Escuela de
Ingeniería
Universidad
de Chile

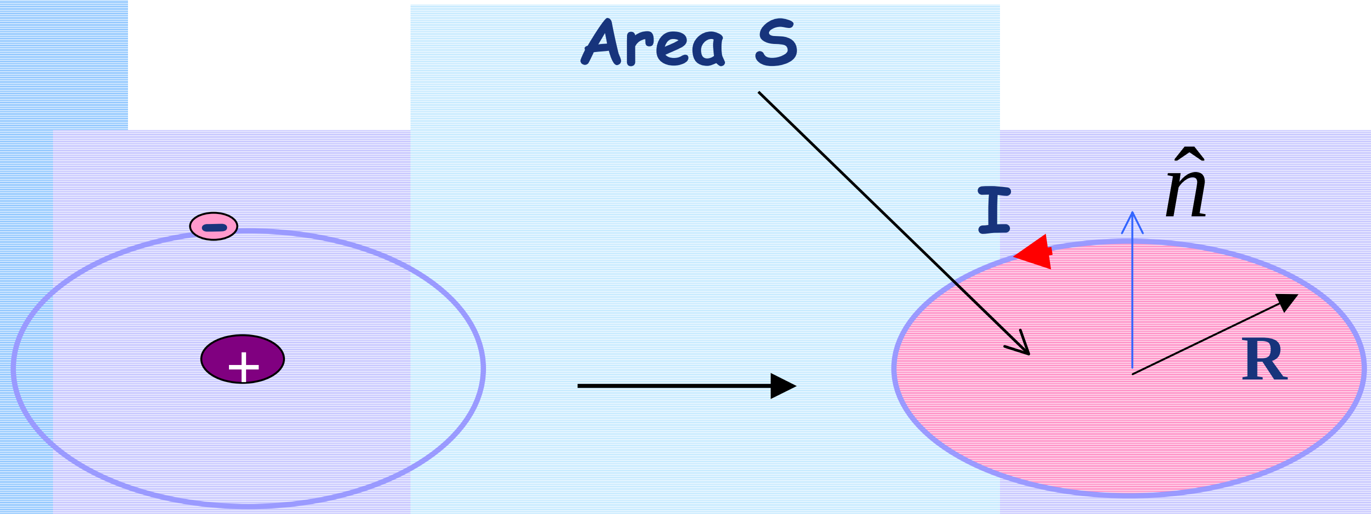
FI33A ELECTROMAGNETISMO
Clase 19
Carga en un Campo Magnético

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

- Repaso
  - Corrientes de Magnetización
  - Permeabilidad Magnética
  - Clasificación de materiales magnéticos
  - Condiciones de borde
- Cargas en campos magnéticos

Modelo atómico de los materiales

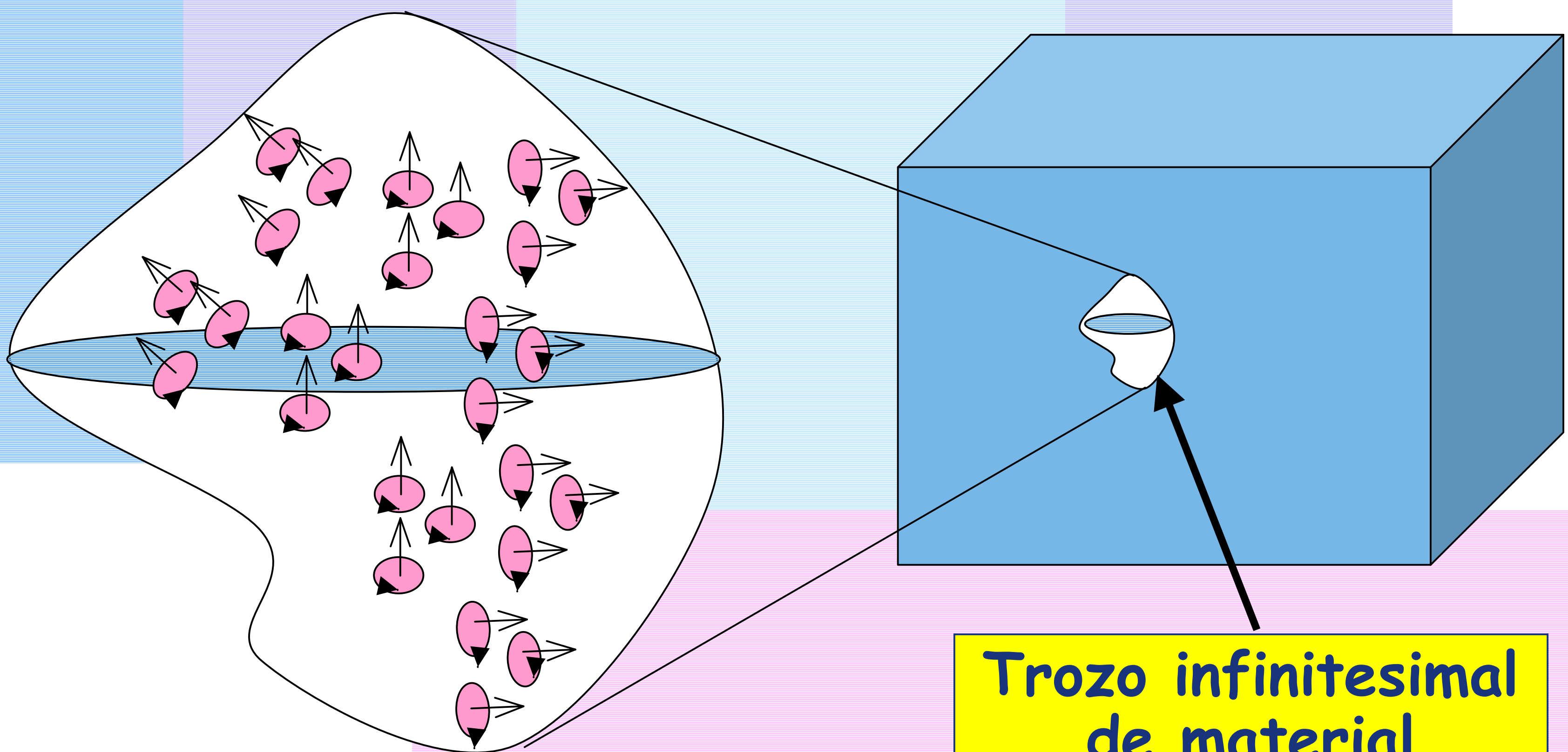


Se puede representar el átomo como un dipolo magnético

$$\vec{m} = I \cdot S\hat{n}[Am^2]$$

Modelo atómico de los materiales

En un material cualquiera hay un número muy elevado de dipolos magnéticos (átomos)



