Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

FI33A ELECTROMAGNETISMO
Clase 21
Campos Variables en el Tiempo-II

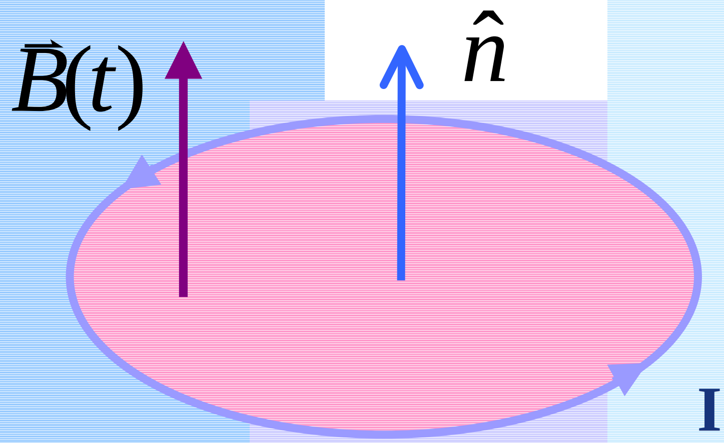
LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

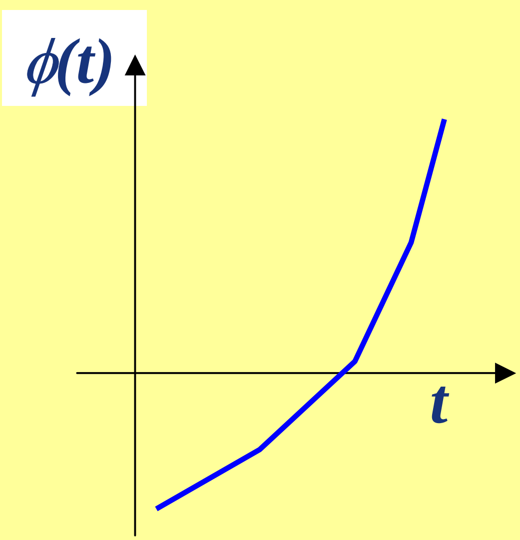
- Ley de Faraday-Lenz
- Modificación 3ª ecuación de Maxwell
- Inductancia propia
- Inductancia mutua
- Corriente de Desplazamiento
- Energía Electromagnética

Ley de Faraday-Lenz

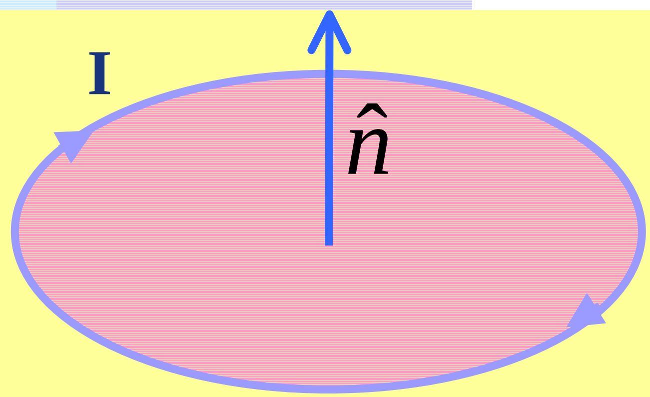
Un campo magnético variable genera o induce una FEM



$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{con} \quad \phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



