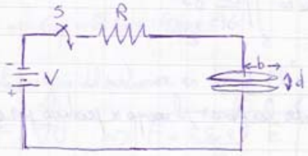
Auxiliar (Examen)

P1



Condensador de placas circulares con resistencia R conectado a un voltaje V_0. Inicialmente en $t=0$ C está descargado y se cierra S. Determinar $\vec{B}(t)$ en el condensador

Por LVK $\quad V_0 = V_C + V_R$

$$\Rightarrow V_0 = V_C + RC\frac{dV_C}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{RC} = \frac{V_0}{RC}}$$

Resolviendo la ecuación diferencial $V_C = Ae^{-t/RC} + V_p$

Sea $V_p = V_0 \Rightarrow V_C(t) = Ae^{-t/RC} + V_0$

Ahora bien la C.I. es $V_C(t=0) = 0 \Rightarrow A = -V_0$

$$\Rightarrow V_C(t) = V_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Por otro lado se cumple la ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Como $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ y $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \Rightarrow$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Big/ \iint dS$$

$$\Rightarrow \iint_S \nabla\times\vec{B} = \mu_0\iint_S J\,dS + \mu_0\varepsilon_0\iint_S \frac{\partial E}{\partial t}\,dS$$

Por Stokes.

$$\int B\cdot dl = \mu_0 \underbrace{\iint_S J\,dS}_{\text{Fortuyto}} + \mu_0\varepsilon_0\iint_S \frac{\partial E}{\partial t}\,dS$$

Como $I_{cal} = 0$ porque NO fluye C entre las placas, el campo se produce por acumulación de cargas en la superficie.

$$\Rightarrow \int \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0\varepsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,dS \qquad \begin{array}{l} dS = r\,dr\,d\theta\,\hat{k} \\ dl = r\,d\theta\,\hat{\theta} \end{array}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} B\hat{\theta}\, r\,d\theta\,\hat{\theta} = \mu_0\varepsilon_0 \int_0^{r}\int_0^{2\pi} \frac{\partial E}{\partial t}\hat{k}\cdot r\,dr\,d\theta\,\hat{k}$$

Solo falta $\frac{\partial E}{\partial t}$, pero se sabe que

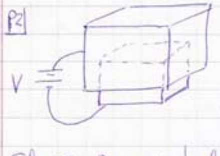
$$V_C(t) = \int_0^d \vec{E}\,d\vec{l} \quad \text{con } dl = z\hat{k}$$

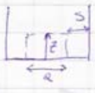
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{V_C}{d}$$

$$\Rightarrow B\cancel{r}2\cancel{\pi} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{V_0}{dRC} e^{-t/RC}\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{B(t) = \frac{\mu_0\varepsilon_0 V_0\, r\, e^{-t/RC}}{2dRC}\hat{k}} \quad r \le b$$

P2





Determinar la fuerza sobre el conductor interior.

<u>Solución:</u> Despreciando efectos de borde, se tienen 4 condensadores de placas // en //

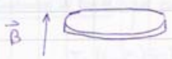
Cada capacidad es $C_i = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon_0 e z}{s}$

$$\Rightarrow C_{eq} = \sum C_i = \frac{4\varepsilon_0 e z}{s}$$

$\therefore$ La energía del sistema es $U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{2\varepsilon_0 e z}{s} V^2$

$$\vec{F} = \nabla U \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{2\varepsilon_0 e V^2}{s} \hat{z}}$$

P3



En el conductor de conductividad g, espesor d y radio e incide un campo $\vec{B} = 0{,}4 \cos(10^6 t)\,\hat{k}\,\left[\frac{Wb}{m^2}\right]$

Determinar la potencia disipada en el conductor.

$P = \iint \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV$ y $\vec{J} = g\vec{E}$, por lo tanto necesitamos E.

Sabemos que $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$$\Rightarrow \int \vec{E}\,d\vec{l} = -\iint \frac{\partial B}{\partial t}\,dS$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} E\,r\,d\theta = +\int_0^{r}\int_0^{2\pi} 0{,}4 \times 10^6 \times \operatorname{sen}(10^6 t)\,r\,dr\,d\theta$$