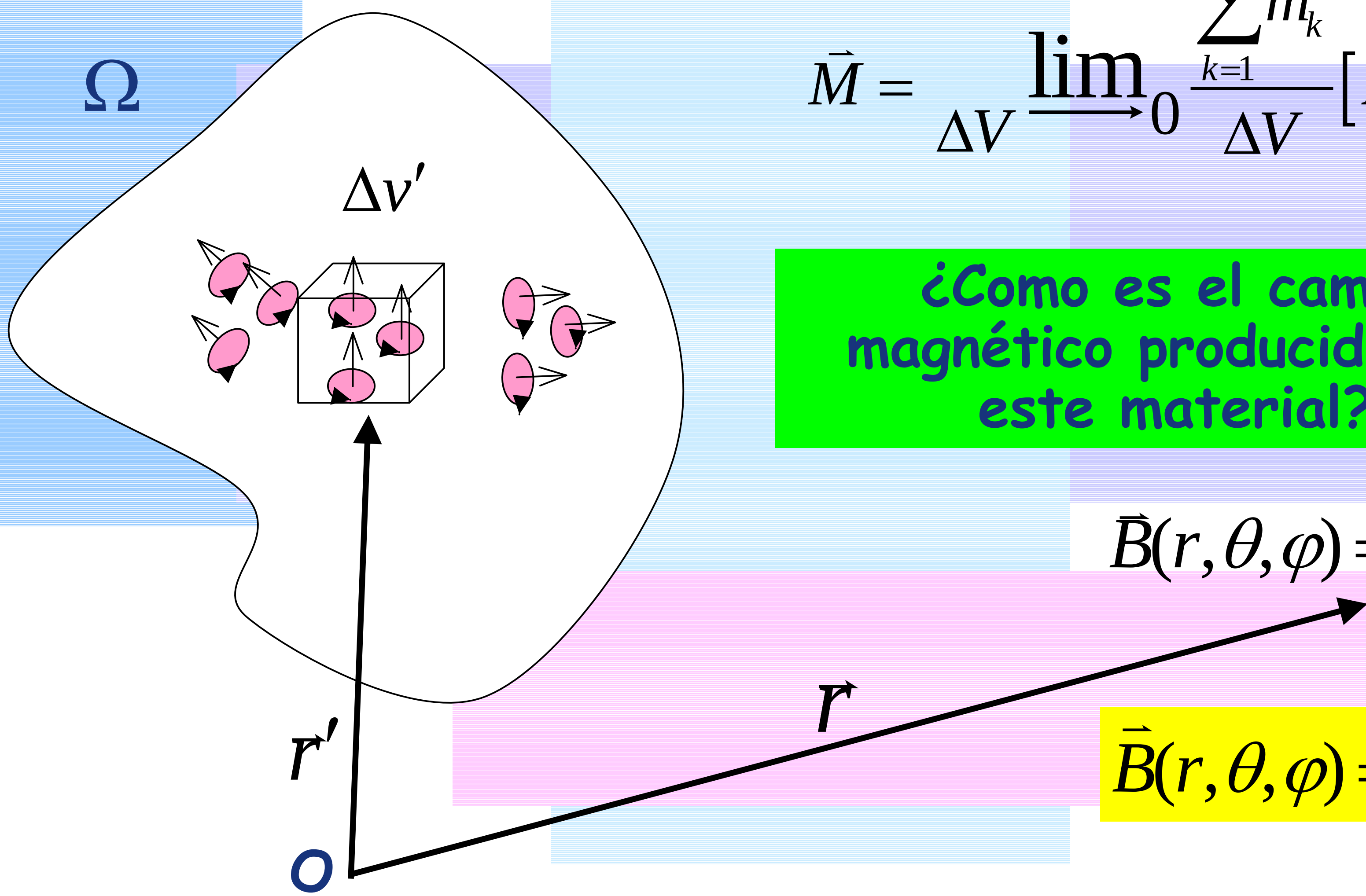
Trozo infinitesimal de material

Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

Corrientes de Magnetización

Consideremos un material magnetizado

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{m} \vec{m}_k}{\Delta V} \, [A/m]$$

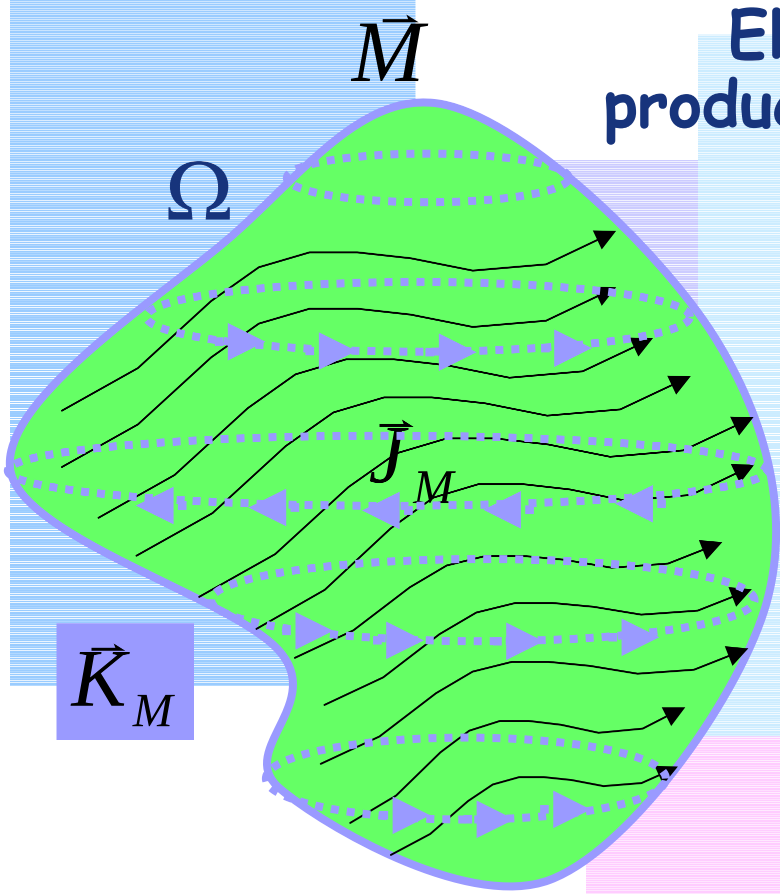


¿Como es el campo magnético producido por este material?

$$\vec{B}(r,\theta,\varphi) = ?$$

$$\vec{B}(r,\theta,\varphi) = \nabla \times \vec{A}$$

Corrientes de Magnetización



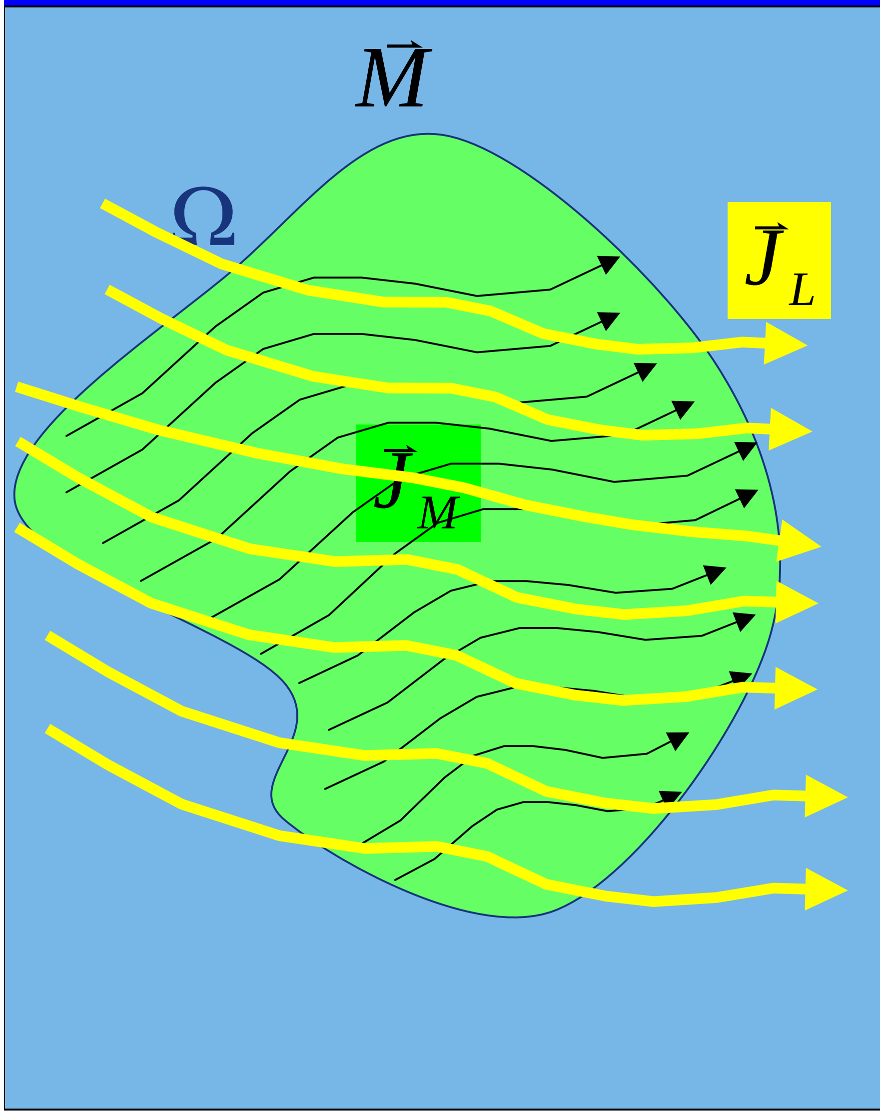
El vector potencial magnético que produce un material con magnetización es

$$\vec{A}(r) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\vec{J}_M\,dv'}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|}}_{\text{Potencial producido por una densidad de corriente en volumen}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_{S(\Omega)}\frac{\vec{K}_M\,ds'}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|}}_{\text{Potencial producido por una densidad de corriente de superficie}}$$