$$\dot{\phi} > 0 \Rightarrow \varepsilon < 0$$

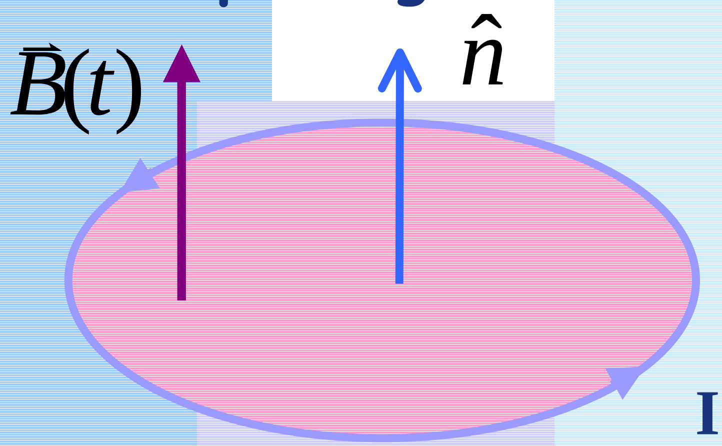


$\vec{B}$ crece $\Rightarrow$ Corriente genera campo opuesto al crecimiento

Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

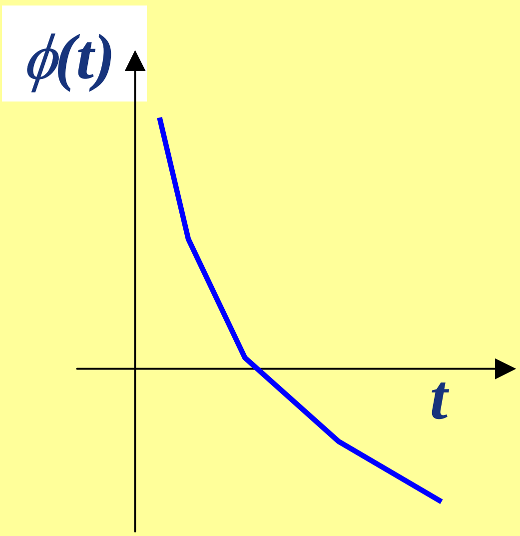
Ley de Faraday-Lenz

Un campo magnético variable genera o induce un FEM

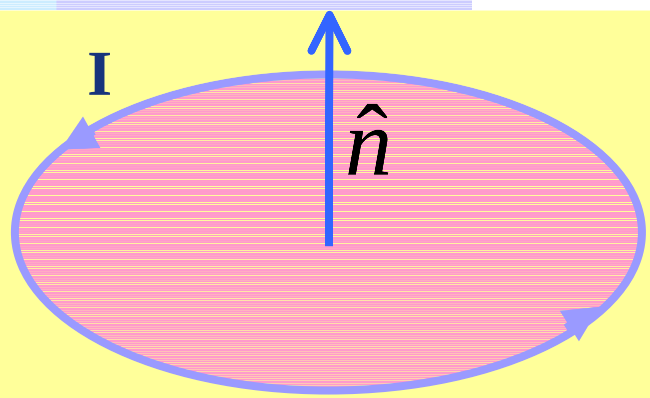


$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

con $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$



$$\dot{\phi} < 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$$

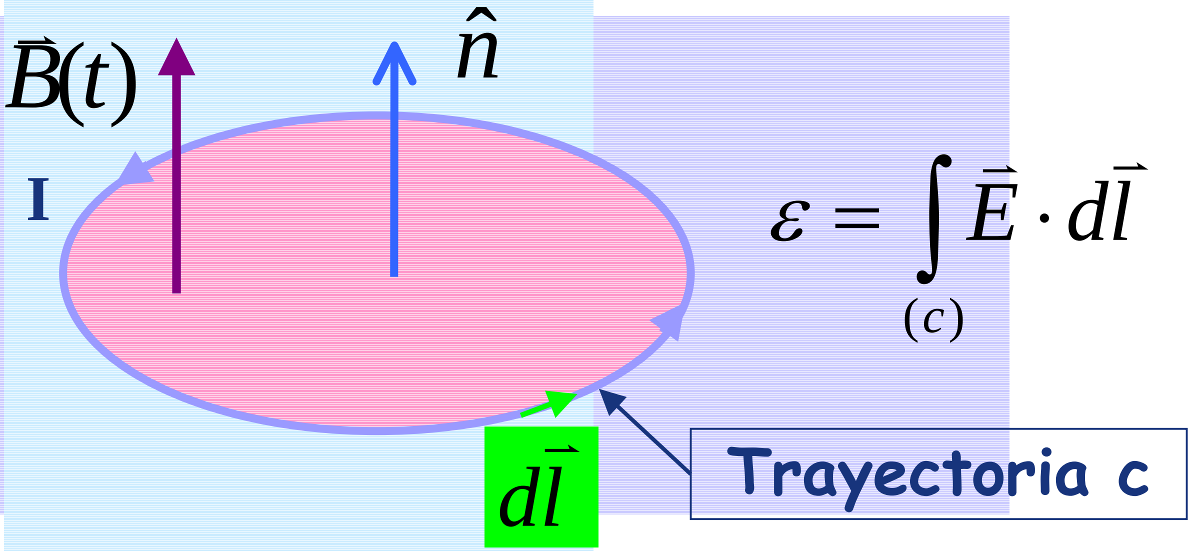


$\vec{B}$ **decrece** $\Rightarrow$ **Corriente genera campo opuesto al decrecimiento**

