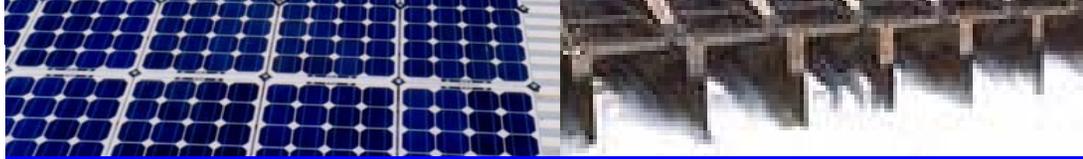




Escuela de
Ingeniería
Universidad
de Chile



FI33A ELECTROMAGNETISMO

Clase 18

Magnetostática-V

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

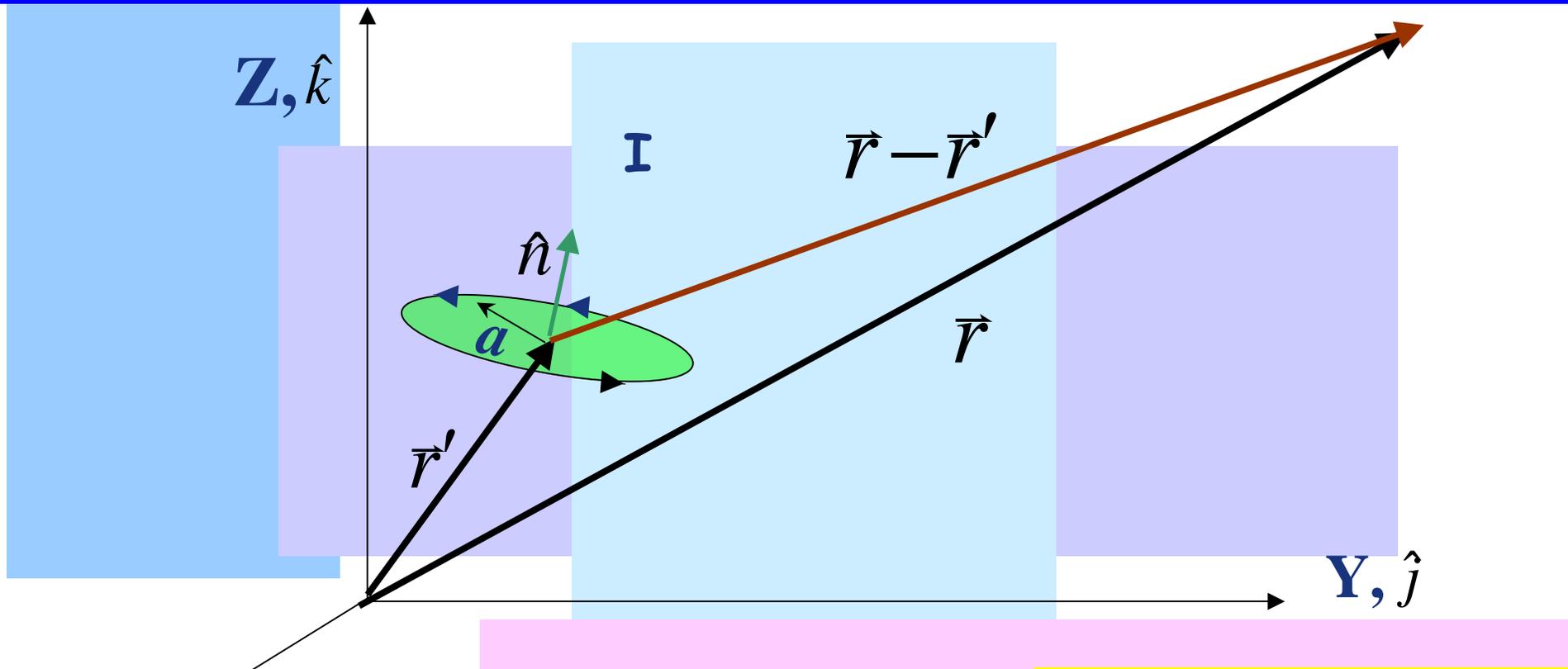


INDICE

- Vector potencial magnético de dipolo
- Modelo atómico de los materiales
- Corrientes de Magnetización
- Permeabilidad Magnética
- Clasificación de materiales magnéticos
- Ciclo de histéresis
- Condiciones de borde



Vector potencial magnético de un dipolo

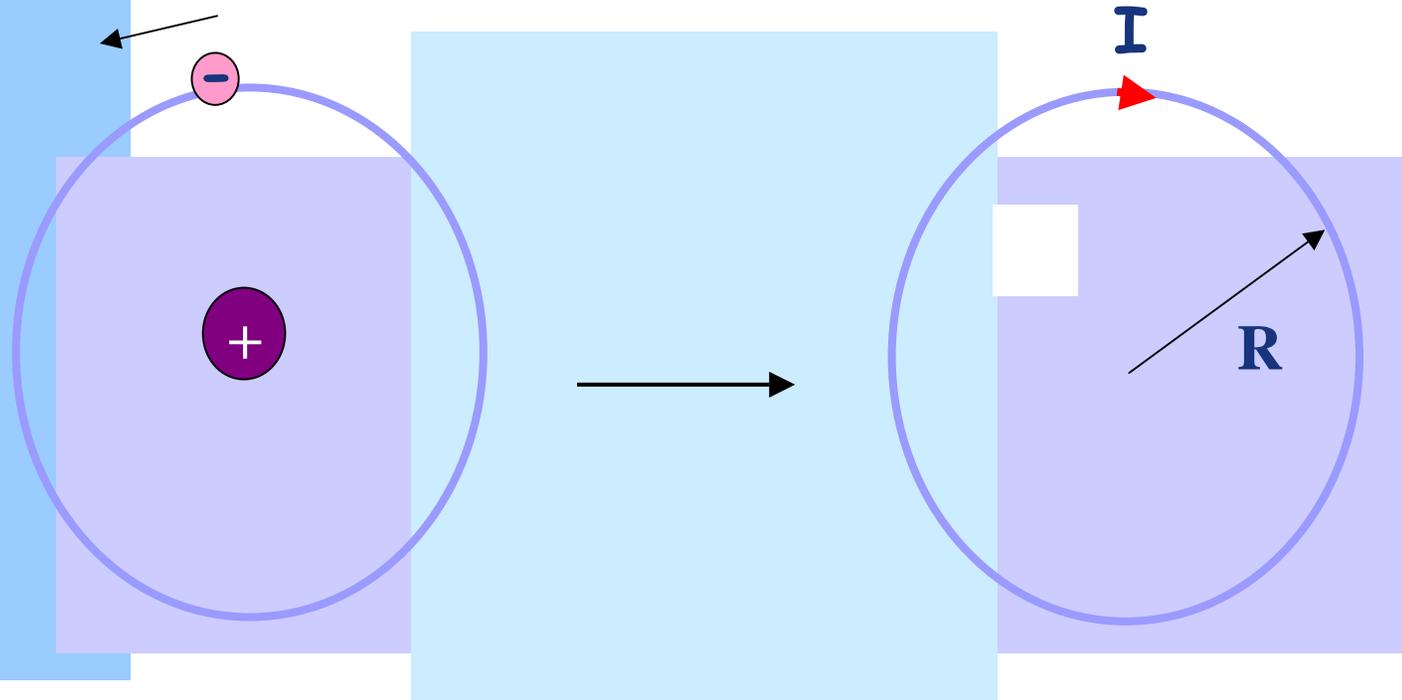


Potencial magnético vector producido por un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Modelo atómico de los materiales

