{E} \Big/ \int_A d\vec{s}$

$-\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int \vec{B} \cdot d\vec{s}}_{\Phi} = \int_A \nabla \wedge \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$



$\Delta V = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$

$\Rightarrow$ corriente

Resumen
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$D = \varepsilon \vec{E}$

$H = \frac{B}{\mu}$

En el vacío:

1) $\nabla \cdot E = 0$

2) $\nabla \cdot B = 0$

3) $\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

4) $\nabla \wedge \left(\frac{B}{\mu_0}\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \wedge \vec{E}) = \nabla \wedge \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \wedge \left(\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \wedge \vec{B}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{B}) = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}\left[\vec{\nabla}(\cancelto{0}{\nabla \vec{B}}) - \nabla^2 \vec{B}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{+\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{B} = +\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

Ec. de ondas clásica (3 ecs.

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}_{C^2} \left(\partial_{xx} B_x + \partial_{yy} B_x + \partial_{zz} B_x\right)$$

Suponer ondas planas: $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(wt - \vec{k}\vec{r}))$

$\vec{B} = \vec{B}_0 \exp(i(wt - \vec{k} \cdot \vec{r}))$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \underbrace{E_{0x} \exp\left[i(wt - k_x x - k_y y - k_z z)\right]}_{E_x} \cdot (-i k_x)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -i k_x E_x - i k_y E_y - i k_z E_z = -i \vec{k} \cdot \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = -i \vec{k} \cdot \vec{B}$$

$$(\nabla \wedge \vec{E})_x = (\partial_y E_z - \partial_z E_y) = (-i k_y E_z + i k_z E_y) = -i(k_y E_z - k_z E_y)$$

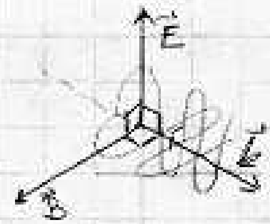
$$\nabla \wedge \vec{E} = -i \vec{k} \wedge \vec{E}$$
$$\nabla \wedge \vec{B} = -i \vec{k} \wedge \vec{B}$$

$\Rightarrow$ ① $-i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}$

② $-i \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}$

③ $\cancel{-i} \vec{k} \wedge \vec{E} = \cancel{-i} w \vec{B} \Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{E} = w \vec{B} \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B}$

④ $-\cancel{i} \vec{k} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \cancel{i} w \vec{E} \Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 w \vec{E}$



$$③ \quad kE = B\omega$$
$$④ \quad kB = \varepsilon_0\mu_0\omega E$$

$$k\cancel{E} = \omega\, \frac{\varepsilon_0\mu_0\omega\, \cancel{E}}{k}$$

$$\Rightarrow k^2 = \omega^2 \varepsilon_0\mu_0$$

$$\boxed{\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\omega}{k} B = cB}$$

Ondas electromagnéticas en medios materiales

medio con dens. de carga nula (medios neutros)

$$\nabla \cdot D = \rho = 0 \qquad \text{medios conductores: } \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \wedge H = \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \qquad \Big/ \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\nabla \wedge \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) = \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla \wedge \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) = \frac{\partial (\sigma \vec{E})}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{\mu}\nabla\wedge\left(-\nabla\wedge E\right) = \sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{\mu}\left[-\vec{\nabla}\cdot\overset{0}{(\cancel{\nabla\vec{E}})} + \nabla^2 E\right] = \sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} = \mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}}$$

Suponemos E onda plana (según $\hat{x}$)

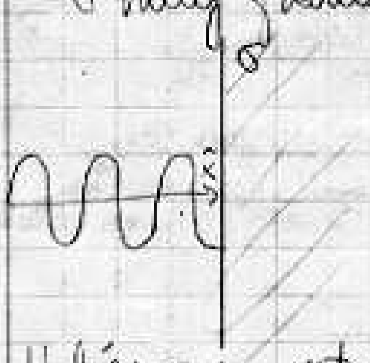
$$-k^2 E = i\mu\sigma\omega E + \mu\varepsilon(i\omega)^2 E$$

$$\Rightarrow -k^2 = -\omega^2\mu\varepsilon + i\omega\mu\sigma$$

$$\boxed{k^2 = \omega^2\mu\varepsilon - i\omega\mu\sigma}$$ Relación de dispersión

P| Considerar onda plana según $\hat{x}$ que incide sobre un metal muy buen conductor. Encontrar la longitud de penetración característica de la onda

σ muy grande $\Rightarrow k^2 \sim -i\omega\mu\sigma = \omega\mu\sigma\, e^{-i\pi/2}$



$$k = \pm\sqrt{\omega\mu\sigma}\, e^{-i\pi/4} = \pm\sqrt{\omega\mu\sigma}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boxed{k = \pm\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}\,(1-i)}$$

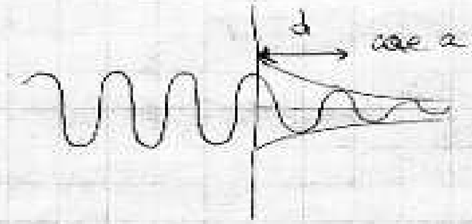
Habíamos supuesto $\vec{E}$, onda plana según $\hat{x}$:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \exp\left(i(\omega t - kx + \varphi)\right)$$

$$\vec{E}_- = \vec{E}_0 \exp\left[i\omega t + i\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}\,x + \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}\,x + i\varphi \right]$$

$$= \underbrace{\vec{E}_0 \exp\left(\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}\,x\right)}_{\text{exp creciente no tiene sentido físico}} \exp\left[i(\omega t - k_- x + \varphi) \right]$$

$$\Rightarrow \vec{E}_+(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}} \right) \exp\left[i(\omega t - k_+ x + \varphi) \right]$$



$$\boxed{d = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}}$$

b) Considere ahora un medio de baja conductividad (por ej agua salada (mar)). Det. la long. caract. de penetración