$$\vec{J}_M = \nabla'\times\vec{M}\left(\vec{r}\,'\right)$$

$$\vec{K}_M = \vec{M}\left(\vec{r}\,'\right)\times\hat{n}$$

Permeabilidad magnética



La 4ta ecuación de maxwell es

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

En general pueden haber dos tipos de corrientes en volumen

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_M$$

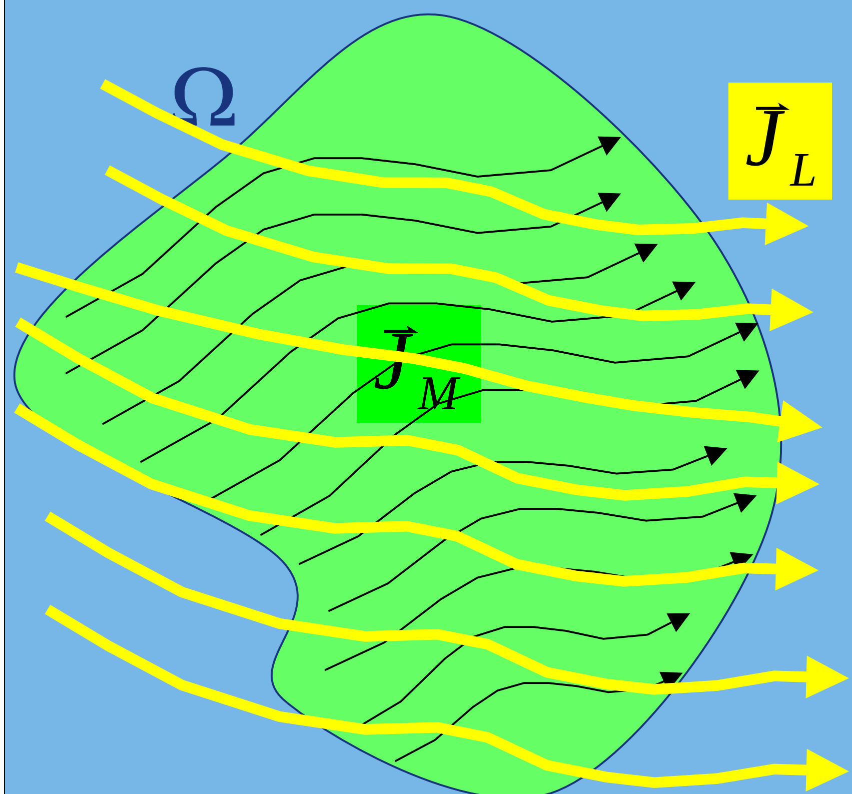
Corriente libre

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L$$

Corriente de magnetización

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_M$$

Permeabilidad magnética



$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_M$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \nabla \times \vec{H} + \nabla \times \vec{M}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right)$$

Experimentalmente se encuentra que $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \underbrace{\left(1 + \chi_m \right)} \vec{H}$$

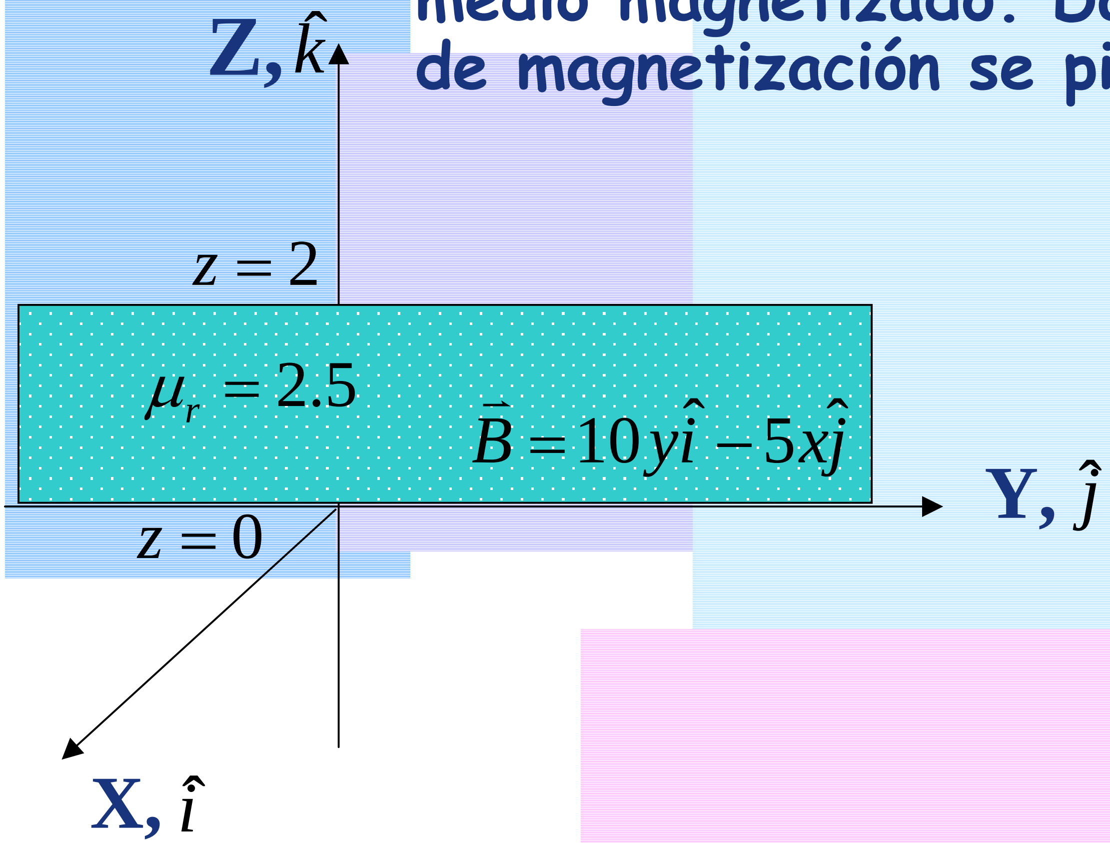
permeabilidad relativa del material μ_R

$$\therefore \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Permeabilidad magnética del material $\mu = \mu_R \mu_0$

Corrientes de Magnetización

Considere una región del espacio llena de un medio magnetizado. Dados B y la constante de magnetización se pide