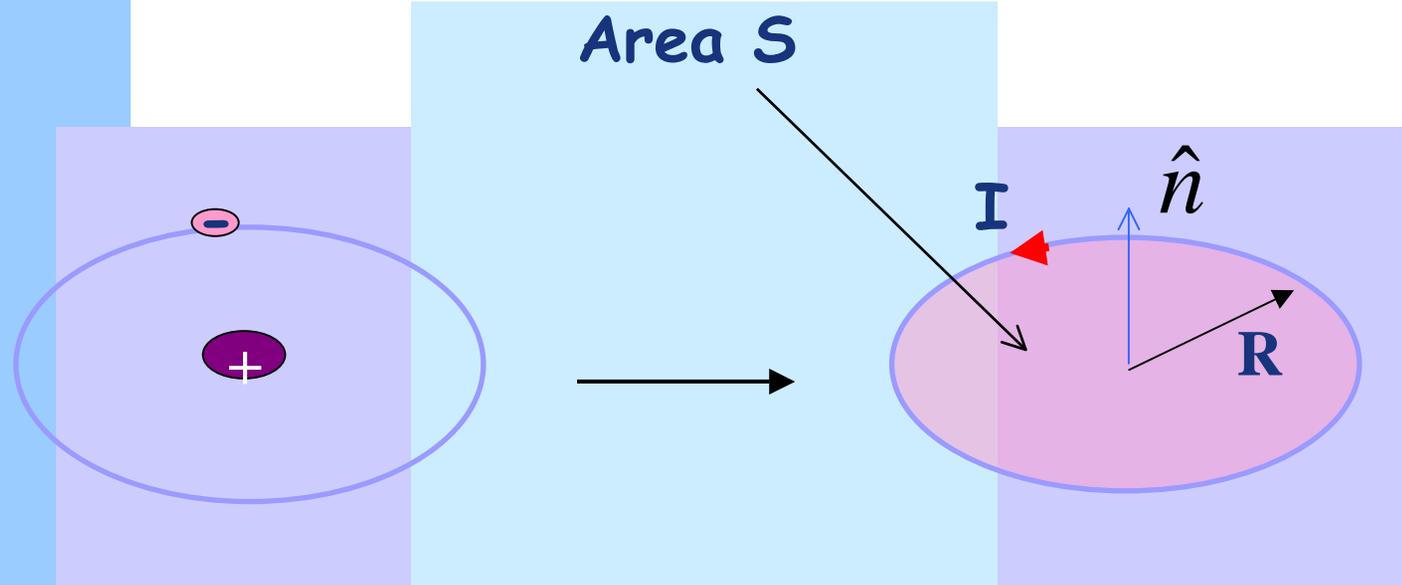


Movimiento de electrones se puede modelar como una corriente

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{qu}{2\pi R}$$

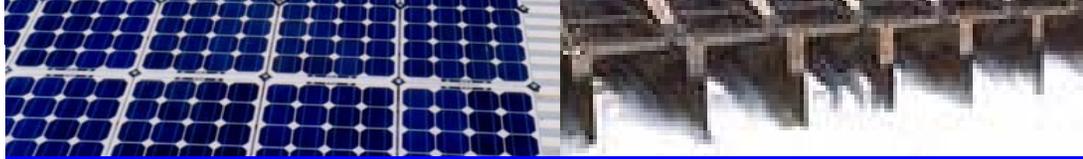


Modelo atómico de los materiales



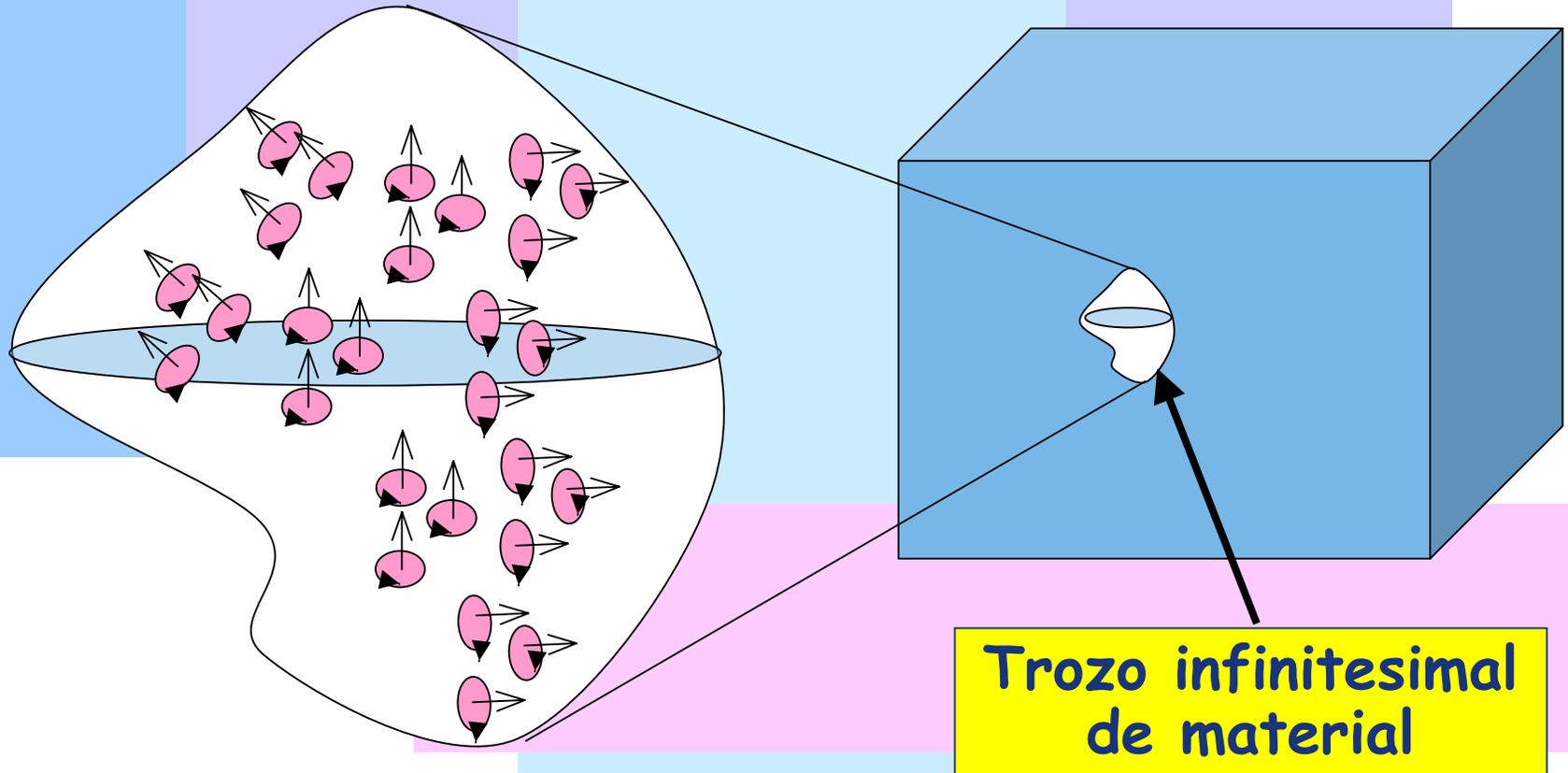
Se puede representar el átomo como un dipolo magnético

$$\vec{m} = I \cdot S \hat{n} [Am^2]$$



Modelo atómico de los materiales

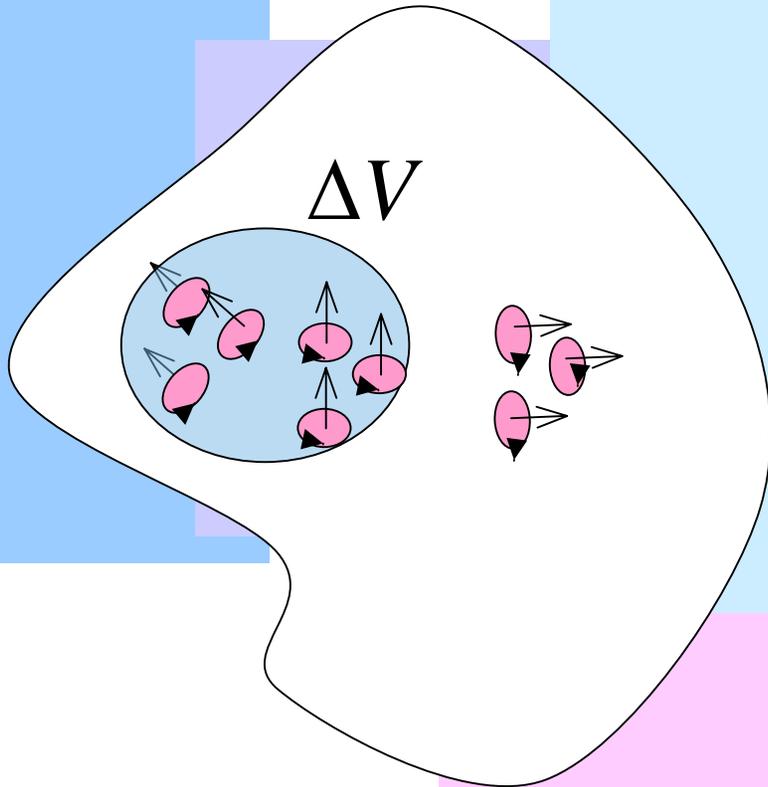
En un material cualquiera hay un número muy elevado de dipolos magnéticos (átomos)





Modelo atómico de los materiales

Vector magnetización

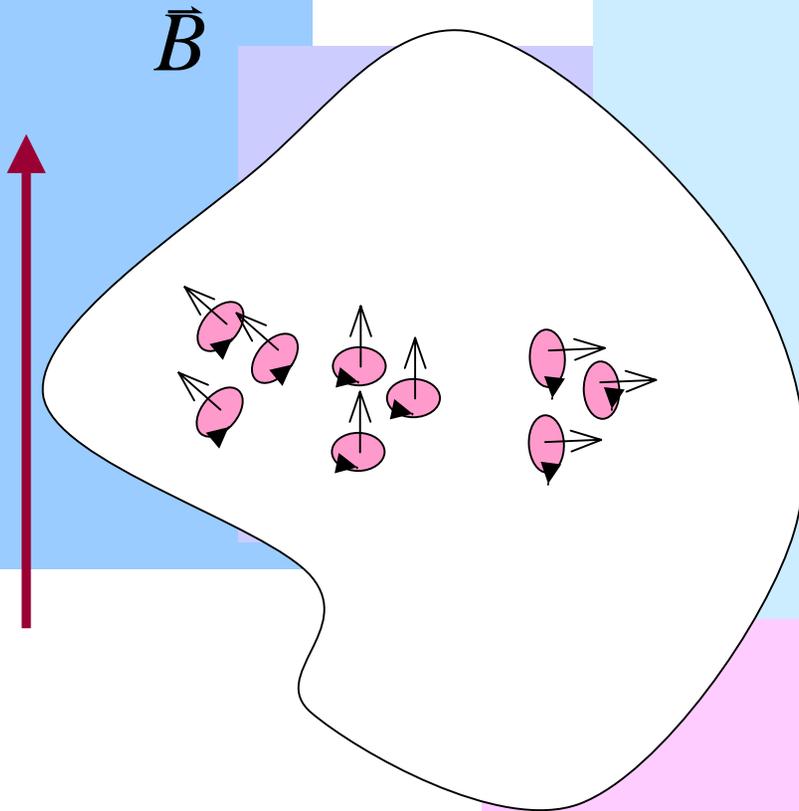


$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^m \vec{m}_k}{\Delta V} \left[A/m \right]$$



Modelo atómico de los materiales

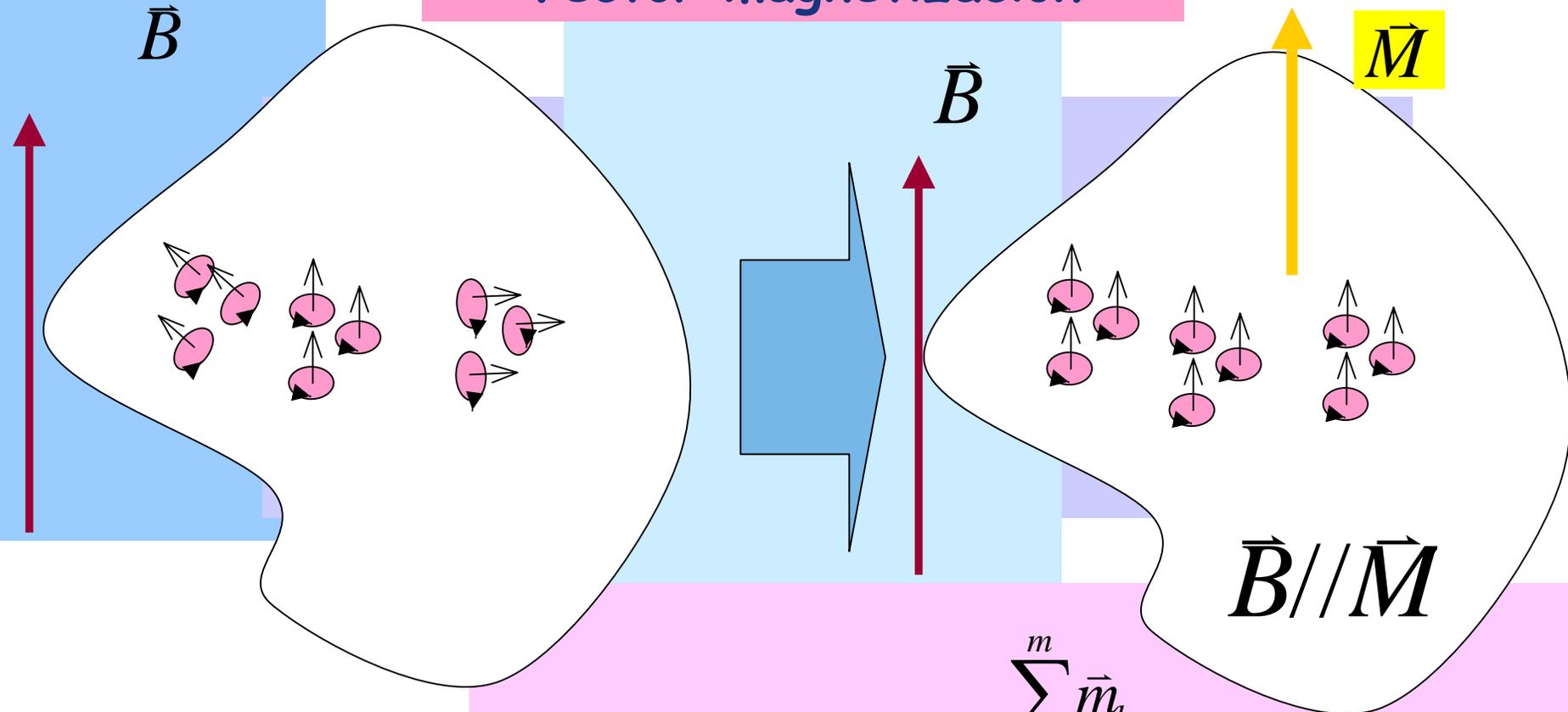
Vector magnetización





Modelo atómico de los materiales

Vector magnetización

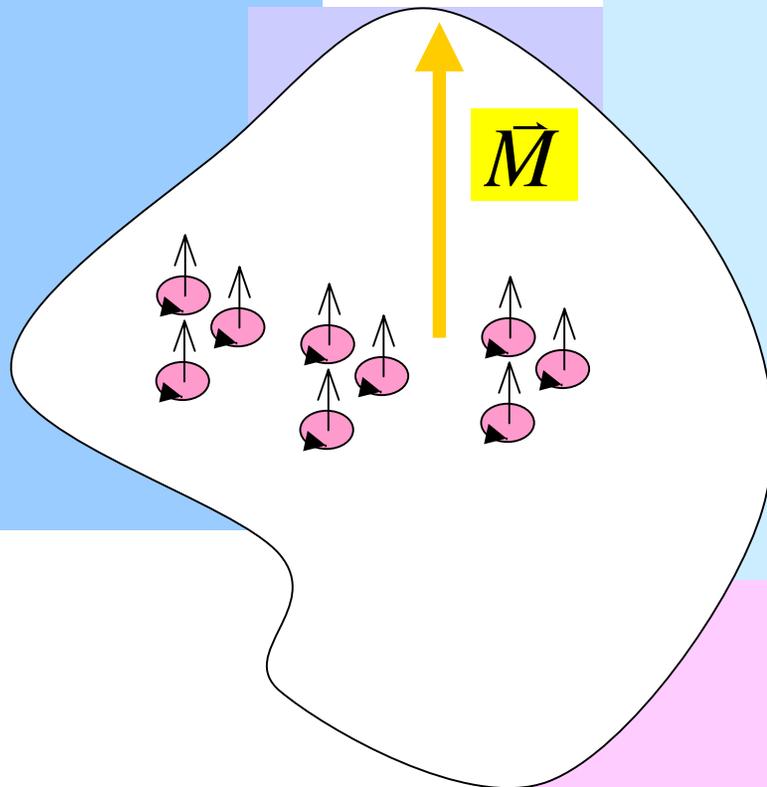


$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^m \vec{m}_k}{\Delta V} \quad [A/m]$$



Modelo atómico de los materiales

Vector magnetización



si $\vec{B} = 0$

¿Qué
ocurre para
 $t \rightarrow \infty$?