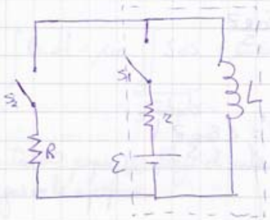
$$\Rightarrow E\,r\,2\pi = 0{,}4 \times 10^6 \times \operatorname{sen}(10^6 t)\,\pi r^2$$

$$\Rightarrow E = 0{,}2 \times 10^6 \times \operatorname{sen}(10^6 t)\,r$$

$$\Rightarrow P = g\int_0^{e}\int_0^{2\pi}\int_0^{d} (0{,}2\times 10^6)^2 \operatorname{sen}^2(10^6 t)\,r\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$\boxed{P = g\,(0{,}2\times 10^6)^2 \operatorname{sen}^2(10^6 t)\,\frac{e^3}{3}\,2\pi d}$$

P4

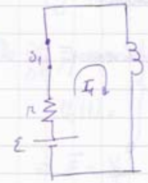


El circuito representa una fuente con resistencia interna r pequeña e inductancia L grande. El circuito está en r.p. luego de estar mucho tiempo cerrado. Se desea desconectar el circuito pero eso con S_1 cerrado, se ~~abre~~ cierra S_2 y luego S_1.

a) Explique por qué el procedimiento
b) Calcule la fem inducida en función del tiempo y determine su valor max

Solución:

a) En r.p.



Sin importar el valor de ε, al abrir S_1, ocurre una variación de $I_1 = I_L$ (ΔI_L)

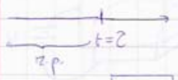
Como $V_L = L\frac{dI}{dt} = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$. Si la variación ΔI es grande $\Rightarrow V_L$ grande

Si V es grande, se puede producir la ruptura del aire (superando el campo $E_{ruptura}$) lo cual puede inducir en bornes del interruptor donde dispara hasta un "arco eléctrico"

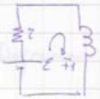
Por eso, se busca reducir ΔI, haciendo circular una I_L menor por LVK

$$I_r = I_R + I_{L_2} \quad \text{con } I_{L_2} < I_{L_1}$$

b)



en $t < \tau$



$$\frac{dI_1}{dt} + \frac{r}{L} I_1 = \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow I_1(t) = A e^{-\frac{r}{L}t} + \frac{\varepsilon}{R}$$

pero ulamos en $\tau_1 \rightarrow t \rightarrow \infty$ $\Rightarrow \boxed{I_1(t) = \frac{\mathcal{E}}{r}}$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -L\frac{dI_1}{dt} = 0$$

en $t > \tau$

la ecuación es $\frac{dI_2}{dt} + \frac{R}{L}I_2 = 0$

$$\Rightarrow I_2(t) = B e^{-\frac{R}{L}t}$$

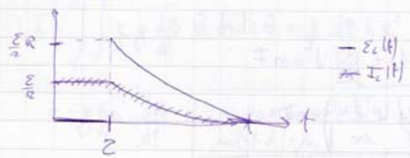
Condición de borde por continuidad

$$I_1(t=\tau) = I_2(t=\tau) \iff B = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{\frac{R}{L}\tau}$$

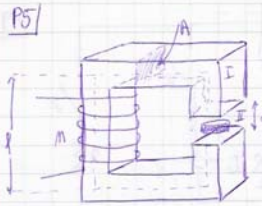
$$\Rightarrow \boxed{I_2(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_L = +\cancel{L}\frac{\mathcal{E}}{r}\frac{R}{\cancel{L}} e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{L\,max} = \frac{\mathcal{E}R}{r}$$



P5



$l \gg d$

Para el núcleo de la figura que posee entrehierro

a) Calcule $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en cada zona

b) Si en el entrehierro se ubica un disco de radio e y espesor h, si $I = I_0 \sin(\omega t)$. Determine la ... que cruza una sección radial del disco

Solución

a) Sabemos que $\phi_1 = \phi_2 = \phi \Rightarrow B_1 = B_2 = B$ (área igual)

Ley de Ampère $H_1 l_1 + H_2 l_2 = nI$

con $l_1 = 4l - d$
$l_2 = d$

$$\Rightarrow \frac{B_1}{\mu_1}(4l-d) + \frac{B_2}{\mu_0}d = nI$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{4l-d}{\mu_1} + \frac{d}{\mu_0}\right) = nI$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{\mu_0 4l + d(\mu_1-\mu_0)}{\mu_1\mu_0}\right) = nI$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0\mu_1 nI}{\mu_0 4l + d(\mu_1-\mu_0)}$$

$$\Rightarrow H_1 = \frac{B_1}{\mu_1} = \frac{\mu_0 nI}{4l\mu_0 + d(\mu_1-\mu_0)}, \quad H_2 = \frac{\mu_1 nI}{4l\mu_0 + d(\mu_1-\mu_0)}$$

b) $B = \dfrac{\mu_1 \mu_0 n I_0 \operatorname{sen}(\omega t)}{\mu_0 (4l-d) + \mu_1 d}$