$$\vec{M} = ?$$

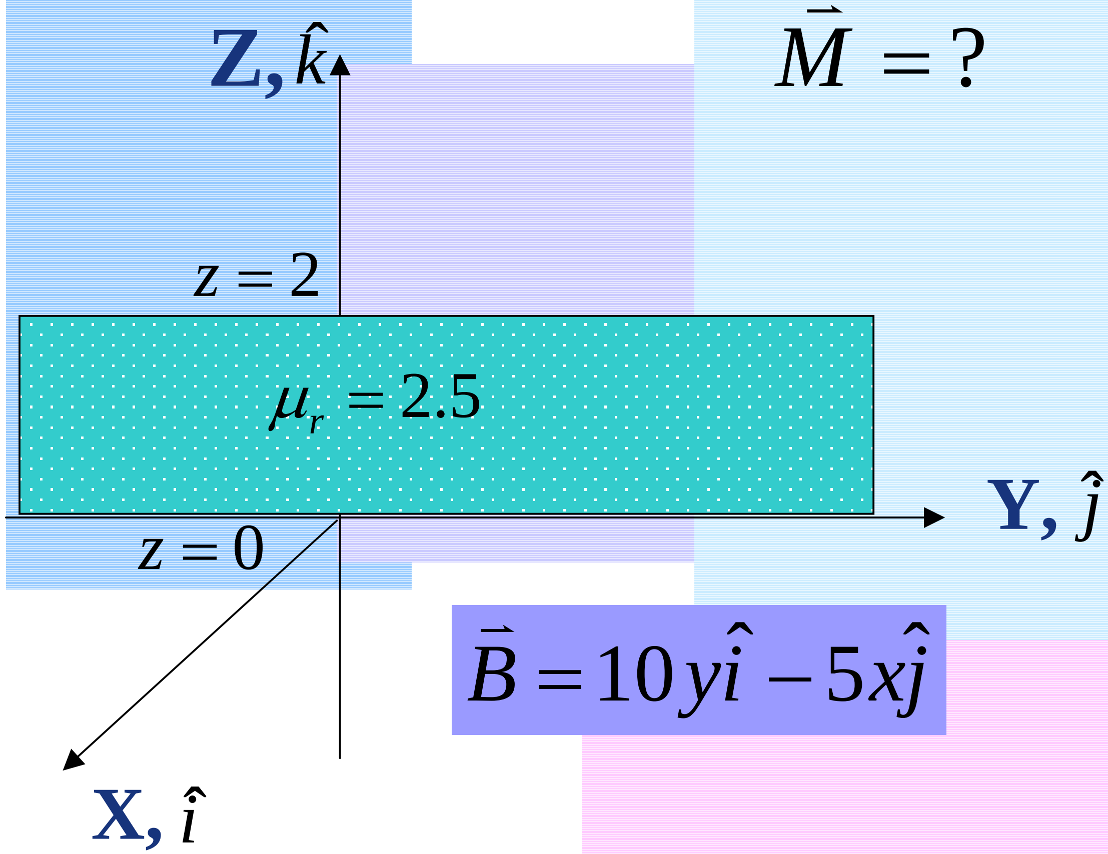
$$\vec{J}_M = ?$$

$$\vec{K}_M = ?$$

$$\vec{J}_L = ?$$

Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

Corrientes de Magnetización



$$\vec{M} = ?$$

$$\vec{B} = 10y\hat{i} - 5x\hat{j}$$

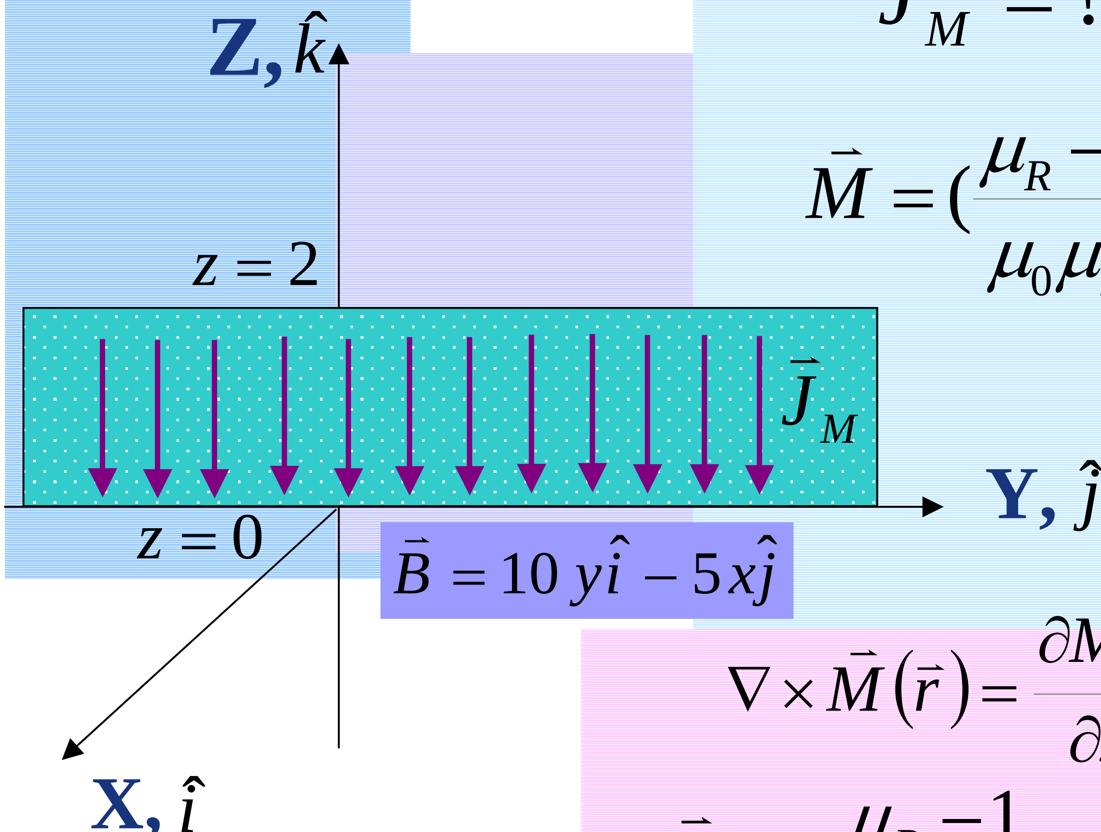
$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \qquad \mu = \mu_R\mu_0$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{\vec{B}}{\mu} = \left(\frac{\mu_R - 1}{\mu_0\mu_R}\right)\vec{B}$$

$$\boxed{\vec{M} = \left(\frac{\mu_R - 1}{\mu_0\mu_R}\right)(10y\hat{i} - 5x\hat{j})}$$

Corrientes de Magnetización



$$\vec{B} = 10\, y\hat{i} - 5\, x\hat{j}$$

$$\vec{J}_M = ?$$

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}(\vec{r})$$

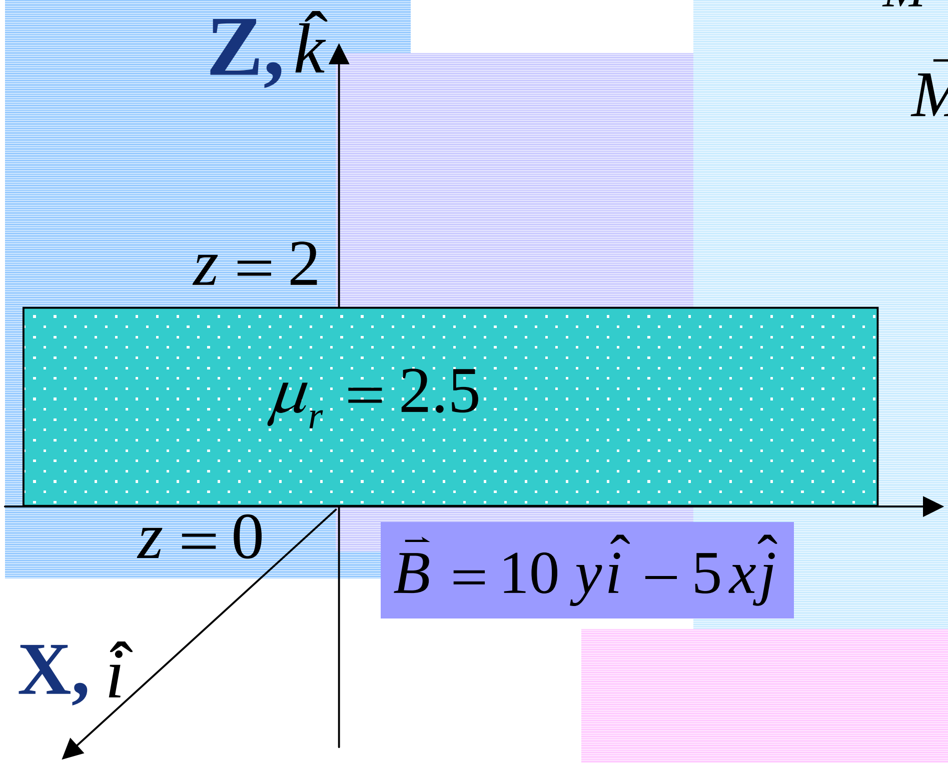
$$\vec{M} = \left(\frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R}\right)(10y\hat{i} - 5x\hat{j}) = M_x \hat{i} + M_y \hat{j}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla \times \vec{M}(\vec{r}) = \frac{\partial M_y}{\partial x}\hat{k} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\hat{k} + \frac{\partial M_x}{\partial z}\hat{j} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{J}_M = \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R}(-5\hat{k} - 10\hat{k}) = -\frac{15(\mu_R - 1)}{\mu_0 \mu_R}\hat{k}$$

Corrientes de Magnetización



$$\vec{B} = 10\,y\hat{i} - 5\,x\hat{j}$$

$$\vec{K}_M = ? \qquad \vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$$

$$\vec{M} = \left(\frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R}\right)(10y\hat{i} - 5x\hat{j}) = M_x\hat{i} + M_y\hat{j}$$

$$\hat{n} = \begin{cases} -\hat{k} & en \quad z = 0 \\ \hat{k} & en \quad z = 2 \end{cases}$$

$$\left.\vec{M}(\vec{r})\right|_{z=2} \times \hat{n} = -M_x\hat{j} + M_y\hat{i}$$

$$\left.\vec{M}(\vec{r})\right|_{z=2} \times \hat{n} = \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R}(-10y\hat{j} - 5x\hat{i})$$