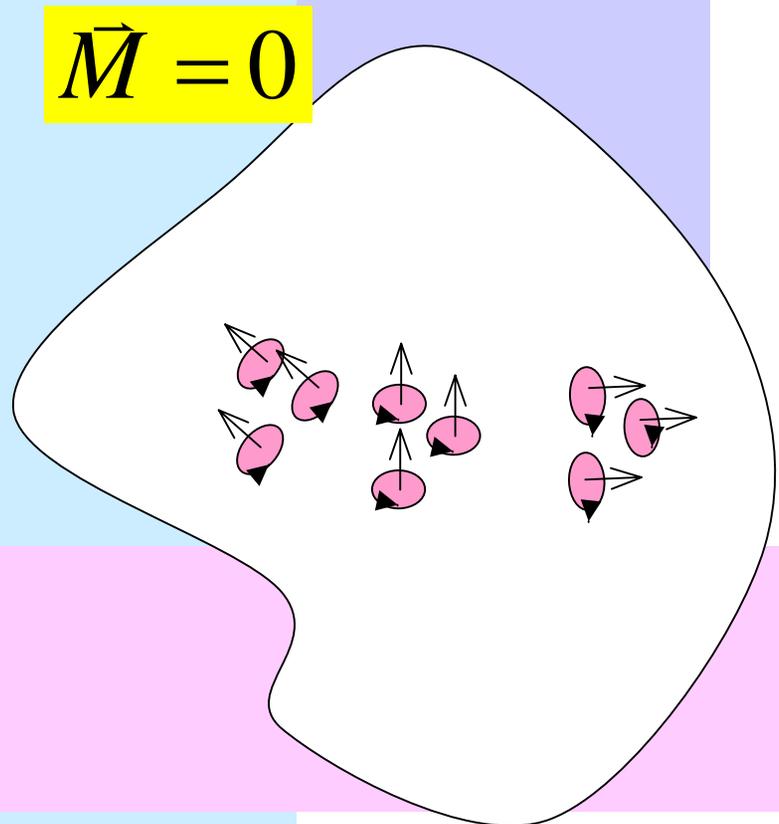
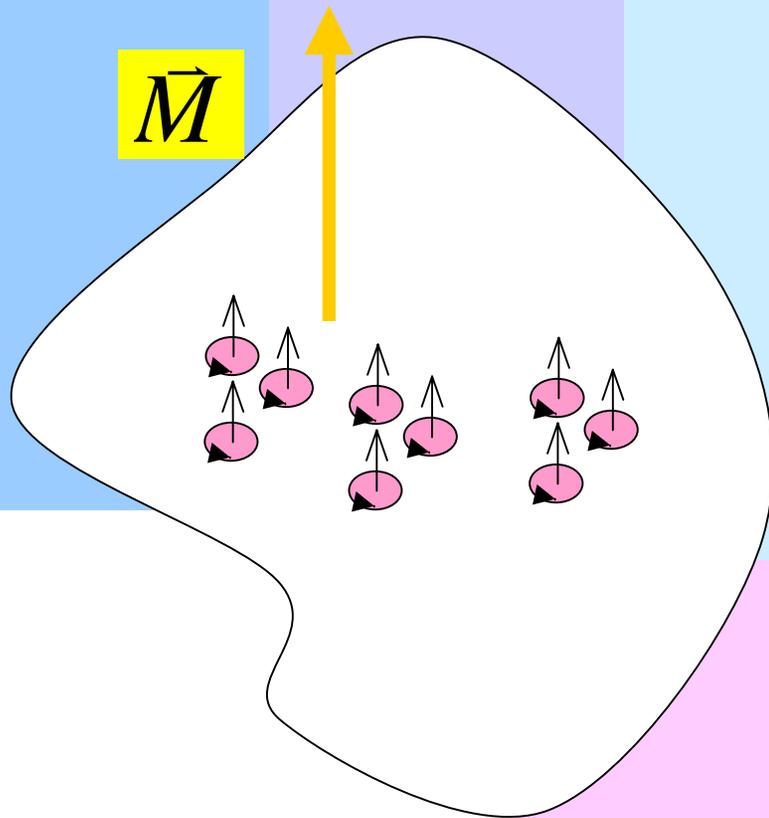
$\vec{M} = ?$



Modelo atómico de los materiales

Materiales mantienen la magnetización

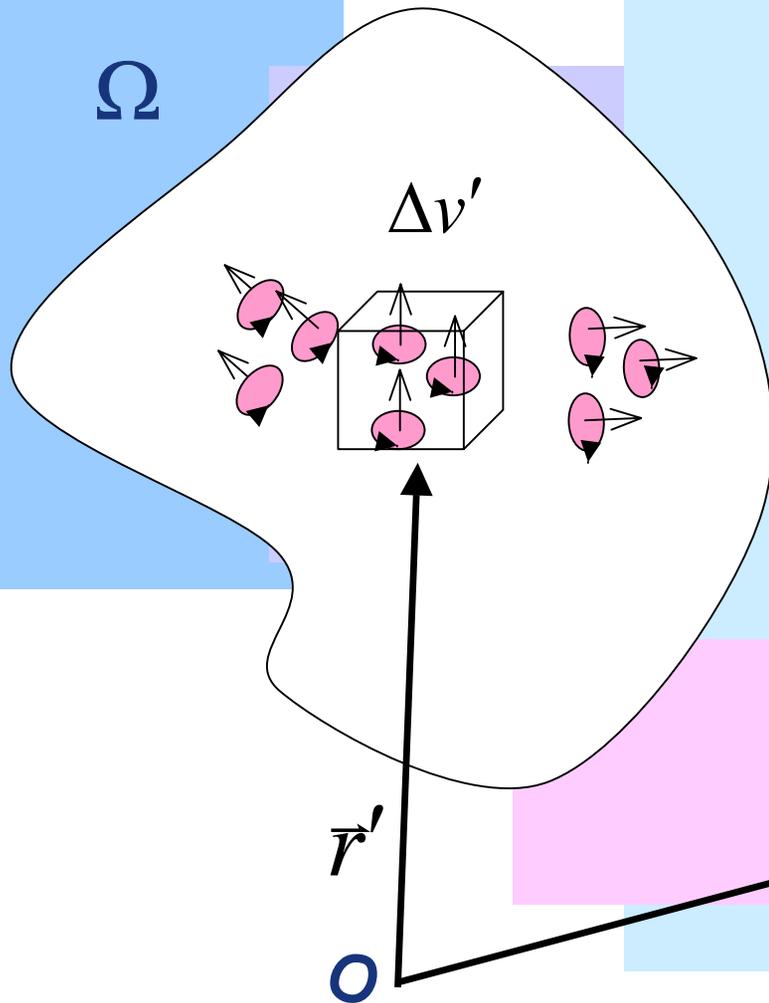
Pero la mayoría la pierde





Corrientes de Magnetización

Consideremos un material magnetizado



$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^m \vec{m}_k}{\Delta V} \text{ [A/m]}$$

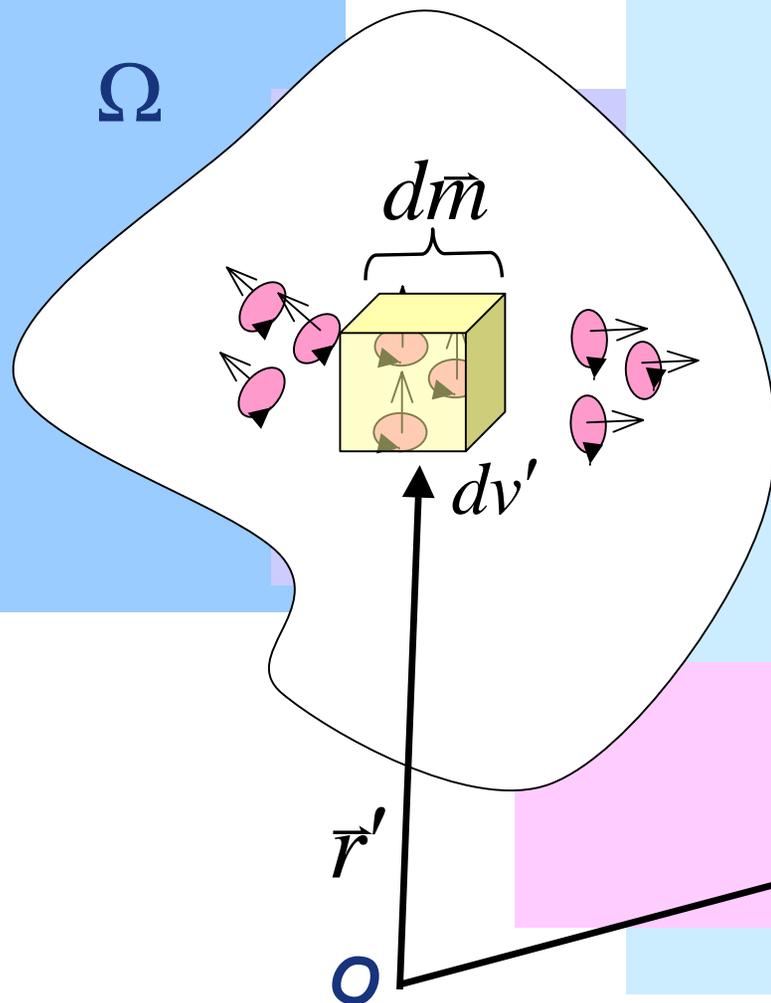
¿Como es el campo magnético producido por este material?

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = ?$$



Corrientes de Magnetización

Calcularemos el campo a partir del vector potencial magnético



Recordemos que
para un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

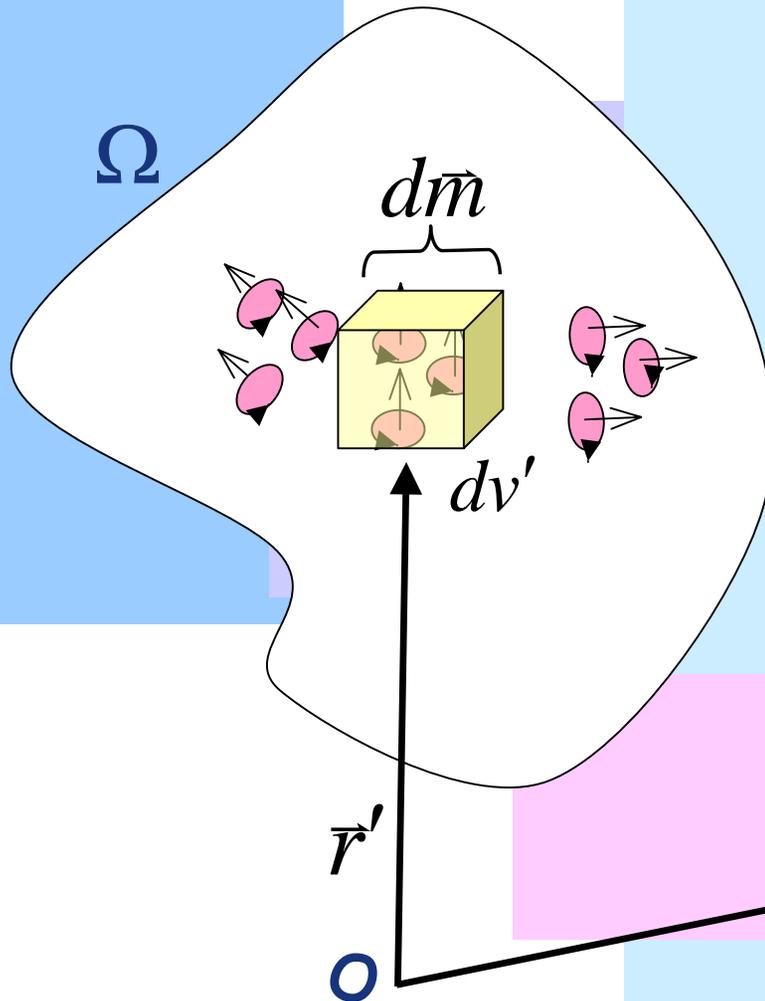
y en forma diferencial

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{m} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Corrientes de Magnetización