$\phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = B \pi r^2$

$\Rightarrow \mathcal{E} = -\dfrac{d\phi}{dt} = -\pi r^2 \dfrac{dB}{dt}$

Ahora bien $\mathcal{E} = \int_\Gamma E \cdot \vec{dS}$ como $\vec{E} = E(r)\hat{\theta}$
$\vec{dl} = r d\theta \hat{\theta}$

$\Rightarrow \mathcal{E} = \int E(r)\, r\, d\theta = E(r)\, 2\pi r$

$\Rightarrow \mathcal{E} = E(r)\, 2\pi r$

$\Rightarrow -\pi r^2 \dfrac{dB}{dt} = E(r)\, 2\pi r$ / lo mismo que hacer $\nabla \times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$

$\Rightarrow E(r) = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB}{dt}\hat{\theta}$

Como $\vec{J} = g\vec{E} \Rightarrow \vec{J} = -\dfrac{r}{2} g \dfrac{dB}{dt}\hat{\theta}$

$\Rightarrow I = \int_0^h \int_0^a \dfrac{r}{2} g \dfrac{dB}{dt} \hat{\theta}\, dr\, dz\, \hat{\theta} = -\dfrac{g}{2}\dfrac{dB}{dt} h \dfrac{a^2}{2}$

$= -\dfrac{g h a^2}{4}\dfrac{dB}{dt} = \boxed{\dfrac{-\mu_1 \mu_0 n I \cos(\omega t)\omega}{\mu_0(4l-d) + \mu_1 d} \dfrac{g h a^2}{4} = I}$

Resumen Otoño 2006 — Profesor: Luis Vargas — Auxiliar: Mauricio Rivera

I) Ley de Coulomb y Gauss

$\vec{F}_{q'} = \dfrac{q q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$ $\quad$ $q \xrightarrow{\vec{r}} q'$ $\quad$ $\hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

$\vec{E}_{q'} = \dfrac{\vec{F}_{q'}}{q'} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

$\vec{E} = \vec{E}(r)$ es función de las coordenadas y es una perturbación real que sólo se verifica en presencia de carga.

$\phi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{\underbrace{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}_{r}}$

Si tenemos n cargas $\Rightarrow E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \dfrac{q_i}{r_i^2}$, $\phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\dfrac{q_i}{r_i}$

Si tenemos una distribución de carga.

$R = \vec{r} - \vec{r}'$ (ojo con sentido)

$\underbrace{\phi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\int\dfrac{\rho(\vec{r}')\,d\tau}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \wedge \vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\int\dfrac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')\,d\tau}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}_{\text{Soluciones de ecuación}}$

donde $\rho(\vec{r})\,d\tau = dq = \begin{cases} \rho\, dV \\ \sigma\, dS \\ \lambda\, dl \end{cases}$

•) $\nabla^2\phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$

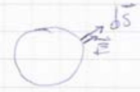
$\boxed{\vec{D} = \varepsilon\vec{E}}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ 1ª Ec. de Maxwell $\leftrightarrow$ •) $\iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \dfrac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

$\left.\right\} \vec{E} = -\nabla\phi(\vec{r})$, $\phi = -\int \vec{E} \cdot \vec{dl}$

Ejercicio tipo: Calcular campo en un punto debido a un cuerpo cargado uniformemente y de una determinada geometría.

Ejemplo: Esfera uniformemente cargada.



•) Simetría $\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$

•) $\vec{E} \cdot \vec{dS}$ (ojo es producto punto) $(\vec{E} \,//\, \vec{dS})$

II) Conductores y dieléctricos

- Campo eléctrico nulo en su interior.
- Cargas en las superficies $\Rightarrow \sigma$ $\qquad \iint \vec{D}\, d\vec{S} \Rightarrow \vec{D}_{int}\cdot\hat{n}_{int} + \cancel{\vec{D}_{ext}\cdot\hat{n}_{ext}}^{\,0} = \sigma$
- ϕ cte en interior $\qquad \Rightarrow \boxed{\sigma = \vec{D}\cdot\hat{n}}$

Si tenemos un dieléctrico

- Caracterización mediante densidad de polarización $\vec{P}$ $\begin{cases} \rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \\ \sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n} \end{cases}$ con $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$, $\vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$

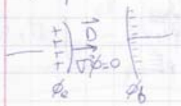
$$\Rightarrow \vec{D}_a\cdot\hat{n}_a + \vec{D}_b\cdot\hat{n}_b = \sigma \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \ (1^a)$$
$$\vec{E}_a\cdot\hat{t}_a + \vec{E}_b\cdot\hat{t}_b = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \ (3^a)$$

a $\hat{n}_a$ ε_1
b $\hat{n}_b$ ε_2

Ejemplo Se tiene un cuerpo conductor o parte de él de una cierta geometría y se pide calcular
- Densidades superficiales
- Potenciales en sectores $\iff \nabla^2\phi = \begin{cases} 0 \\ \frac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$ por sectores
- Campos en sectores.