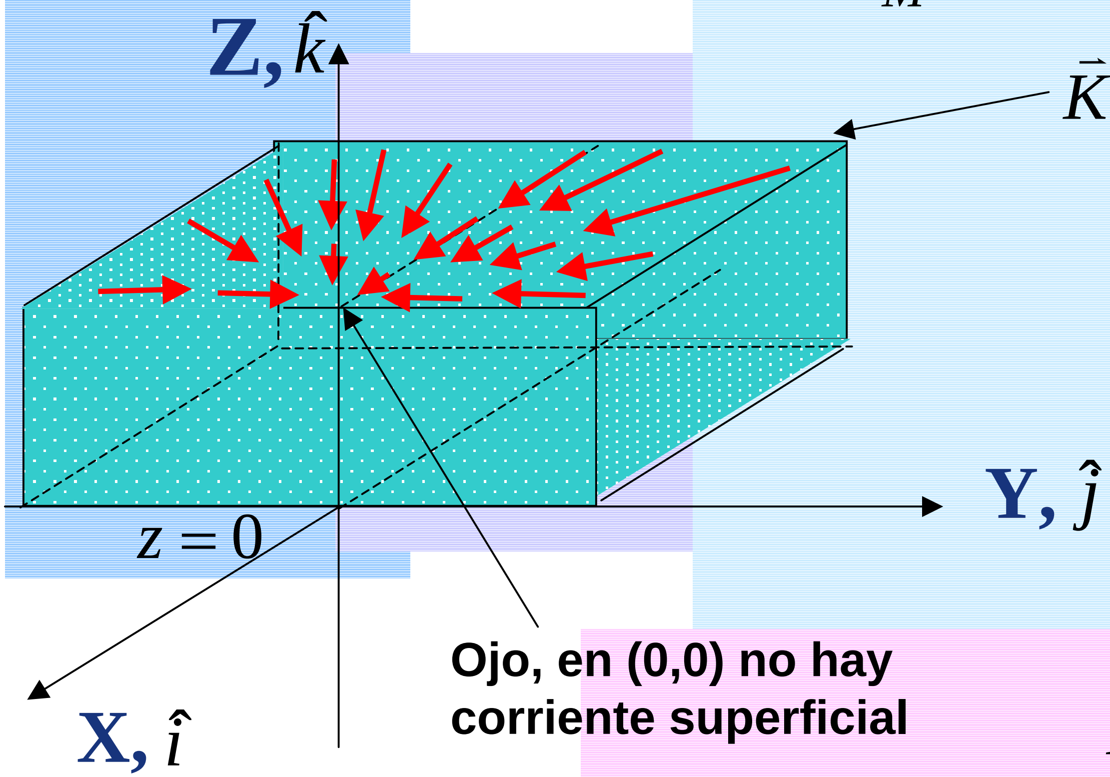
$$\left.\vec{M}(\vec{r})\right|_{z=0} \times \hat{n} = M_x\hat{j} - M_y\hat{i} \Rightarrow \qquad \left.\vec{M}(\vec{r})\right|_{z=0} \times \hat{n} = \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R}(10y\hat{j} + 5x\hat{i})$$

Corrientes de Magnetización

$$\vec{K}_M = ?$$

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$$

$$\left.\vec{K}_M\right|_{z=2} = \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R}(-10y\hat{j} - 5x\hat{i})$$



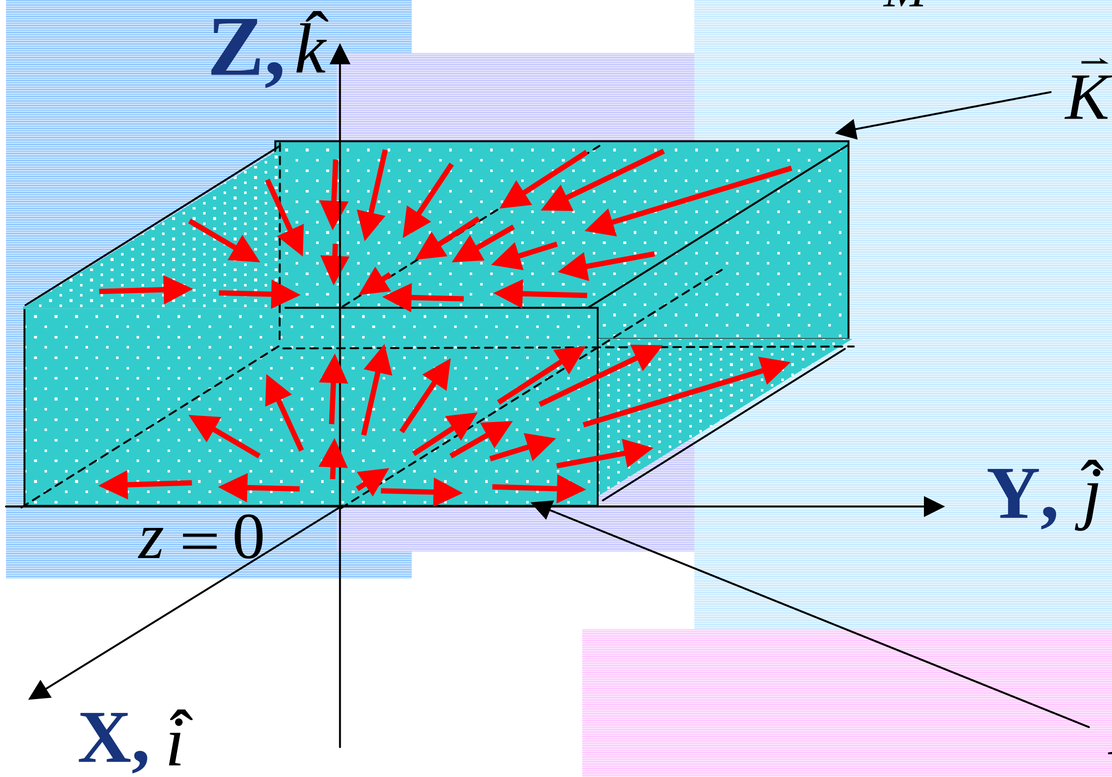
Ojo, en (0,0) no hay corriente superficial

$$\left.\vec{K}_M\right|_{z=0} = \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R}(10y\hat{j} + 5x\hat{i})$$

Corrientes de Magnetización

$$\vec{K}_M = ?$$

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$$



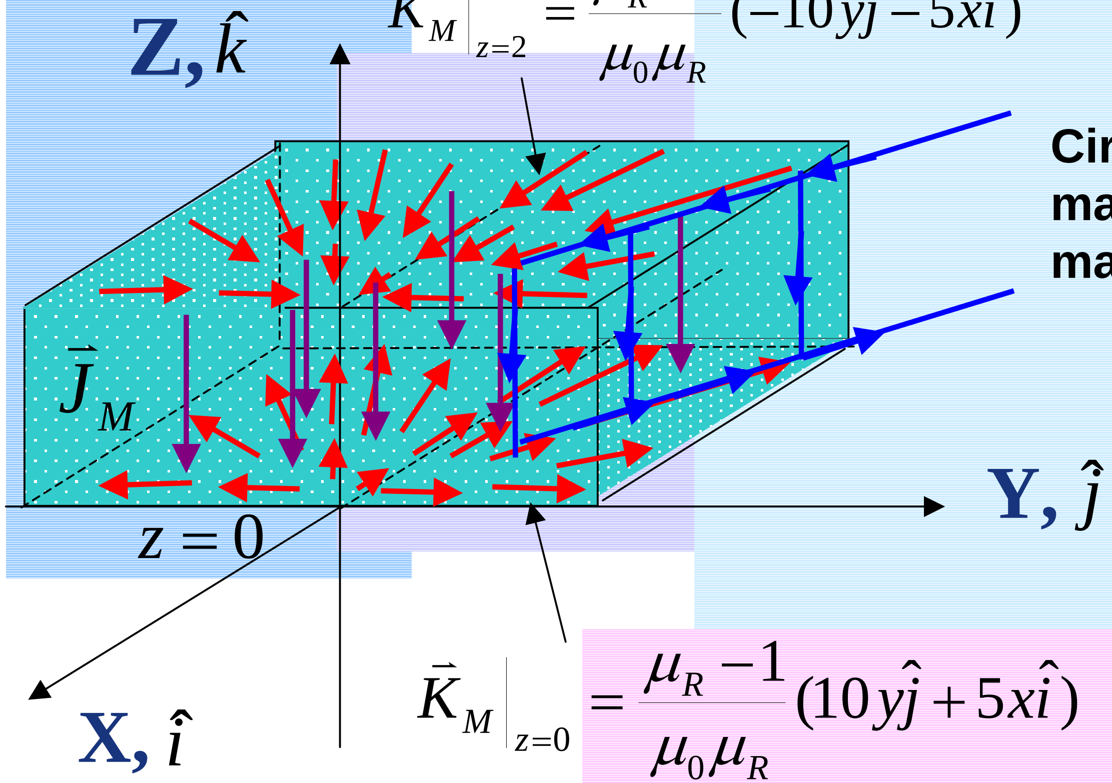
$$\vec{K}_M\Big|_{z=2} = \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R}\left(-10y\hat{j} - 5x\hat{i}\right)$$

$$\vec{K}_M\Big|_{z=0} = \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R}\left(10y\hat{j} + 5x\hat{i}\right)$$