En términos del vector magnetización $d\vec{m} = \vec{M} dv'$



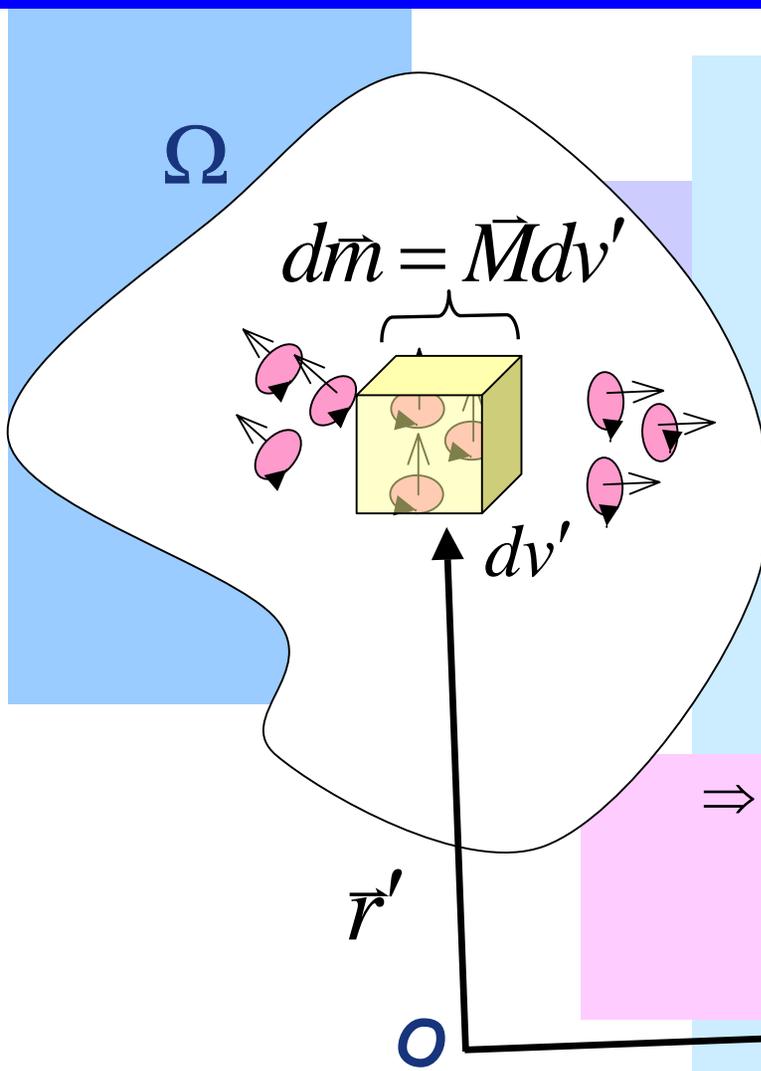
$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} dv' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Se cumple $\nabla_{\vec{r}'} \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dv'$$



Corrientes de Magnetización



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dv'$$

Usando la propiedad

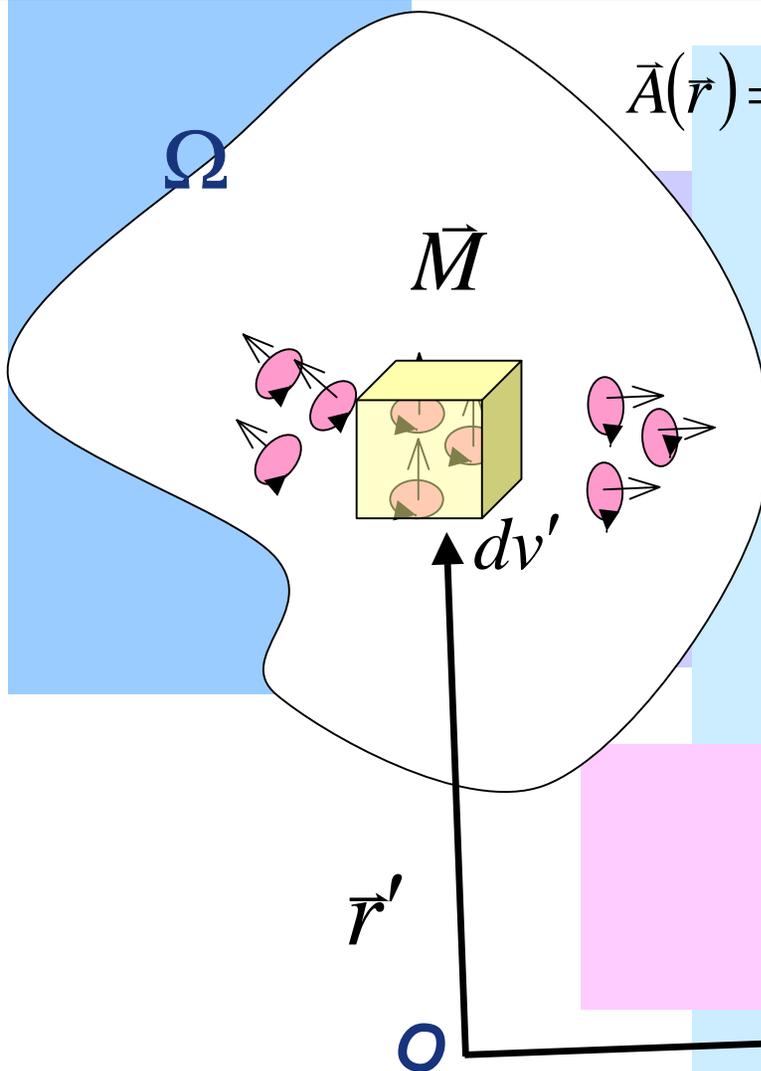
$$\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + (\nabla f) \times \vec{F}$$

$$\nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') + \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times \vec{M}(\vec{r}')$$

$$\Rightarrow \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = -\nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) + \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')$$



Corrientes de Magnetización



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dv'$$

Aplicando el teorema

$$\iiint_V \nabla \times \vec{F} dV = - \oiint_{S(V)} \vec{F} \times d\vec{S}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{S(\Omega')} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$



Corrientes de Magnetización

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S(\Omega)} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{s}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

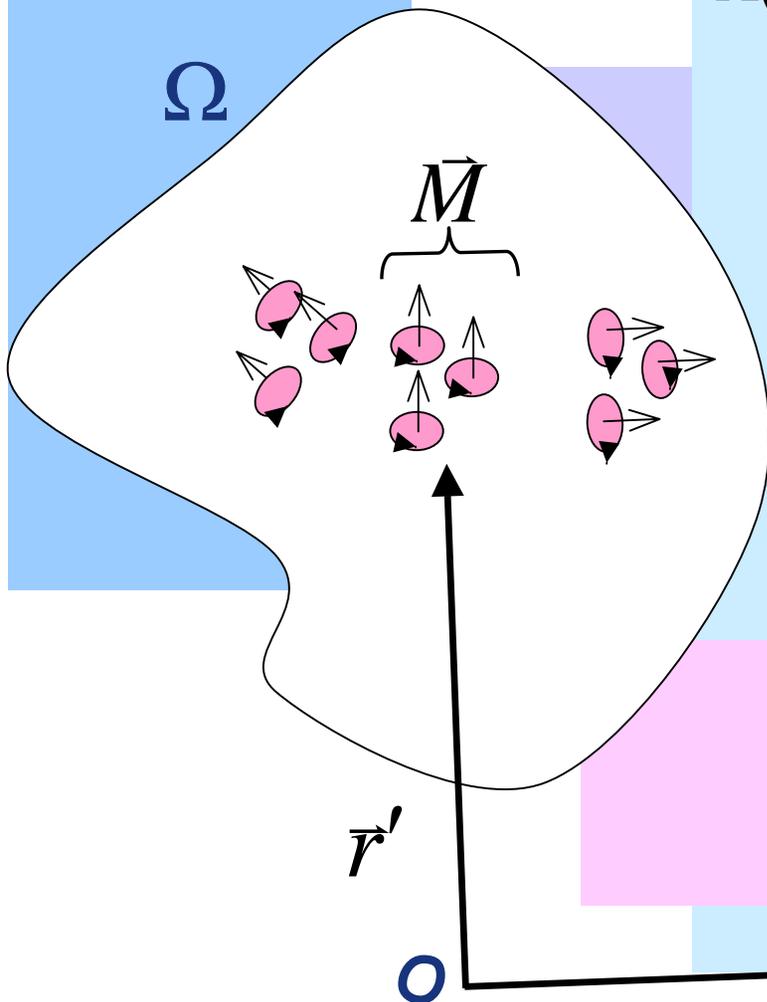
Esta expresión tiene la forma

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}_M dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S(\Omega)} \frac{\vec{K}_M ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Con densidades de corriente

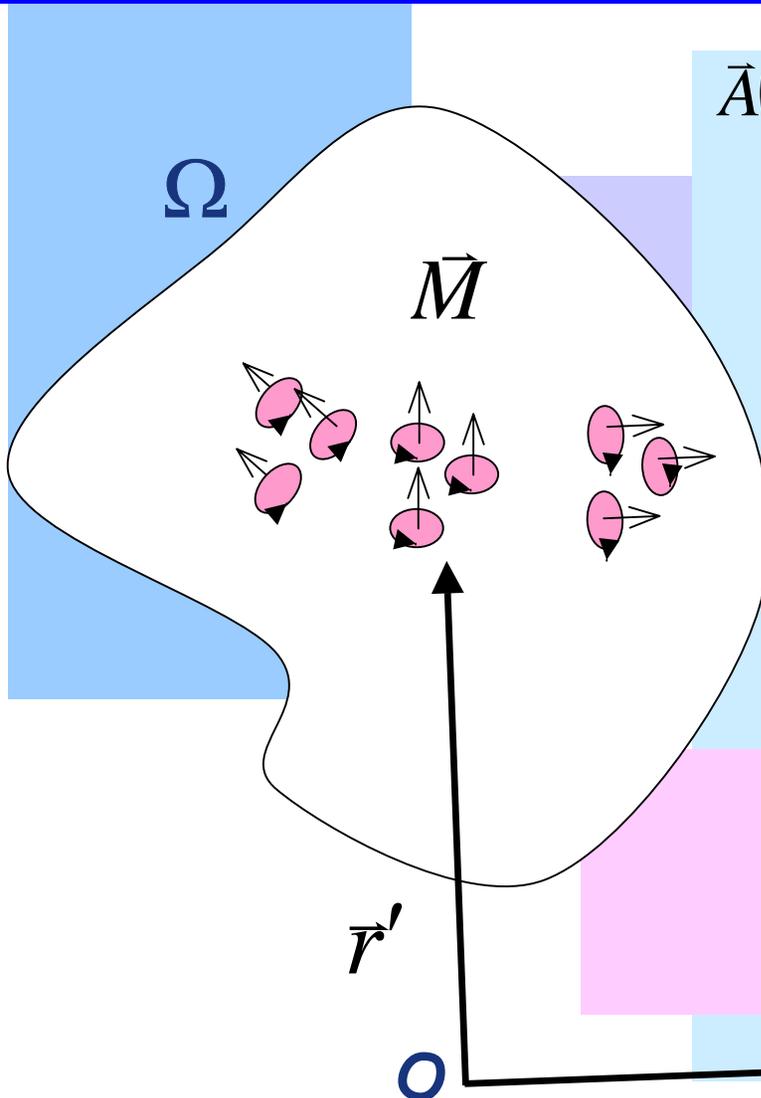
$$\vec{J}_M = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \quad \text{en volumen}$$

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n} \quad \text{de superficie}$$





Corrientes de Magnetización



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S(\Omega)} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{s}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

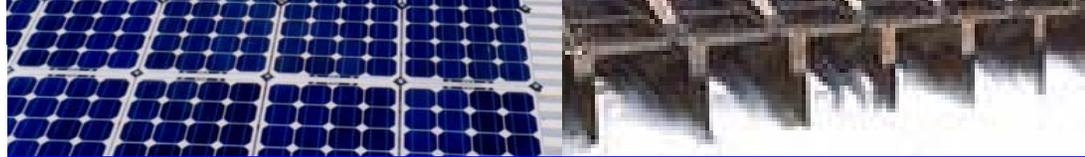
Esta expresión tiene la forma

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}_M dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S(\Omega)} \frac{\vec{K}_M ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Con densidades de corriente