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon - i\omega\sigma\mu$$

Si despreciamos σ total% medio no dispersivo normal, fase

Aproximación menos burda:

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon \left(1 - i\frac{\omega\mu\sigma}{\omega^2\mu\varepsilon} \right) = \omega^2\mu\varepsilon \left(1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)$$

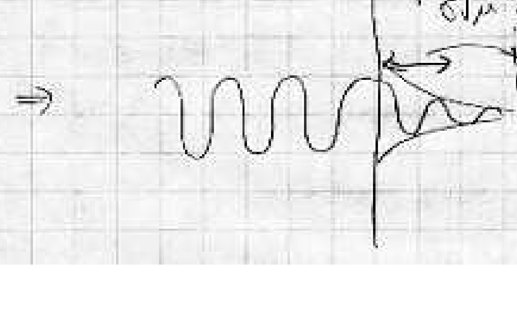
$$k = \pm\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \sim \pm\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{2} i \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \right)$$

$$k = \pm\left[\omega\sqrt{\mu\varepsilon} - i\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \right]$$

Hacer análisis de signo nuevamente, el que sirve es el (+)

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \exp\left(\frac{-x}{\frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}} \right) \exp\left[i(\omega t - k_+ x + \varphi) \right]$$

$\Rightarrow$



$$\boxed{d = \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}$$

b) Entregue una expresión analítica que describe el campo eléctrico $\vec{E}$ de una onda electromagnética plana linealmente polarizada de amplitud E_o y frecuencia ω que se propaga en un medio de índice de refracción n. La dirección de oscilación del campo eléctrico ocurre en la dirección del eje z y el plano paralelo a éste que pasa por los puntos (1,0,0) y (0,1,0) constituye un plano equifase. En el punto (0,0,0) en t = 0 la magnitud del campo es $E_o/\sqrt{2}$. Entregue la correspondiente expresión para el campo $\vec{H}$ asociado.

Onda plana linealmente polarizada → forma general: $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_o\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} + \phi)}$

Donde hay que determinar $\vec{E}_o$ y $\vec{k}$ y ϕ.

$\vec{E}_o$ determina amplitud y dirección de oscilación: $\underbrace{E_o \text{ según } \hat{z}}_{\text{datos}} \Rightarrow \vec{E}_o = E_o \underbrace{\hat{\ }}_{\substack{\text{unitario} \\ \text{para conservar } |\vec{E}_o|}} \boxed{= E_o \hat{z}}$

$\vec{k}$ es ⊥ al plano equifase porque $\vec{k}$ indica la dirección de propagación

El plano equifase es ∥ a $\hat{z}$ y pasa por (1,0,0) y (0,1,0) i.e. la diagonal en el plano x-y es la dirección de $\vec{k}$ $\Rightarrow \vec{k} = k\,\underbrace{\frac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}}_{}$ → esto es unitario $\Rightarrow |\vec{k}| = k$

En cuanto al módulo de $\vec{k}$, se sabe que $\frac{\omega}{k} = v =$ vel de propagación en el medio

$n = \frac{c}{v}$ es dato $\Rightarrow v = \frac{c}{n} \Rightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \Rightarrow k = \frac{\omega n}{c}$ $\quad \therefore \boxed{\vec{k} = \frac{\omega n}{c}\frac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}}$

Ahora, ϕ se determina con la cond. inicial:

$$\vec{E}(0,0) = \underbrace{\frac{E_o\hat{z}}{\sqrt{2}}}_{\text{dato}} = \mathrm{Re}\{\vec{E}(0,0)\} = E_o\hat{z}\, e^{i(\omega\cdot 0 - \vec{k}\cdot\vec{0} + \phi)} = \mathrm{Re}\{E_o\hat{z}\, e^{i\phi}\}$$

$$\Rightarrow \frac{E_o\hat{z}}{\sqrt{2}} = E_o\hat{z}\cos\phi \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = E_o\hat{z}\, e^{i\left(\omega t - \frac{\omega n}{c}\frac{(x+y)}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}}$$

Notar que $\vec{k}\cdot\vec{r} = \frac{(\hat{x}+\hat{y})}{\sqrt{2}}\cdot(\hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z) = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$

En cuanto a $\vec{H}$, $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ y $|\vec{E}| = c|\vec{B}| \Rightarrow |\vec{H}| = \frac{E_o}{c\mu}$. Recordando que $\vec{k}\wedge\vec{E} = \omega\vec{B}$ lo que determina la dirección de oscilación de $\vec{B}$ que será según (1,-1,0). La dirección de propagación y la fase no cambian por lo que:

$$\boxed{\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{E_o}{c\mu}\underbrace{\frac{(\hat{x}-\hat{y})}{\sqrt{2}}}_{\substack{\text{para que} \\ \text{sea unitario}}} e^{i\left(\omega t - \frac{\omega n}{c}\frac{(x+y)}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}}$$