Corrientes de Magnetización

$$\vec{K}_M = ? \qquad \vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$$

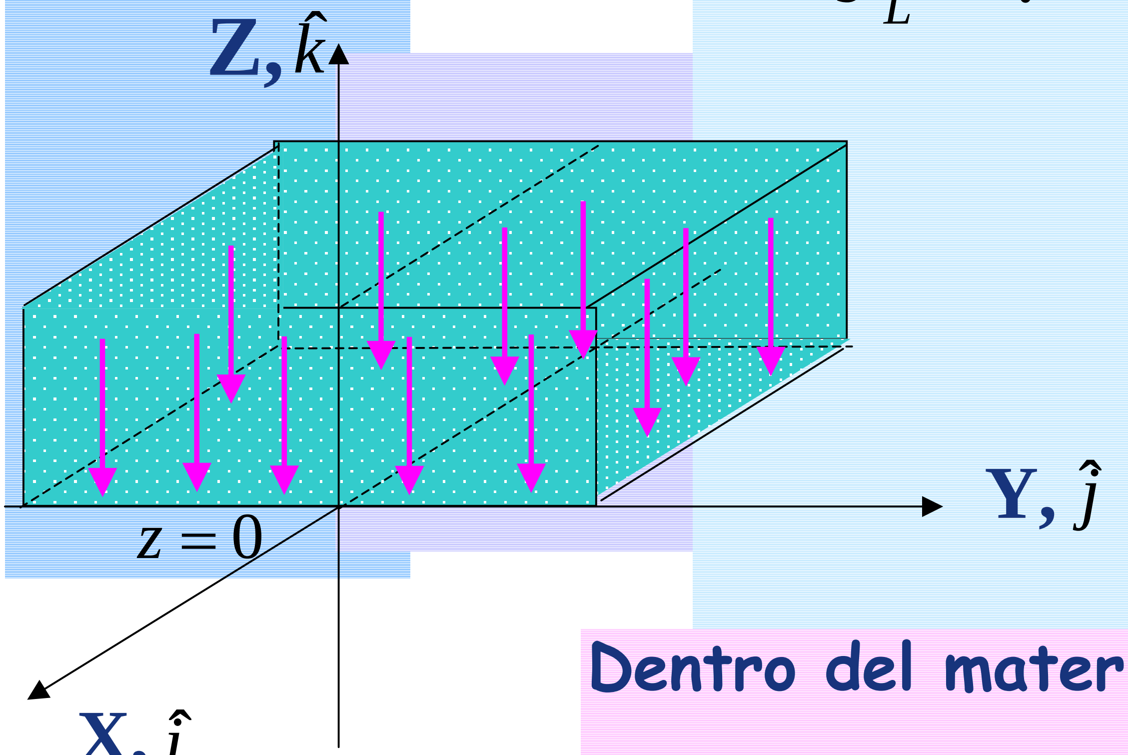
$$\vec{K}_M\Big|_{z=2} = \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R}(-10y\hat{j} - 5x\hat{i})$$



Circuito típico de corriente de magnetización al interior del material (se cierra en el infinito)

$$\vec{K}_M\Big|_{z=0} = \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R}(10y\hat{j} + 5x\hat{i})$$

Corrientes de Magnetización



$$\vec{J}_L = ?$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\vec{B} = 10\, y\hat{i} - 5x\hat{j}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}(10\, y\hat{i} - 5x\hat{j})$$