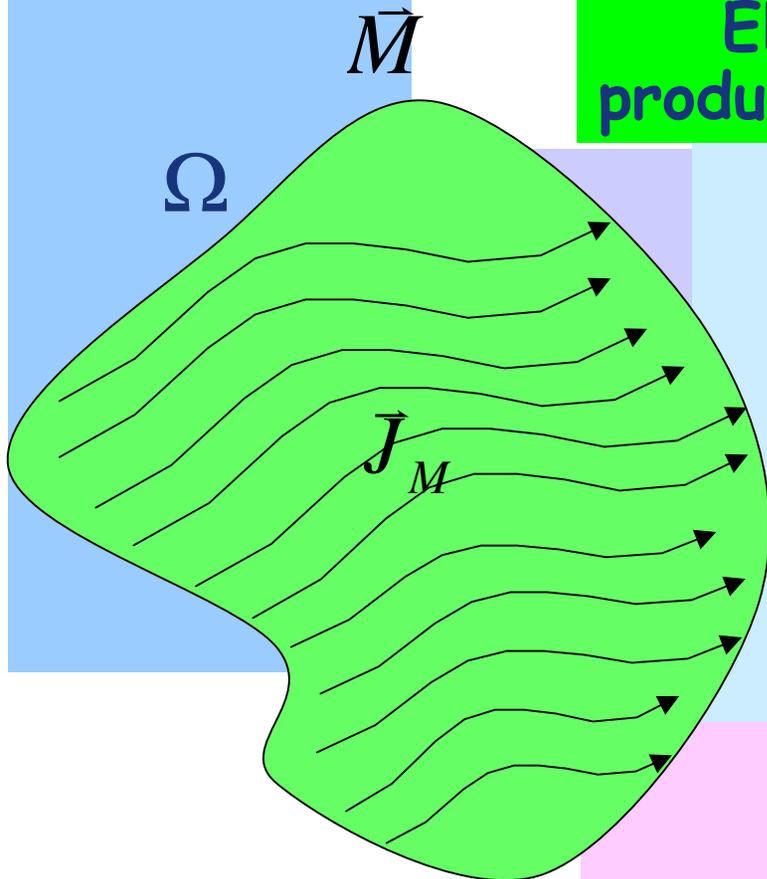
$$\vec{J}_M = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \quad \text{en volumen}$$

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{n} \quad \text{de superficie}$$



Corrientes de Magnetización

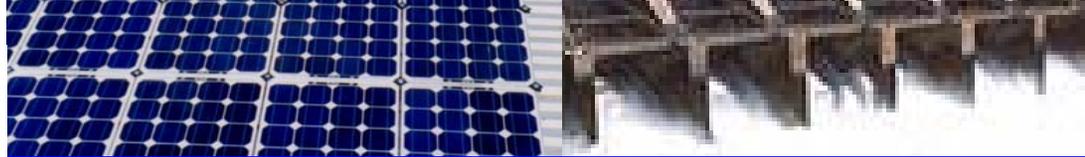
El vector potencial magnético que produce un material con magnetización es



$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}_M dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}}_{\text{Potencial producido por una densidad de corriente en volumen}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S(\Omega)} \frac{\vec{K}_M ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Potencial
producido
por una
densidad de
corriente
en volumen

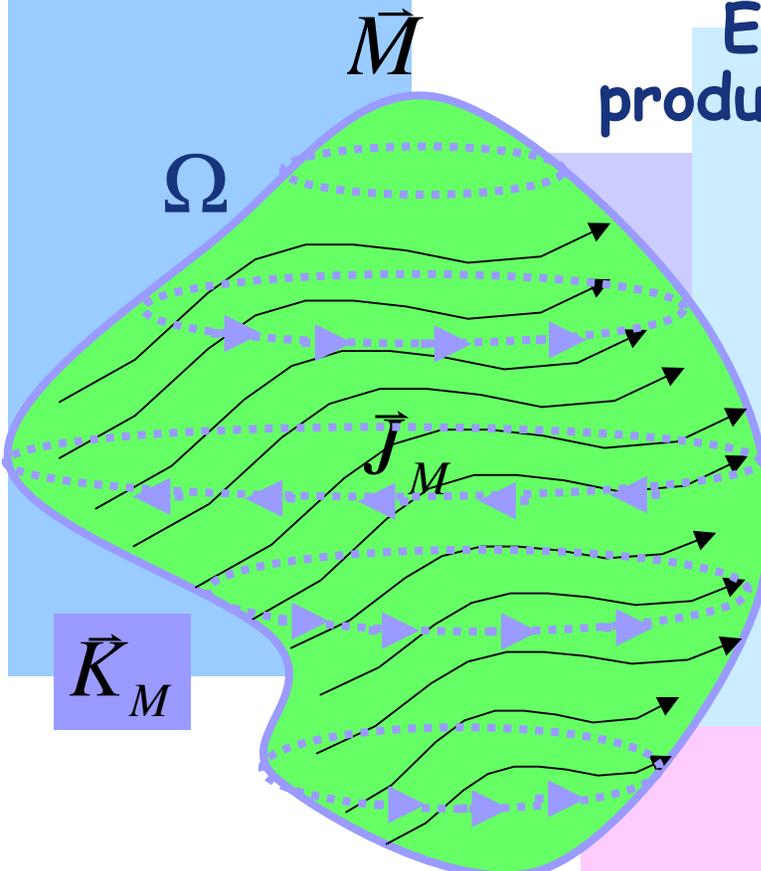
$$\vec{J}_M = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')$$



Corrientes de Magnetización

El vector potencial magnético que produce un material con magnetización es

$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}_M dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}}_{\text{Potencial producido por una densidad de corriente en volumen}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S(\Omega)} \frac{\vec{K}_M ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}}_{\text{Potencial producido por una densidad de corriente de superficie}}$$

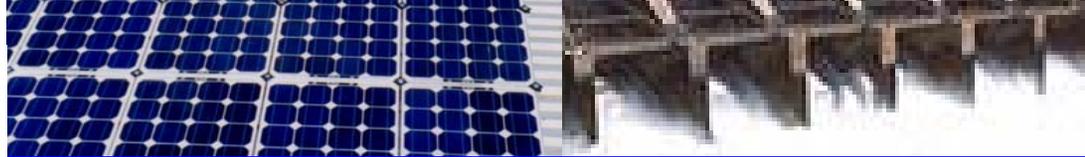


Potencial
producido
por una
densidad de
corriente
en volumen

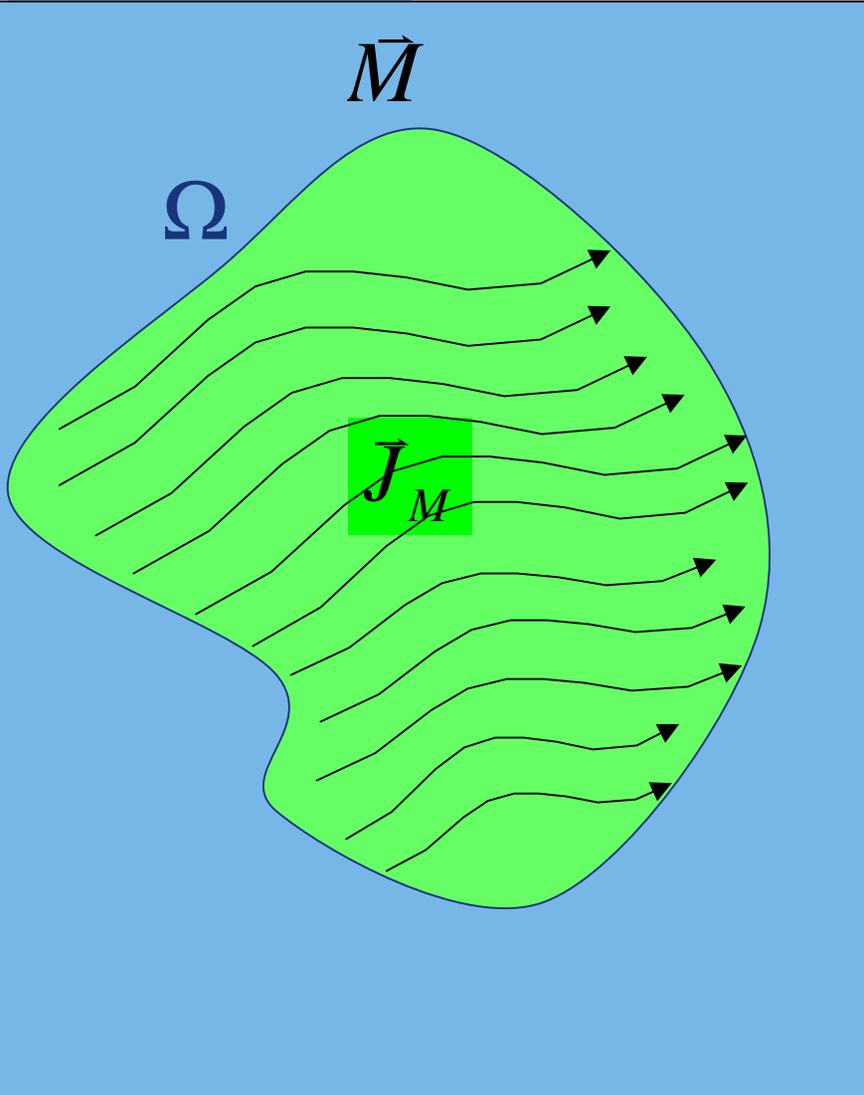
Potencial
producido
por una
densidad de
corriente de
superficie