Modificación 3ª Ecuación de Maxwell

Un campo magnético variable genera o induce una FEM

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



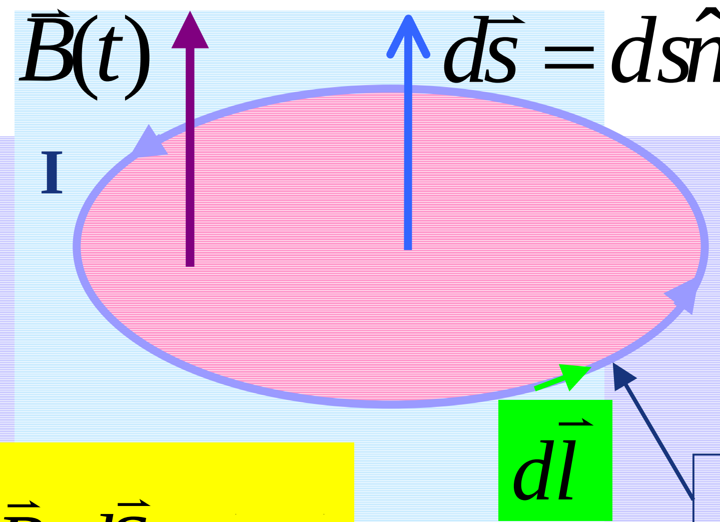
$$\varepsilon = \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad (7.9)$$

Modificación 3ª Ecuación de Maxwell

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$



$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\varepsilon = \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3ª Ecuación de Maxwell

Modificación 3ª Ecuación de Maxwell

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3ª Ecuación de Maxwell

Dado que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{A}\right) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

usando $\nabla \times \left(\nabla V\right) = 0$

Escuela de
Ingeniería
Universidad
de Chile

Modificación 3ª Ecuación de Maxwell

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3ª Ecuación de Maxwell

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

usando $\nabla \times \left(\nabla V \right) = 0$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

