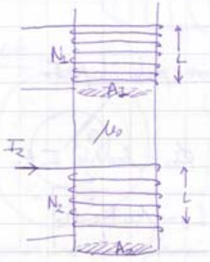
Ejercicios: Clase 20/06/06

P1 Calcular el coeficiente de inducción mutua entre 2 embobinados de n_1 y n_2 vueltas respectivamente y del mismo largo L



Solución:

Estamos buscando $M = \frac{\phi_{12}}{I_2}$ (flujo enlazado por bobina 1 debido a la I de la bobina 2)

Sabemos que como $\exists I_2$ en bobina 2

$$\Rightarrow B_2 = \mu_0 I_2 \frac{N_2}{L}$$

$$\Rightarrow \phi_{\substack{\text{enlazado}\\ \text{en cada vuelta}\\ \text{de bobina 2}}} = \mu_0 I_2 \frac{N_2}{L} A_2 \left(= \iint \vec{B_2}\, d\vec{S} = B_2 \underbrace{\iint dS}_{A_2} \right)$$

Ahora bien $\phi_{\substack{\text{enlazado}\\ \text{en cada vuelta}\\ \text{de bobina 1}}} = \iint B_2\, dS = B_2 \underbrace{\iint dS}_{A_1} = \mu_0 I_2 \frac{N_2}{L} A_1$

$$\Rightarrow \phi_{\substack{\text{total enlazado}\\ \text{por bobina 1}\\ \text{debido a } B_2}} = \phi_{12} = N_1 \left(\mu_0 I_2 \frac{N_2}{L} A_1 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{\phi_{12}}{I_2} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} A_1}$$ con $A_1 = A_2 = A$, el área de la sección transversal del cilindro

NOTA: Vamos a calcular además L_1, L_2 y ver si

$$\frac{\phi_{12}}{I_2} = \frac{\phi_{21}}{I_1}$$ → flujo enlazado por 2 debido a I_1

(~~OJO~~ I_1 $\exists$ pq por inducción se genera. Notar que I_2 genera B_2 que induce I_1, de qué a su vez esta induce B_1)

$L_2 \equiv$ inductancia propia de bobina 2

$$L_2 = \frac{\phi_{22}}{I_2} = \frac{\text{Flujo total enlazado por bobina 2 producido por } I_2}{I_2}$$

como $\phi_{\substack{\text{cada vuelta}\\ \text{bobina 2}}} = \mu_0 \frac{N_2}{L} I_2 A_2 \Rightarrow \phi_{22} = \mu_0 \frac{N_2^2}{L} I_2 A_2$

$$\Rightarrow \boxed{L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{L} A_2}$$

Análogamente

como $\phi_{\substack{\text{cada vuelta}\\ \text{bobina 1}}} = \mu_0 \frac{N_1}{L} I_1 A_1 \Rightarrow \phi_{11} = \mu_0 \frac{N_1^2}{L} I_1 A_1$ / Este es un factor de AUTOINDUCCIÓN

$$\Rightarrow \boxed{L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{L} A_1}$$

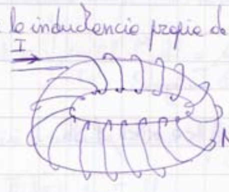
Finalmente.

$$\phi_{21} = N_2 \left(\mu_0 \frac{N_1}{L} A_2 I_1 \right) \Rightarrow \boxed{\frac{\phi_{21}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} A_2}$$

CONCLUSIÓN

$$\boxed{\frac{\phi_{21}}{I_1} = \frac{\phi_{12}}{I_2} \quad \text{ssi} \quad A_1 = A_2}$$ ("y largo" de bobina también)

P2] Calcular la inductancia propia de un embobinado toroidal de radio externo R y radio interno a.



Solución:

Usando Ampère

$$\int B\,dl = \mu_0 I_{enlazada}$$

Tomamos una circunferencia de radio R.

$$\int_0^{2\pi} B\hat{\varphi} R\, d\varphi\, \hat{\varphi} = \mu_0 N I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\mu_0 N I \pi a^2}{2\pi R}$$, asumiendo B cte en el interior $(a \ll R)$

$$\Rightarrow \phi_{TOTAL} = N\phi = \frac{\mu_0 N^2 I a^2}{2R}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N a^2}{2R}}$$

P3] Calcular la autoinductancia de un cable coaxial.

Usando Ampère

$$\int B\hat{\theta} \rho\, d\theta\, \hat{\theta} = \mu_0 I_{enlazada}$$

Se pueden notar que hay 3 regiones $\rho < a$, $a<\rho<b$, $\rho > b$

•) $\rho < a$ $$\int_0^{2\pi} B\rho\, d\theta = \mu_0 \int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} J\, r\, dr\, d\theta$$, J = densidad de I.

$$\Rightarrow B 2\pi\rho = \mu_0 J \pi \rho^2 \quad \text{con} \quad I = J\pi a^2$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}}$$

•) $a<\rho<b$ $$\int_0^{2\pi} B\rho\, d\theta = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}}$$

•) $\rho > b$ $$\int_0^{2\pi} B\rho\, d\theta = \mu_0 I - \mu_0 I = 0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

$$\therefore \vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}\hat{\theta} & \rho < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\theta} & a<\rho<b \\ 0 & \rho > b \end{cases}$$

Por unidad de largo

$$d\phi_{int} = \vec{B}\,d\vec{S} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}\, d\rho\, \frac{dz}{1}$$

$$\Rightarrow \phi_{int} = \int_0^a \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \cdot K\, d\rho$$ con K una relación de proporcionalidad entre $\pi\rho^2$ y πa^2

NOTA: Es equivalente a lo explicado en clases y resuelto en el apunte

$$\Rightarrow \phi_{int} = \int_0^a \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \frac{\rho^2}{a^2} d\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^4} \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^a = \frac{\mu_0 I}{8\pi}$$

contribución de conductor interior al flujo enlazado.

$$d\phi_{ext} = \vec{B}\,d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\,d\rho$$

$$\phi_{ext} = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\,d\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(b/a)$$

contribución de la zona $a<\rho<b$ al flujo enlazado

$$\Rightarrow \underset{\text{enlazado}}{\phi_{TOTAL}} = \phi_{int} + \phi_{ext}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\phi_{TOTAL}}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi}\ln(b/a) = \mu_0\left(\frac{1}{8\pi} + \frac{\ln(b/a)}{2\pi}\right)$$