$$\vec{J}_M = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')$$

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{n}$$



Permeabilidad magnética



La 4ta ecuación de maxwell es

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

En general pueden haber dos tipos de corrientes en volumen

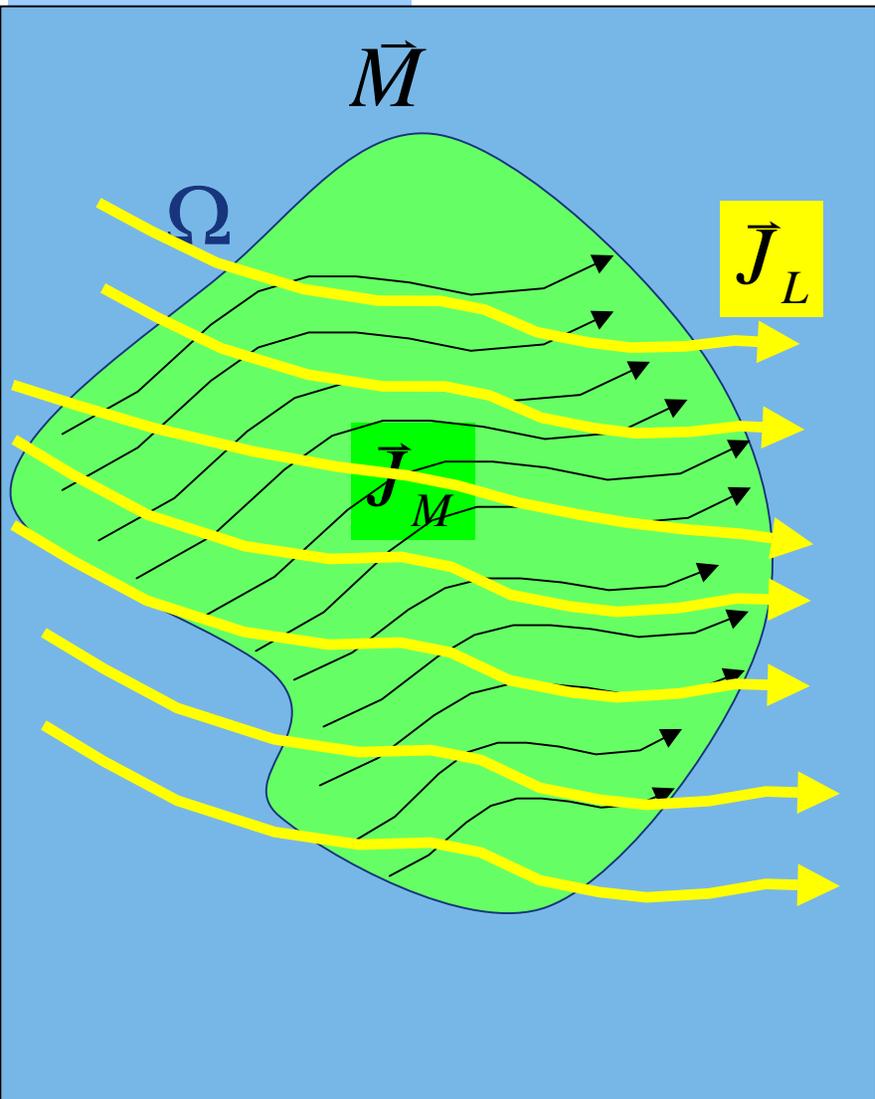
$$\vec{J}_M$$

Corriente de magnetización

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_M$$



Permeabilidad magnética



La 4ta ecuación de maxwell es

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

En general pueden haber dos tipos de corrientes en volumen

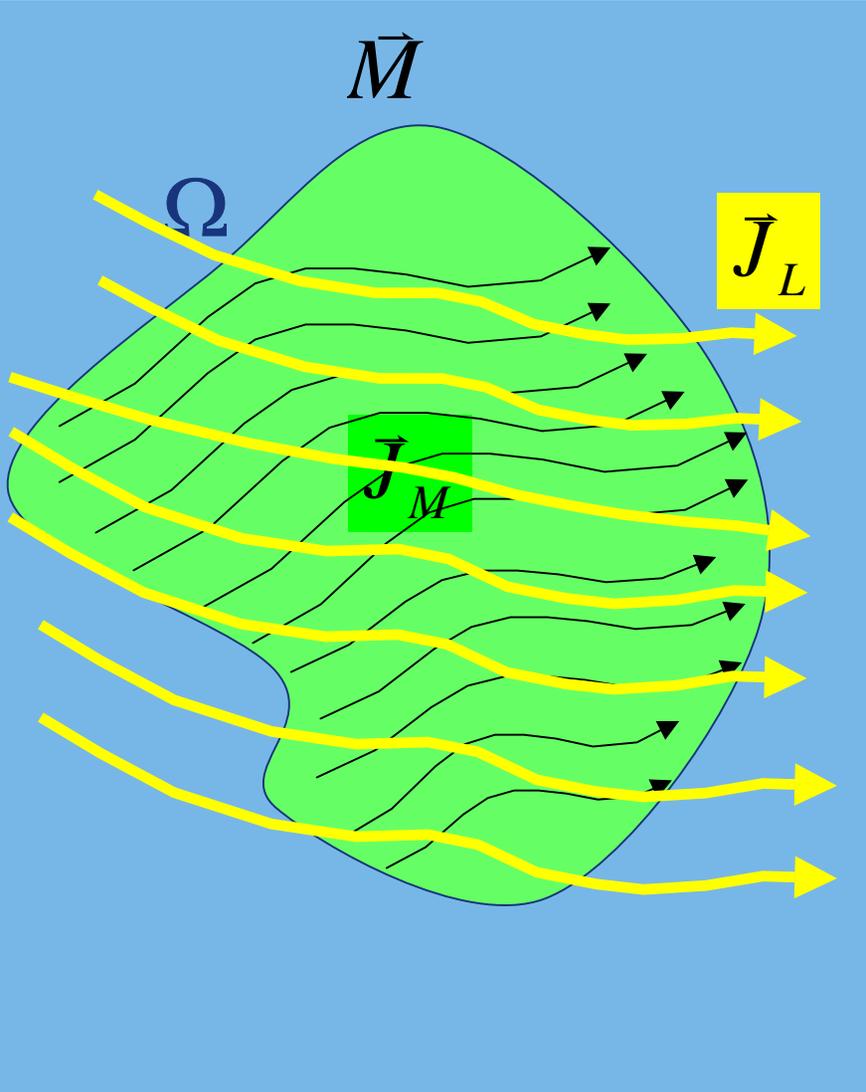
$$\underbrace{\vec{J}}_L$$

Corriente libre

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L$$



Permeabilidad magnética



La 4ta ecuación de maxwell es

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

En general pueden haber dos tipos de corrientes en volumen

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_M$$

Corriente libre

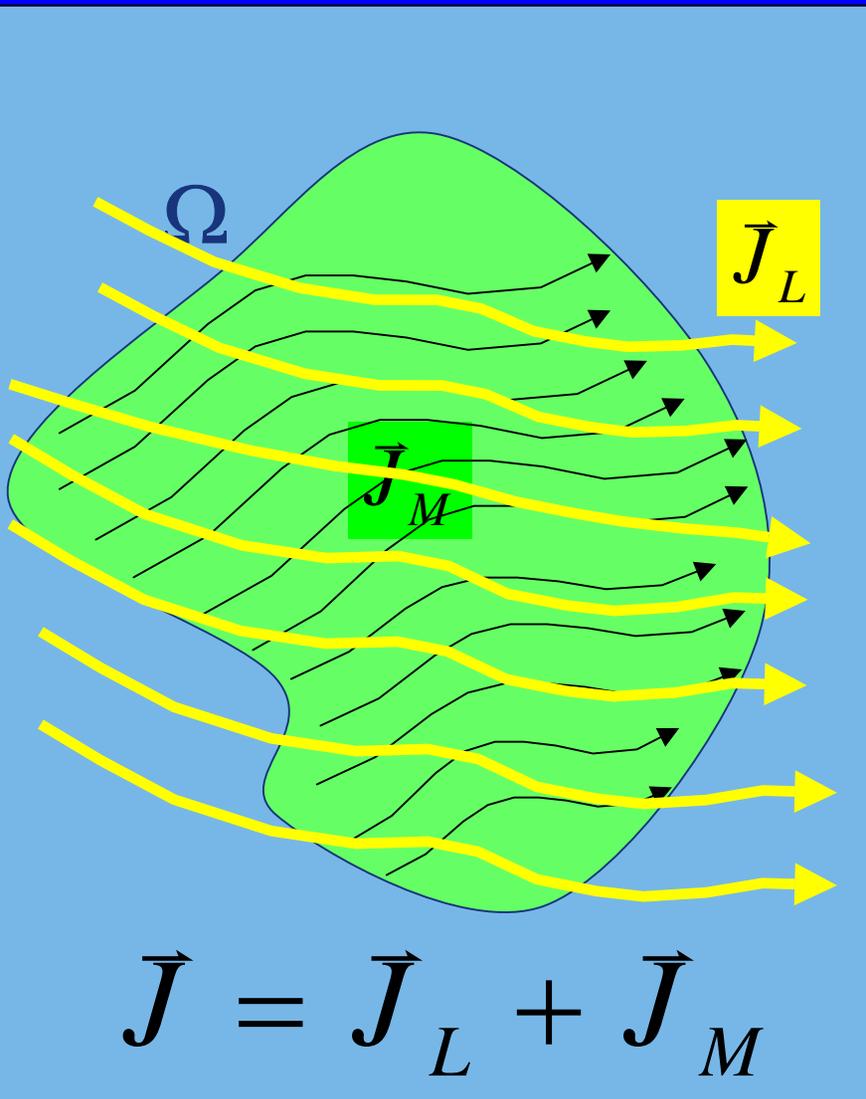
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L$$

Corriente de magnetización

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_M$$



Permeabilidad magnética



$$\Rightarrow \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \nabla \times \vec{H} + \nabla \times \vec{M}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Experimentalmente se encuentra que $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\mu_R} \vec{H}$$

permeabilidad relativa del material μ_R

$$\therefore \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Permeabilidad magnética del material $\mu = \mu_R \mu_0$



Clasificación de los Materiales Magnéticos

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

$$\mu = \mu_R\mu_0$$

Materiales magnéticos

**Materiales
diamagnéticos**

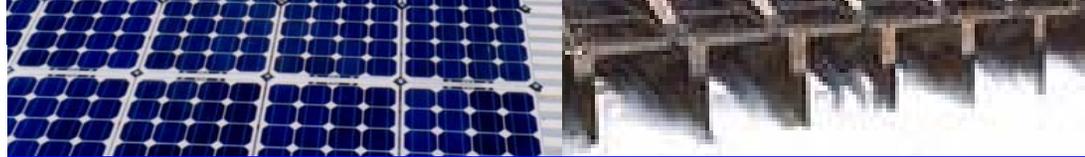
$$\chi_m < 0, \mu_r \leq 1$$

**Materiales
paramagnéticos**

$$\chi_m > 0, \mu_r \geq 1$$

**Materiales
Ferromagnéticos**

$$\chi_m \gg 0, \mu_r \gg 1$$



Clasificación de los Materiales Magnéticos

Material

Diamagnéticos

Bismuto

0.999833

Mercurio

0.999968

Plata

0.9999736

Plomo

0.9999831

Cobre

0.9999906

Agua

0.9999912

Hidrógeno (s.t.p.)

≈1.0

Paramagnéticos

Oxígeno (s.t.p.)