$\hookrightarrow$ continuidad ϕ
$\hookrightarrow$ continuidad $\vec{E}$ si $\sigma = 0$
+ condiciones de borde.

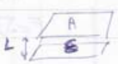
III) Capacidad



2 conductores cargados $\Rightarrow \Delta\phi = \Delta V$

$$C \equiv \frac{\Delta Q}{\Delta\phi}$$

•) Relación potencial-carga $\phi \to \vec{E} \to \vec{D} \to \sigma \to Q$
•) Se usa condiciones ideales (campos direccionales).

Si placas paralelas  $\qquad \vec{E} = -\nabla\phi = \frac{V_0}{L}\hat{z}$

$$\sigma = \vec{D}\cdot\hat{n} \Rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon V_0}{L} \quad \Rightarrow Q = \underbrace{\frac{\varepsilon A}{L}}_{C} V_0$$

Energía $U = \frac{1}{2}CV^2$, $\quad C_{eq}(\text{serie}) = \left(\sum \frac{1}{C_i}\right)^{-1}$
$\quad C_{eq}(\parallel) = \sum C_i$

IV) Corriente eléctrica y resistencia

$$I = \iint J\, d\vec{S} \qquad \text{con } I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\phi}{i} \equiv R$$

•) $\nabla^2\phi = 0$ en interior $(\rho = 0)$
•) $\vec{J} = \sigma\vec{E} \qquad E = -\nabla\phi$
•) $P = Ri^2$ (efecto Joule)

V) Ley de Ampère y campo magnético

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}')\,d\tau \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}')\,d\tau}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

soluciones de $\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J}$ (4ª)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ (2ª)

$$\vec{J}\,d\tau \sim \vec{J}_s\,dS \sim i\,d\vec{l}$$

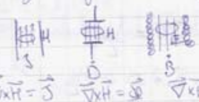
Uso de simetrías para resolver.

4ª ecuación en régimen estacionario $\cancel{\frac{\partial D}{\partial t}}^{\,0}$ $\Rightarrow \nabla\times H = J$
$\Rightarrow \boxed{\oint \mathbf{B}\,d\vec{l} = \mu\, I_{enlazada}}$ con $B = \mu H$

y mecánicamente $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ si $E = 0$ $\quad \vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} \sim \int I\,d\vec{l}\times\vec{B}$
si $B = 0$ $\quad \vec{F} = q\vec{E}$

V) Inducción

Importante Flujo enlazado $\phi_m = \iint \vec{B}\cdot d\vec{S}$ $\quad f_{em} = -\frac{\partial\phi}{\partial t}$ (3ª ecuación

Campos inducidos 

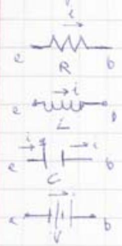
$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$
$$\underbrace{\text{con } \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \qquad \text{con } \vec{J} = 0}_{4^a} \qquad \underbrace{\qquad}_{3^a}$$

$F = -\nabla U$

con $U = \frac{1}{2}\iiint_V (\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B})\,dV$ sistema

y $P = \iiint \vec{E}\vec{J}\,dV \to$ disipada

VI) Componentes RLC y la alterna



	$V_b - V_a$	Energía
R	$-Ri$	$-Ri^2$ (consume)
L	$-L\frac{di}{dt}$	$\frac{1}{2}Li^2$
C	$-\frac{q}{C}$	$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
V	V_0	$V_0 i$ (aporta)

$$\boxed{V_R = iR}$$

$$\boxed{V_L = L\frac{di_L}{dt}}$$

$$\boxed{V_C = C\frac{dV_C}{dt}}$$

Uso de fasores $Z_L = j\omega L$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

con $\omega = 2\pi f$

y luego se obtiene el resultado aplicando la inversa de la transformada

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi) \qquad \tilde{V} = V_0 \angle \varphi$$

$|V| = \|$ del fasor $\|$

$\angle V = \operatorname{arctg} \frac{im}{real}$

$$\tilde{V} = Ve^{i\varphi}$$

¡¡y no olvidar que los campos son ondas!