Dentro del material $\vec{J}_L = \dfrac{-15}{\mu_0 \mu_R}\hat{k}$

Fuera del material $\vec{J}_L = \dfrac{-15}{\mu_0}\hat{k}$

Clasificación de los Materiales Magnéticos

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\mu = \mu_R \mu_0$$

Materiales magnéticos

Materiales diamagnéticos

$$\chi_m < 0, \mu_r \leq 1$$

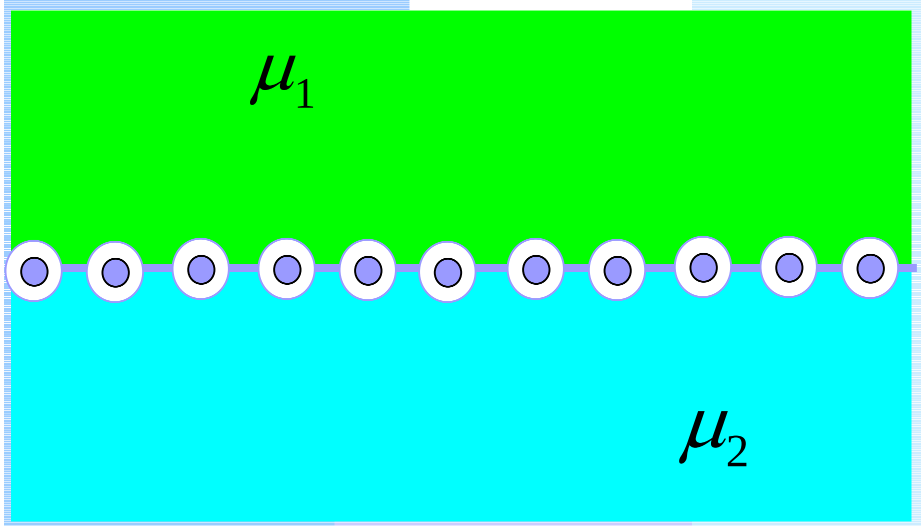
Materiales paramagnétic

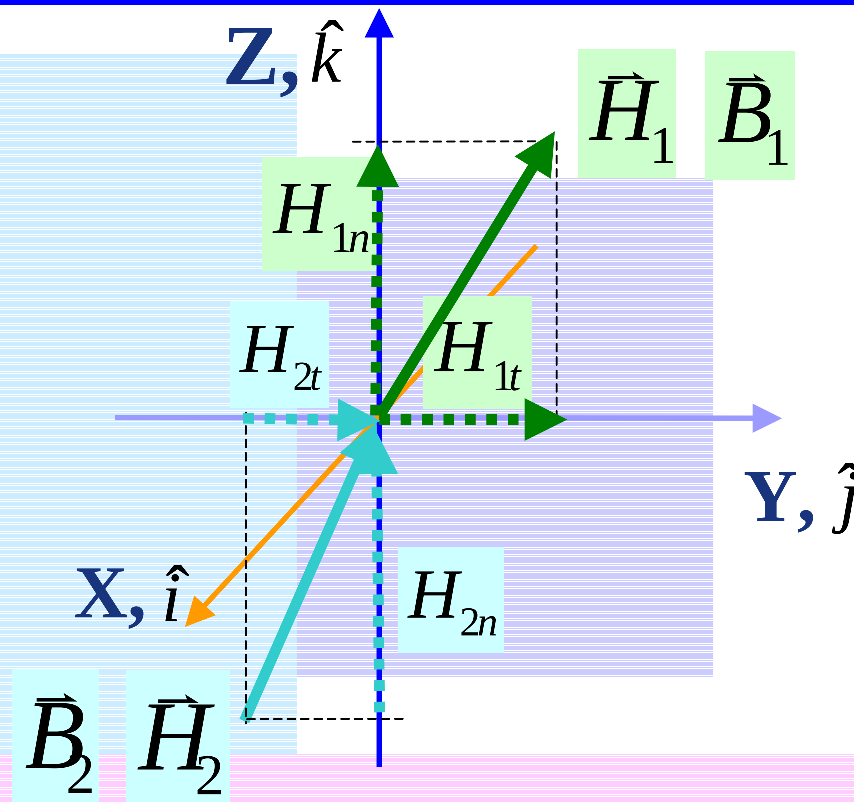
$$\chi_m > 0, \mu_r \geq 1$$

Materiales Ferromagnéticos

$$\chi_m >> 0, \mu_r >> 1$$

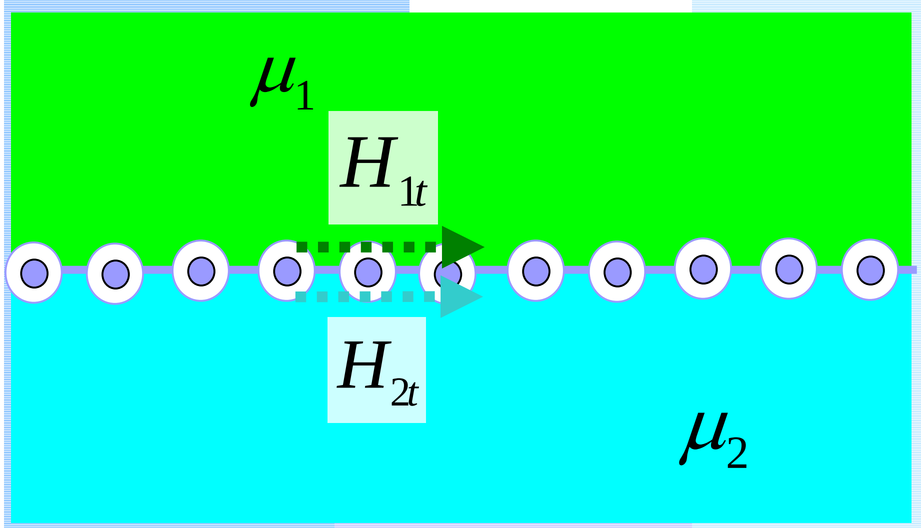
Condiciones de borde entre dos medios

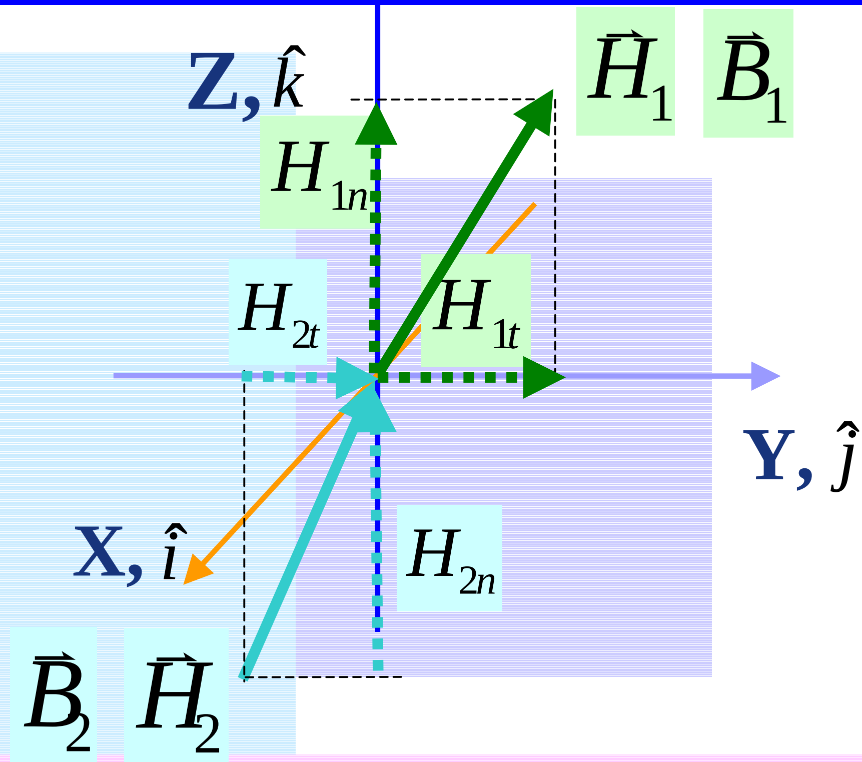




$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \quad B_{1n} = B_{2n} \Leftrightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Condiciones de borde entre dos medios

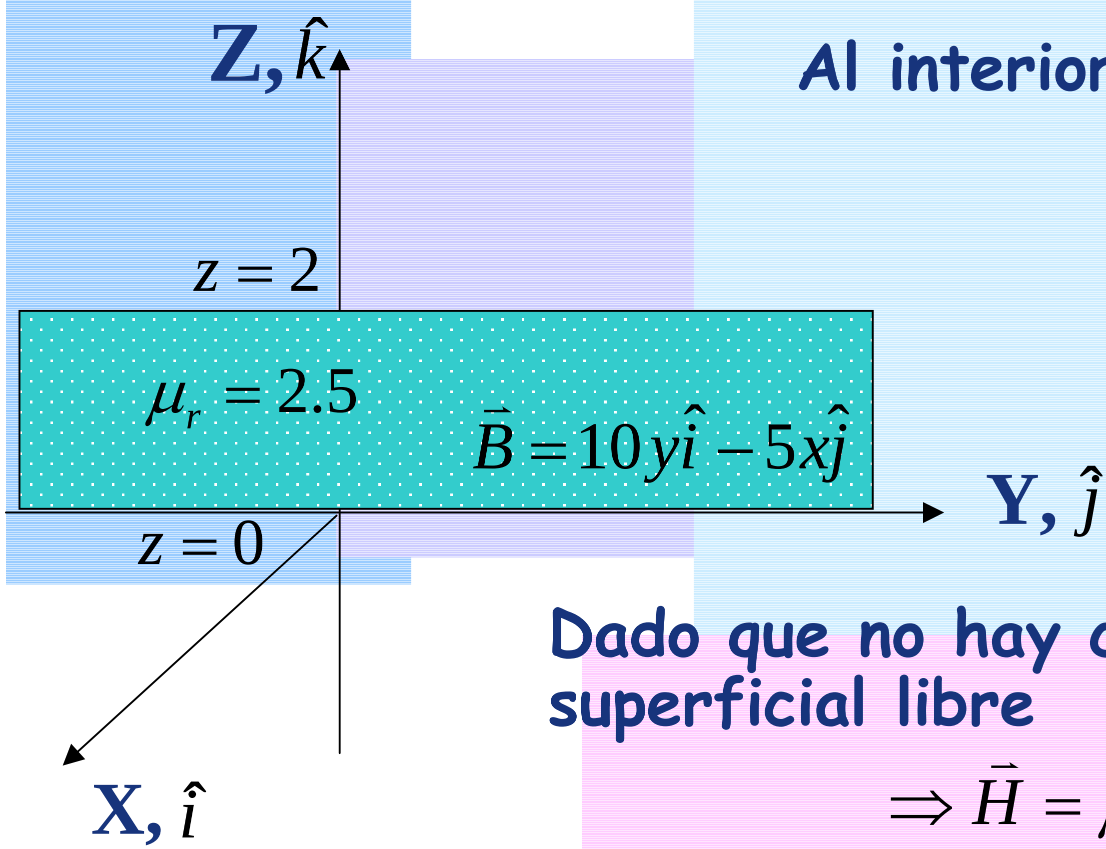




$$H_{2T}\Delta w - H_{1T}\Delta w = K\Delta w \qquad \therefore H_{2T} - H_{1T} = K$$