0.999998

Aire

1.00000037

Aluminio

1.000021

Tungsteno

1.00008

Platino

1.0003

Manganeso

1.001

Ferromagnéticos

Cobalto

250

Níquel

600

Hierro Suave

5000

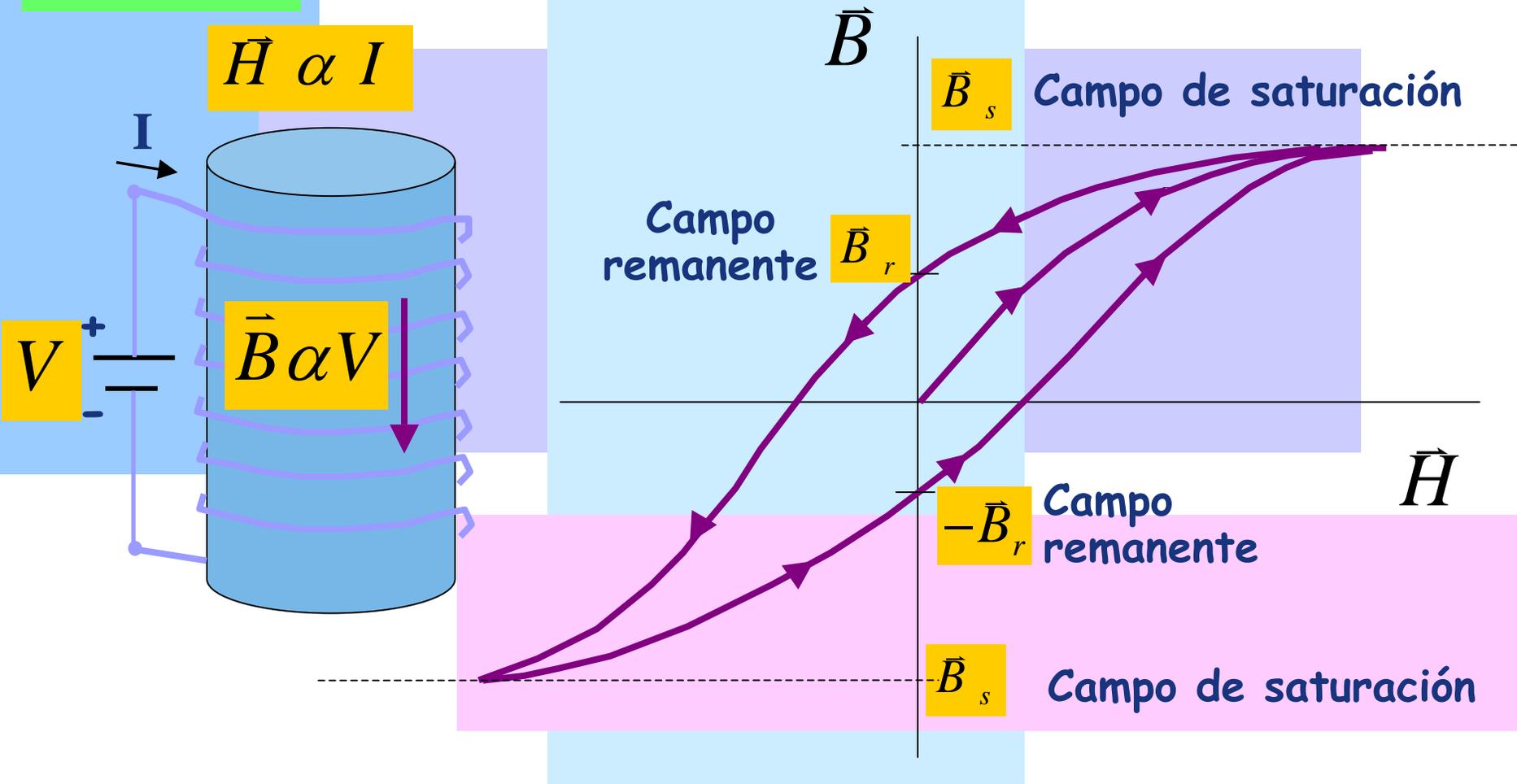
Hierro-Silicio

7000



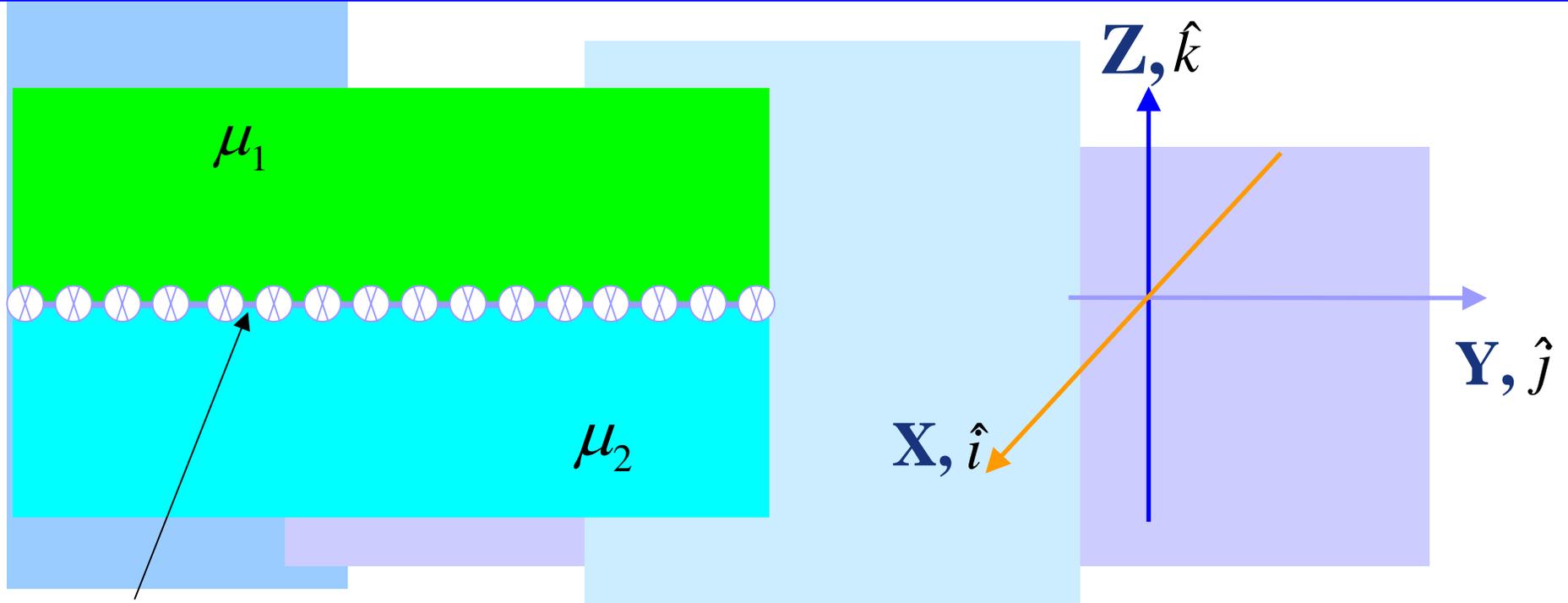
Ciclo de histéresis

$\mu = \mu_R \mu_0$ se puede determinar experimentalmente

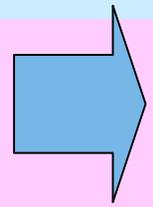




Condiciones de borde entre dos medios



Plano de corriente entrando en la interfaz de dos medios

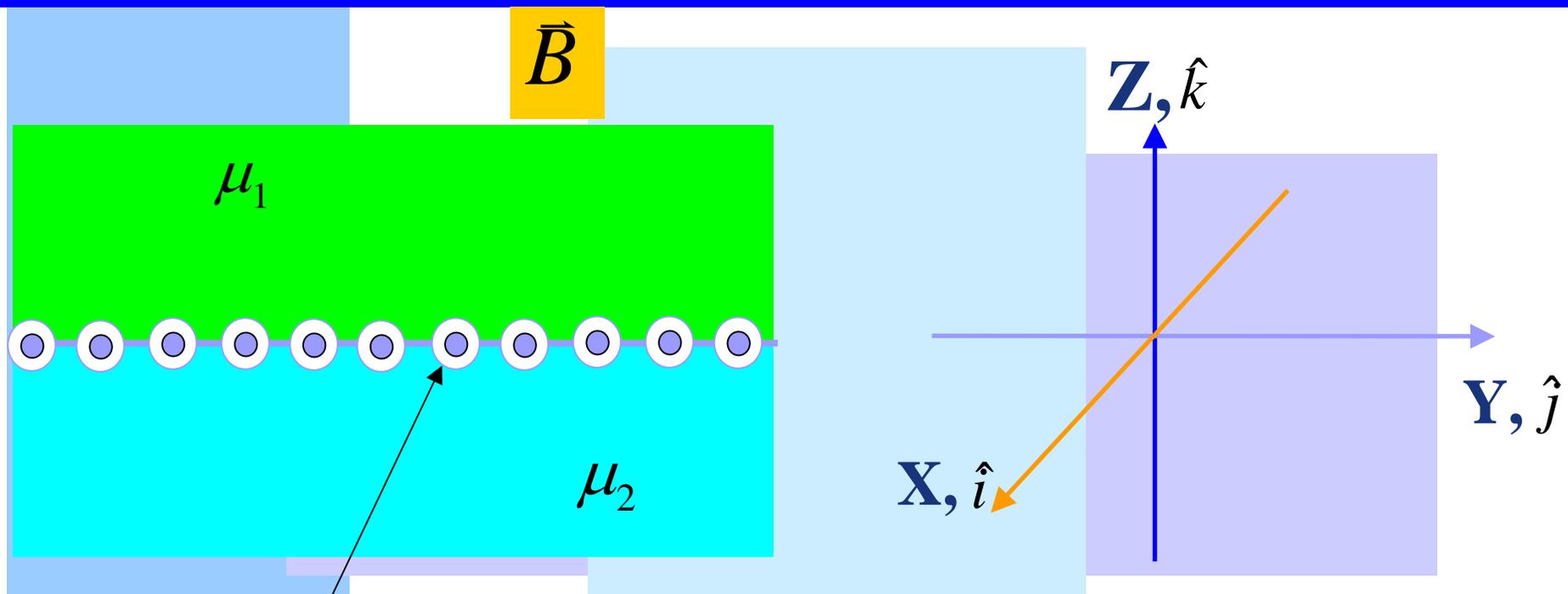


Densidad de corriente lineal

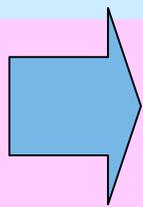
$$\vec{K} = K(-\hat{i})$$



Condiciones de borde entre dos medios



Plano de corriente saliendo
en la interfaz de
medios

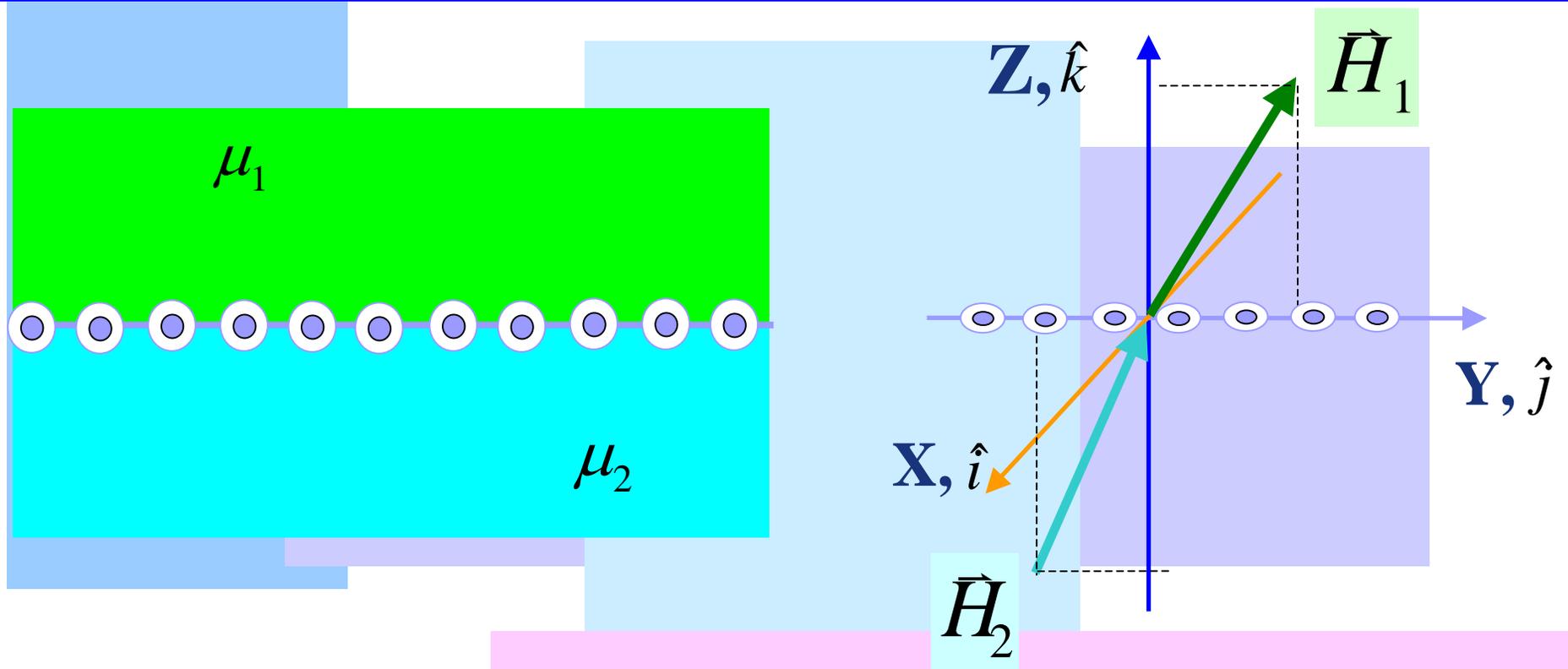


Densidad de corriente
lineal

$$\vec{K} = K \hat{i}$$



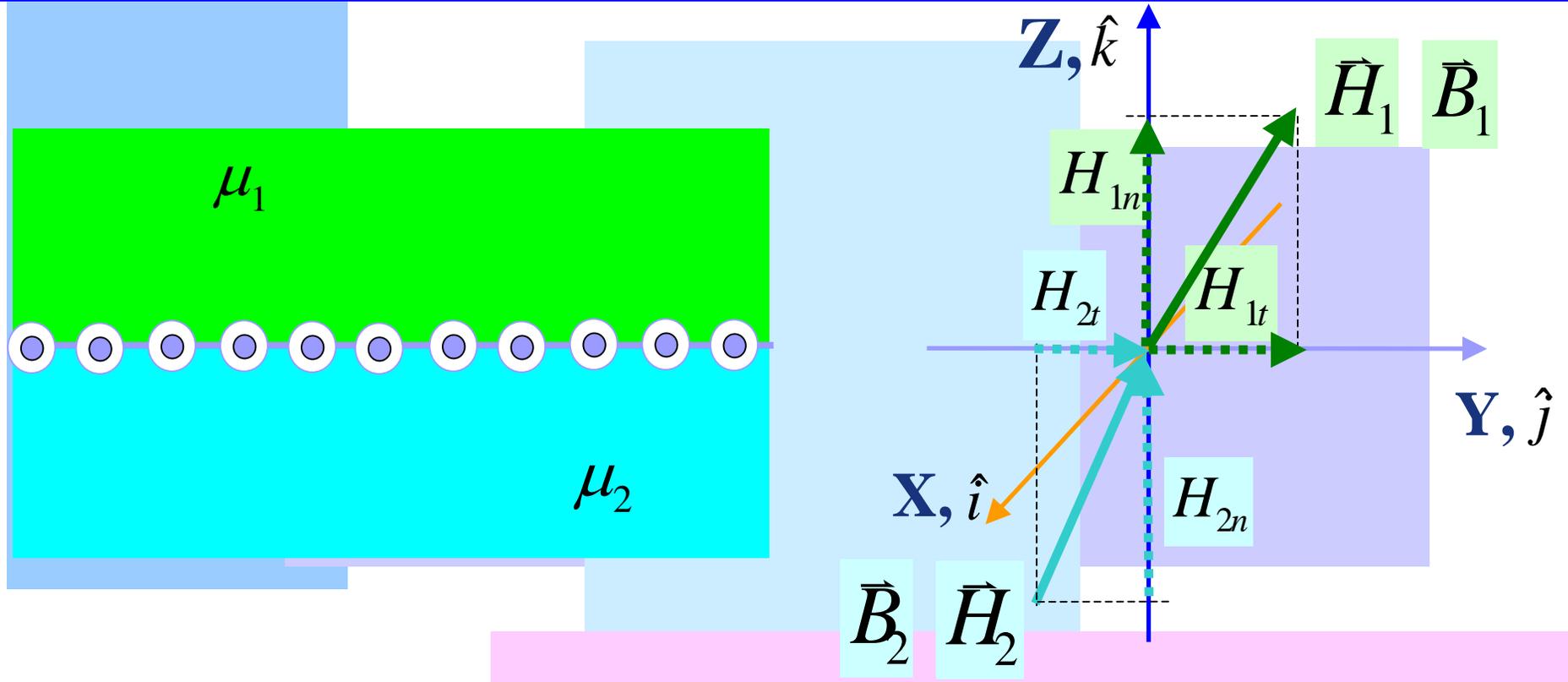
Condiciones de borde entre dos medios



¿qué condiciones cumplen los campos magnéticos en la interfaz?