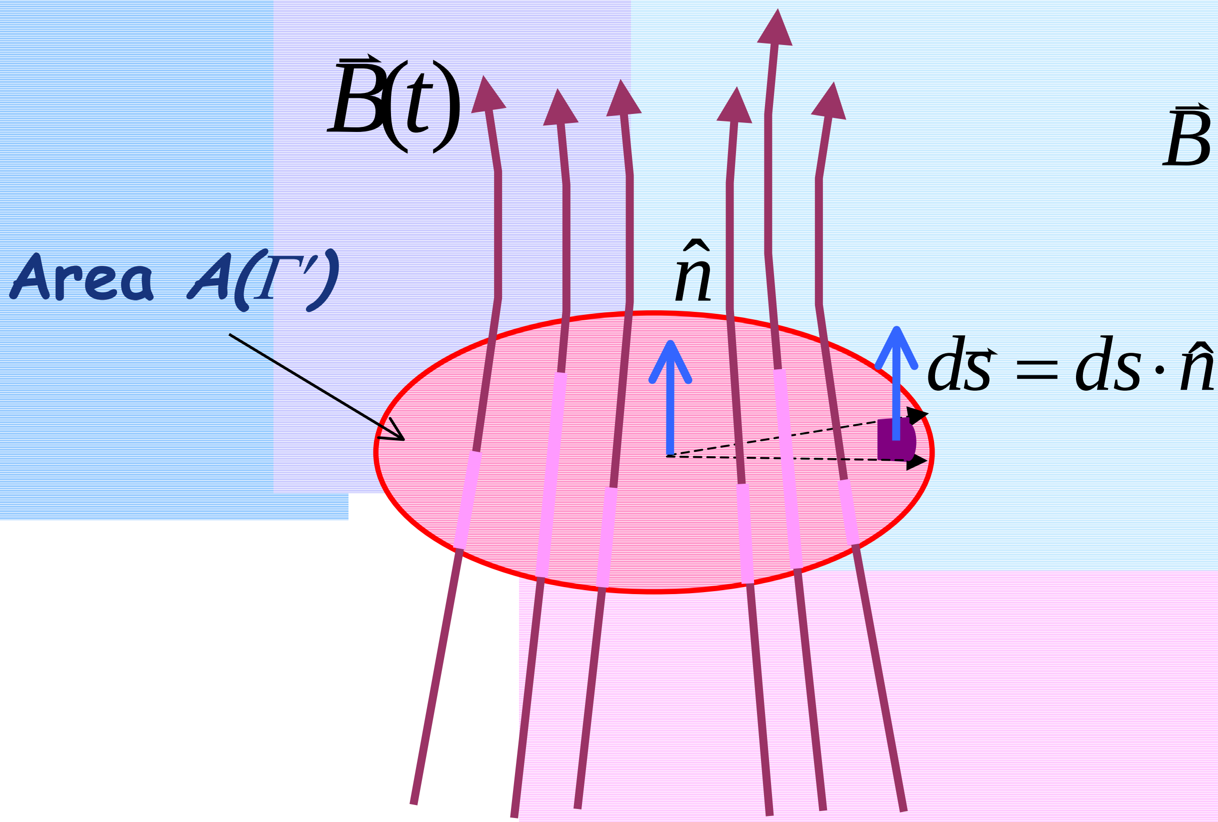
Origen electrostático

$$\vec{E} = \overbrace{-\nabla V} - \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

Debido a campo magnético variable en el tiempo

Inductancia propia

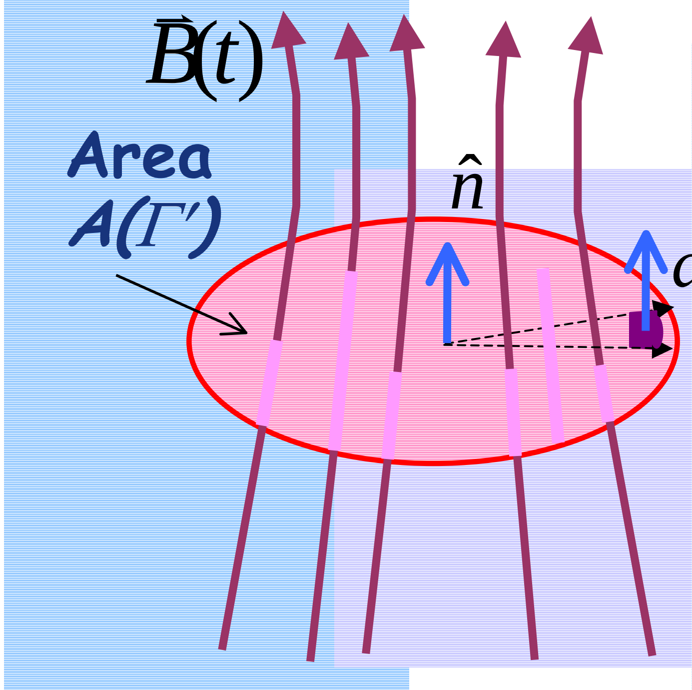
Campo producido SOLO por *I*



$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$$

$$\phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Inductancia propia



$$d\vec{s} = ds \cdot \hat{n}$$

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$$

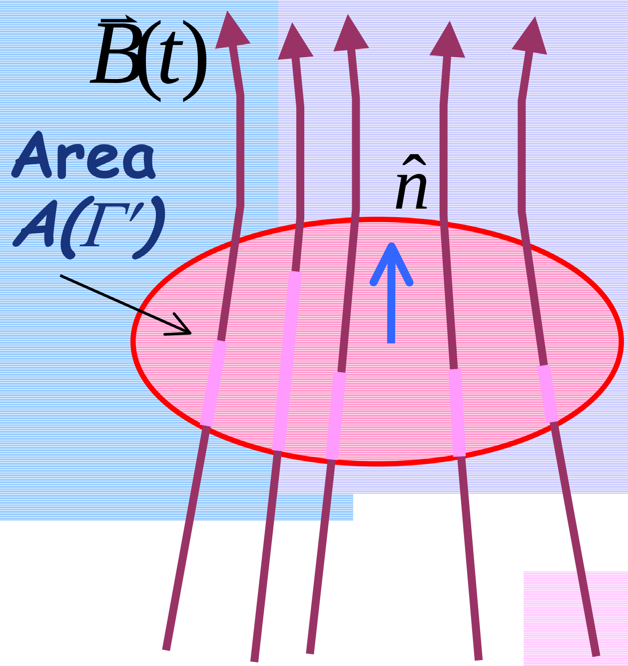
$$\phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\phi = \iint_A \vec{B} \bullet d\vec{s} = \iint_A \left(\oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3} \right) \bullet d\vec{s}$$

$$L \equiv \frac{\phi}{I} = \iint_A \left(\oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3} \right) \bullet d\vec{s}$$