Corrientes de Magnetización

Dado B al interior del medio, determinar B y H afuera



Al interior $\vec{B} = 10y\hat{i} - 5x\hat{j}$

$$\vec{H} = \mu_0\mu_r(10y\hat{i} - 5x\hat{j})$$

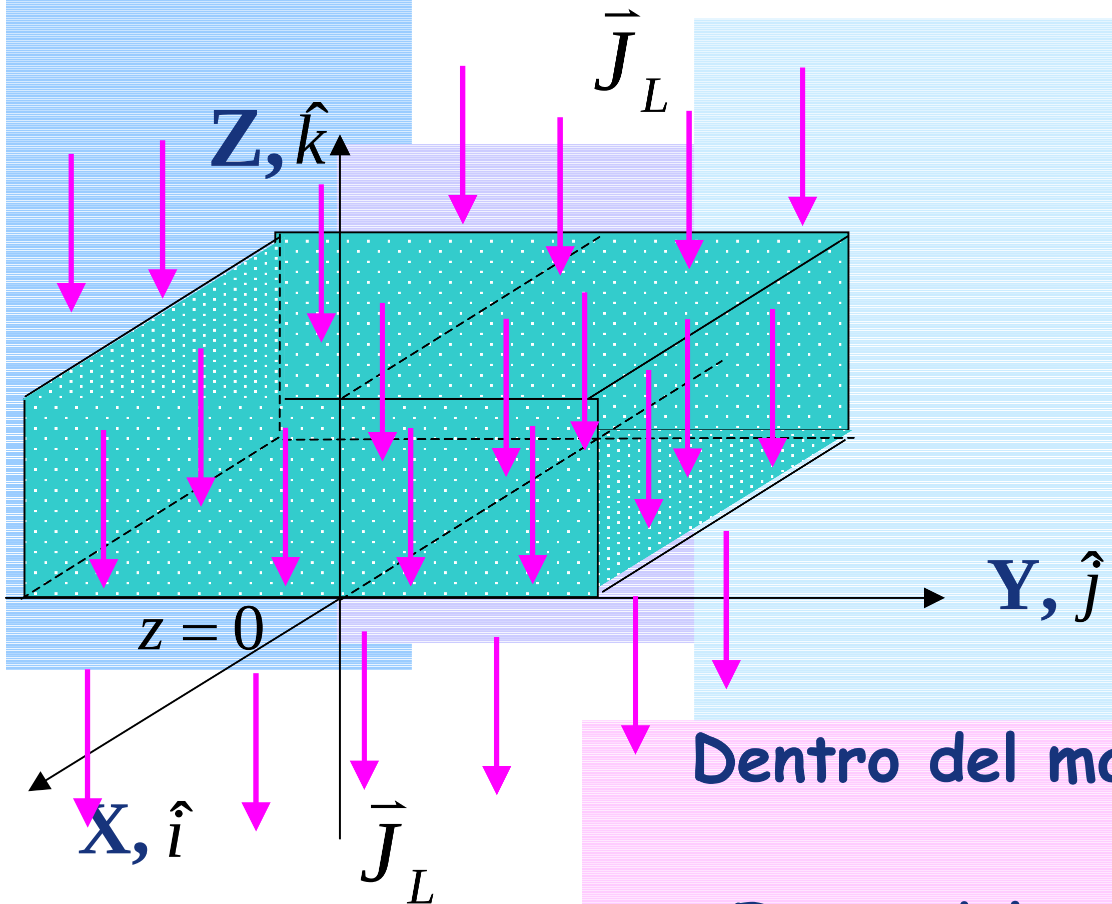
Al exterior

$$B_{1n} = B_{2n} = \vec{B} \bullet \hat{k} = 0$$

Dado que no hay corriente superficial libre $H_{2T} - H_{1T} = K = 0$

$$\Rightarrow \vec{H} = \mu_0\mu_r(10y\hat{i} - 5x\hat{j})$$

Corrientes de Magnetización



$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\vec{B} = 10\, y\hat{i} - 5\, x\hat{j}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}(10\, y\hat{i} - 5\, x\hat{j})$$

Dentro del material $\vec{J}_L = \dfrac{-15}{\mu_0 \mu_R}\hat{k}$

Fuera del material $\vec{J}_L = \dfrac{-15}{\mu_0 \mu_R}\hat{k}$

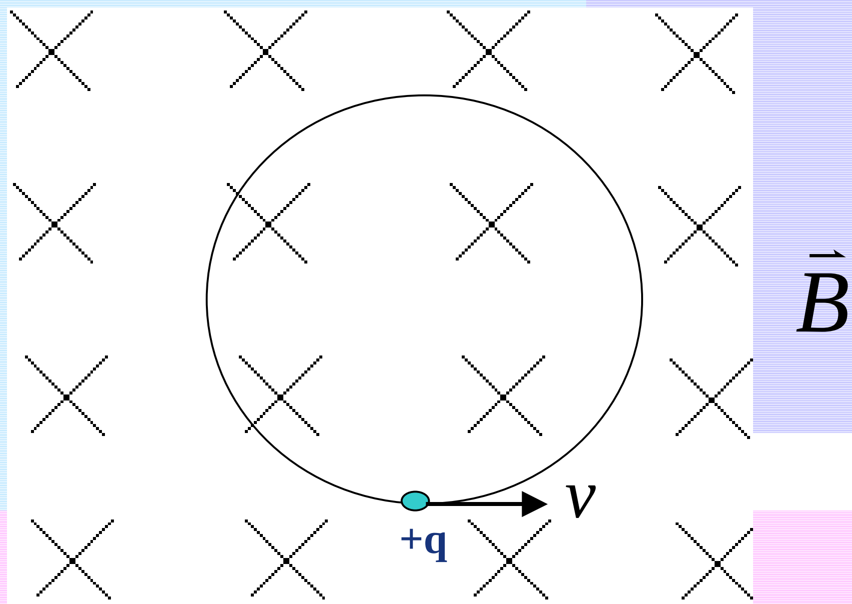
Cargas en campos magnéticos

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

Fuerza de Lorentz

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$



Trayectoria circular

Cargas en campos magnéticos

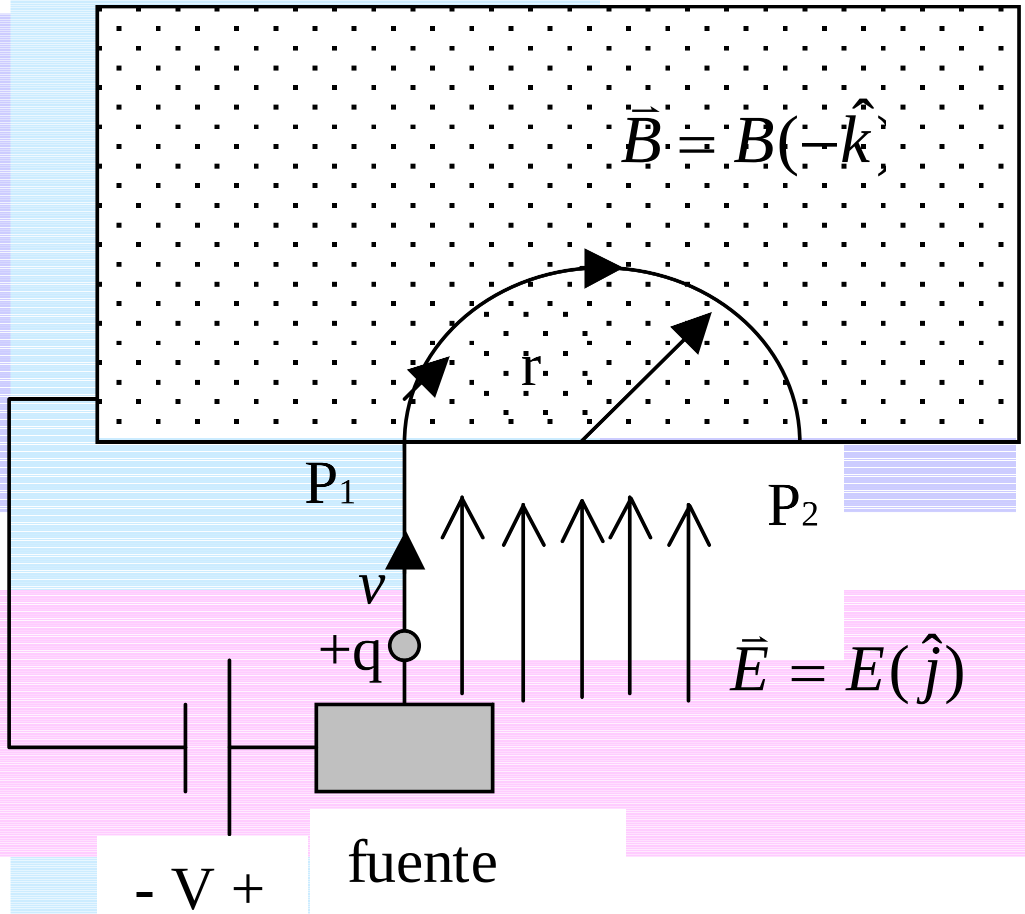
$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Radio r depende de la razón masa/carga

Espectrógrafo de Masas

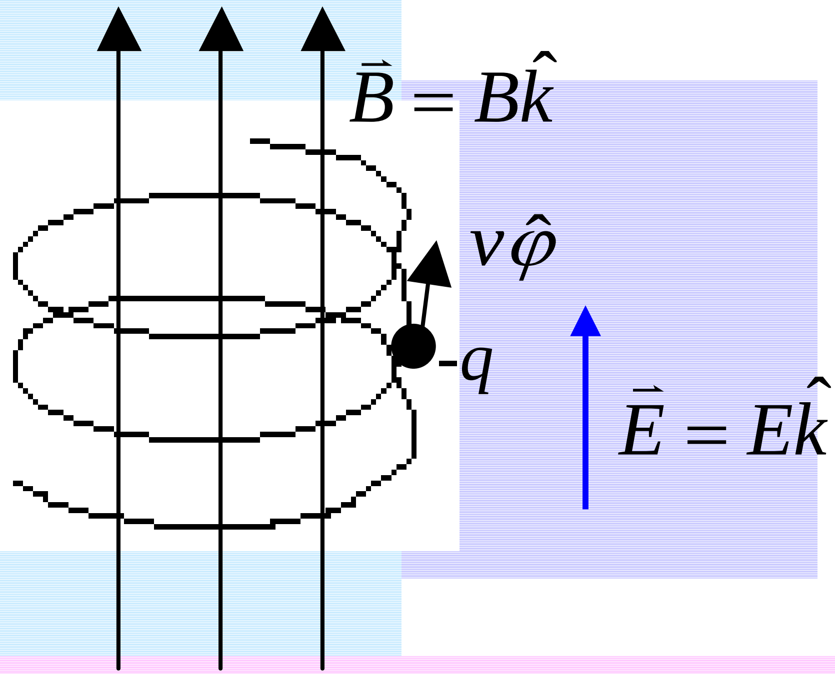


Cargas en Campos Magnéticos

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{qB}$$



Trayectoria helicoidal