Condiciones de borde entre dos medios

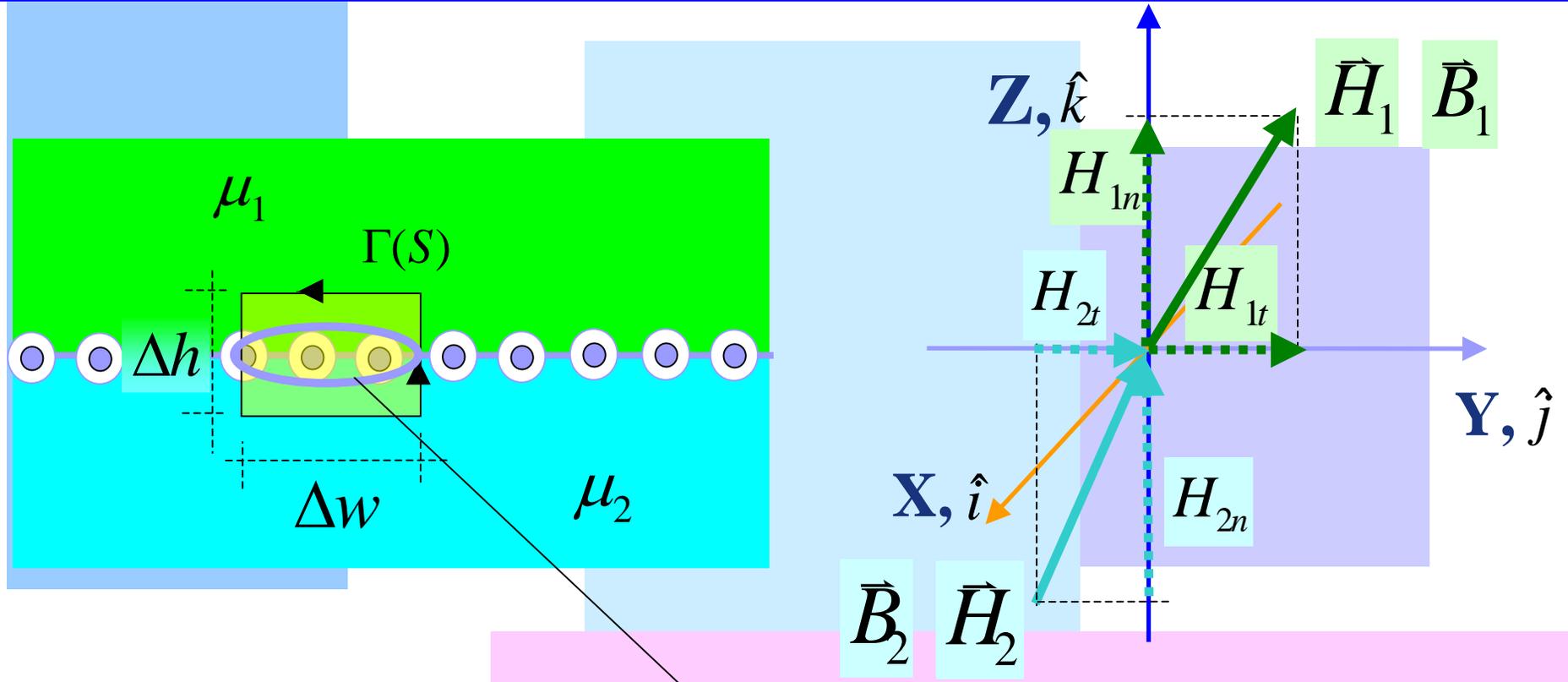


$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow$$

$$B_{1n} = B_{2n} \Leftrightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$



Condiciones de borde entre dos medios

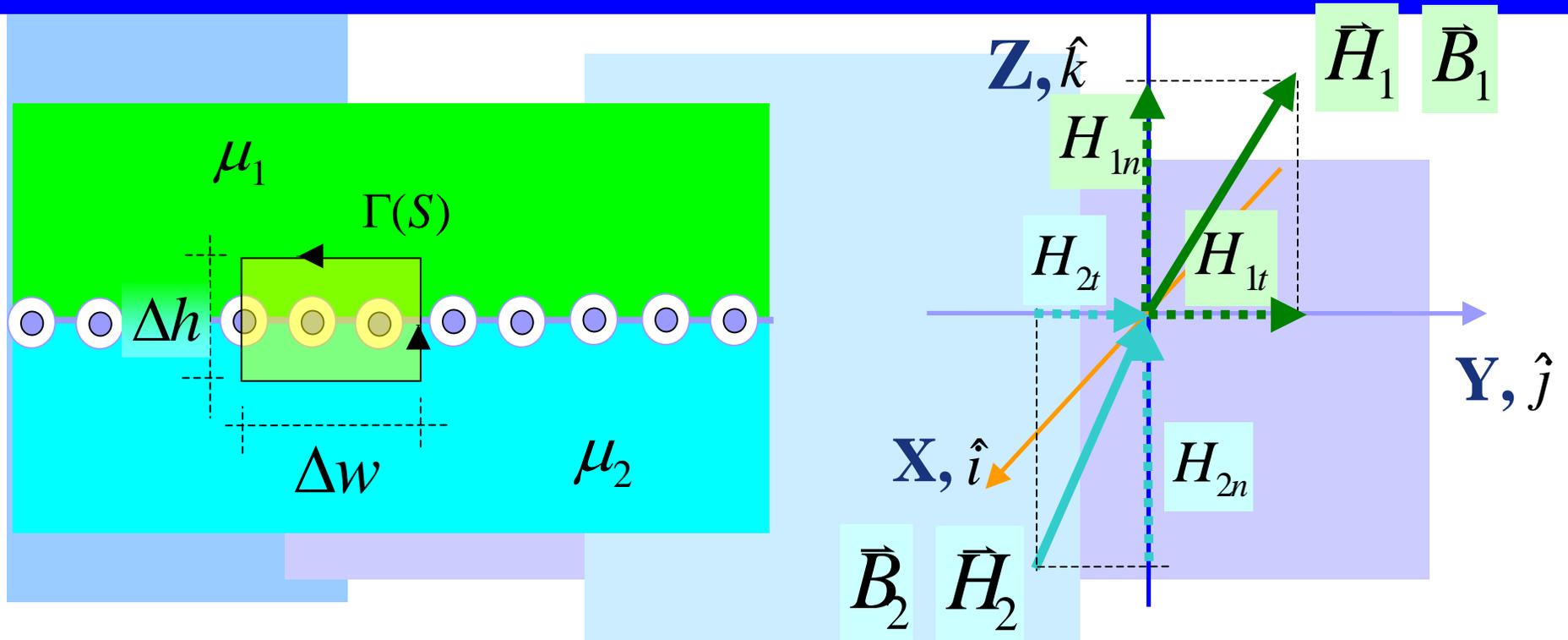


$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlazada}}$$

$$I_{\text{enlazada}} = I_E = K\Delta w$$

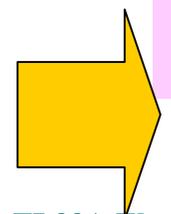


Condiciones de borde entre dos medios



$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{2T} \Delta w + H_{2N} \frac{\Delta h}{2} + H_{1N} \frac{\Delta h}{2} - H_{1T} \Delta w - H_{1N} \frac{\Delta h}{2} - H_{2N} \frac{\Delta h}{2}$$

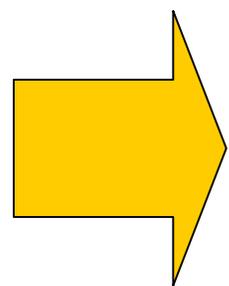
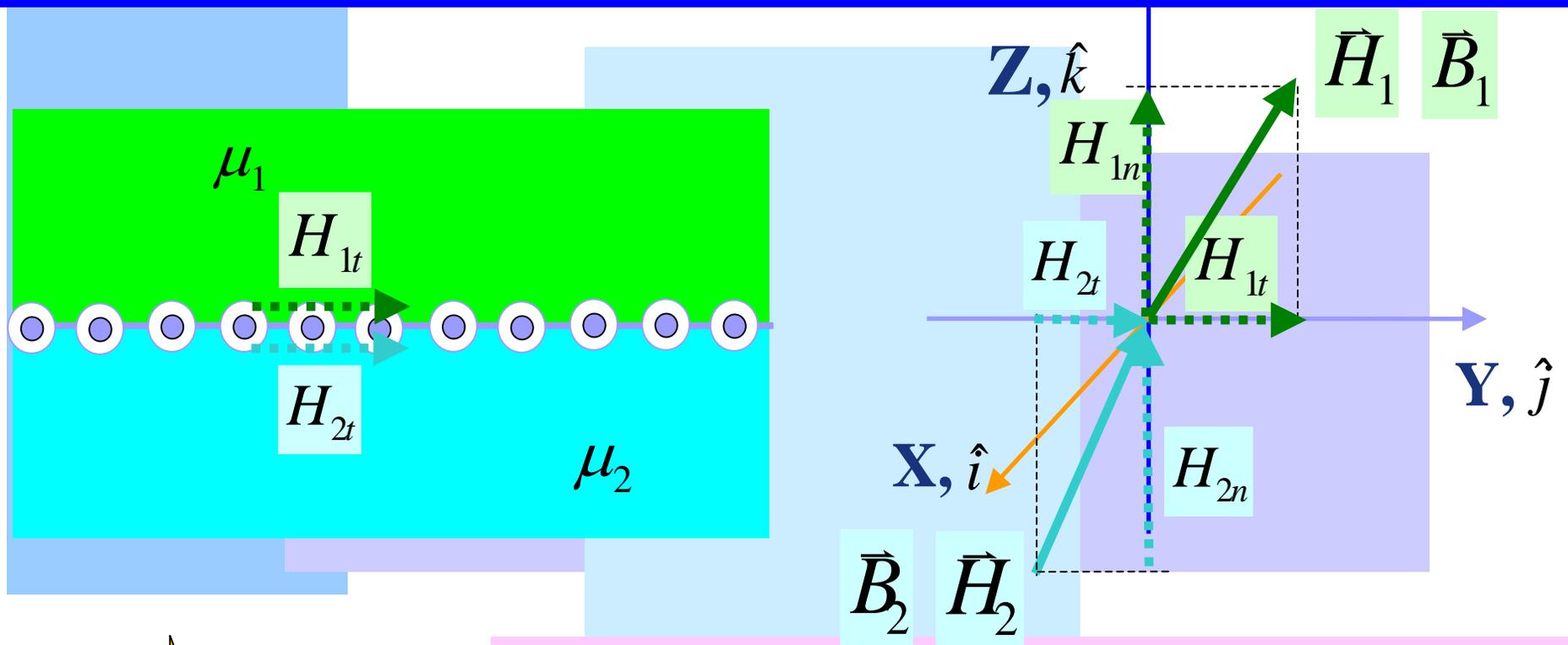
para $\Delta h \rightarrow 0$



$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{2T} \Delta w - H_{1T} \Delta w$$



Condiciones de borde entre dos medios



$$H_{2T}\Delta w - H_{1T}\Delta w = K\Delta w$$

$$\therefore H_{2T} - H_{1T} = K$$