Inductancia del circuito

Campo producido SOLO por *I*

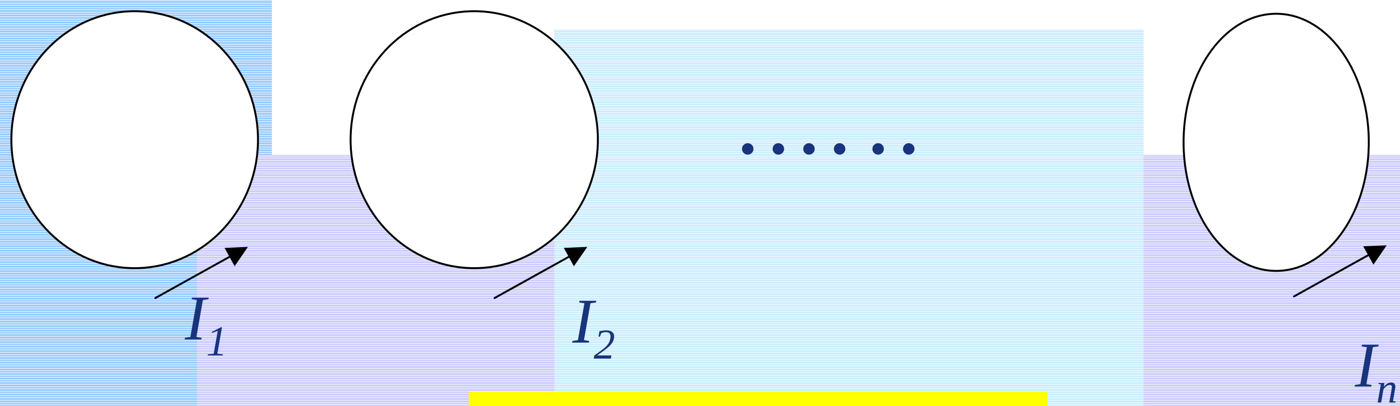


Inductancia propia del circuito

$$L \equiv \frac{\phi}{I} = \iint_A \left(\oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3} \right) \bullet d\vec{s}$$

- NO depende de la corriente
- ni del flujo,
- Depende de la geometría
- [L]=Henry [H]

Inductancia mutua



n circuitos

Sea ϕ_{jk} el flujo magnético que atraviesa el circuito j debido SOLO a la corriente que circula por el circuito k

Inductancia mutua entre el circuito j y el circuito k

$$Ljk = \frac{\phi_{jk}}{I_k}$$

Corriente de Desplazamiento

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

4ª Ecuación de Maxwell

$$\underbrace{\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{H} \right)}_{\text{Nulo}} = \nabla \cdot \vec{J}$$

Tomando la divergencia

$$0 = \nabla \cdot \vec{J}$$

Pero por la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Luego hay una contradicción !?#@

Corriente de Desplazamiento

Cuando no hay corriente $\vec{J}=0$, pero si hay campos eléctricos variables se encuentra experimentalmente la relación

$$\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Así, el termino $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ debe sumarse a la 4ª ecuación, lo que nos a finalmente:

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

4ª Ecuación de Maxwell

Corriente de desplazamiento

Energía Electromagnética

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad / \vec{H} \cdot$$

4ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad / \vec{E} \cdot$$

$$\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{H} \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right) - \vec{H} \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{J}$$

Energía Electromagnética

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad / \vec{H} \cdot$$

4ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad / \vec{E} \cdot$$

Ordenando se obtiene

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \frac{1}{2}\left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}\right) dv + \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} dv = 0$$

Fuerza Electromagnética

$$-\vec{F}\cdot d\vec{l} = dU$$

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dl}\hat{l}$$

En general

$$\vec{F} = \nabla U$$

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Consideremos las ecuaciones de Maxwell en el espacio vacío

Se cumple

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\nabla \bullet \vec{E} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

$$\nabla \bullet \vec{E} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Tomando el rotor

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\mu_0 \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{H}}{dt}\right)$$

identidad $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A}$

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\therefore \nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\nabla^2 \vec{E}$$

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

$$\therefore \nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla \bullet \vec{E} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Tomando el rotor

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{H}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

luego

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Es decir

$$\nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

con $\gamma^2 = \mu_0 \varepsilon_0 = c^2$

Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

$$\nabla \bullet \vec{E} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Similarmente se obtiene

$$\nabla^2 \vec{H} - \gamma^2 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

con $\gamma^2 = \mu_0 \varepsilon_0 = c^2$

Luego los campos son ondas viajeras a la velocidad de la luz!!!