Escuela de
Ingeniería
Universidad
de Chile

FI33A ELECTROMAGNETISMO
Clase 15
Magnetostática-III

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

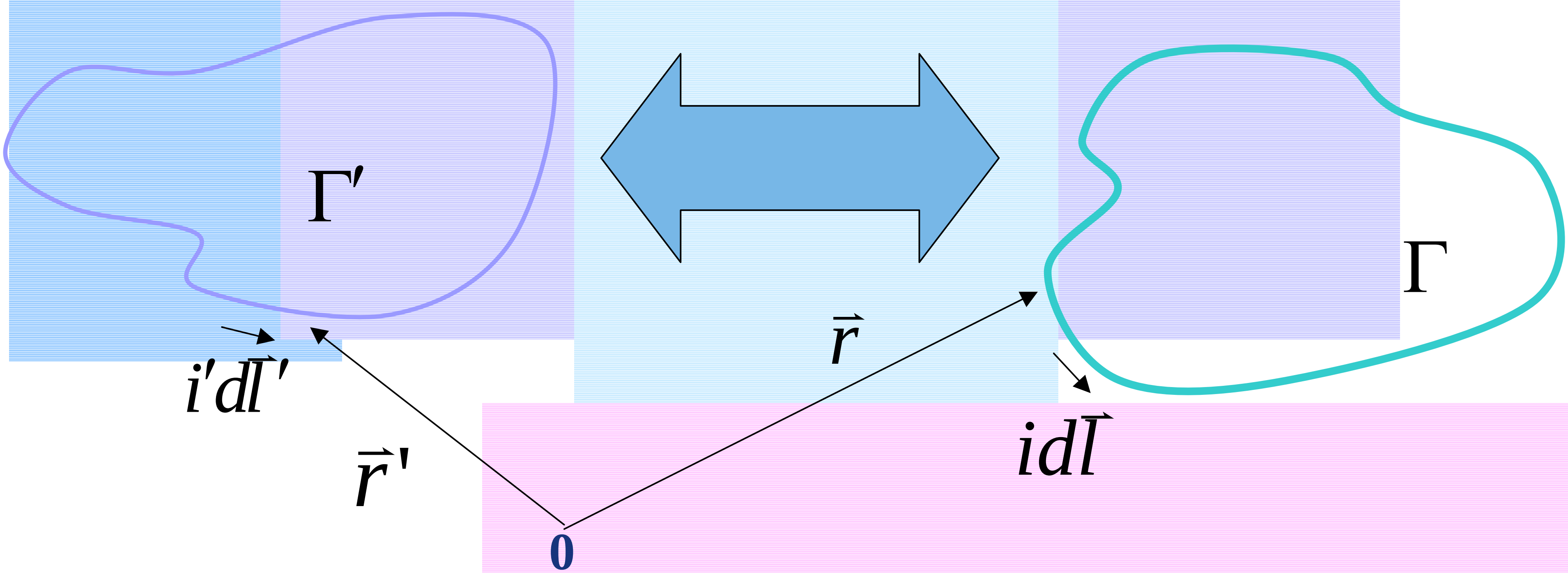
INDICE

- Ley de Biot y Savarat
- Ley circuital de Ampere

Ley de Biot y Savarat

$$d\vec{F} = \frac{Id\vec{l} \times \mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I' d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|^3}$$

$$\therefore \quad d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$



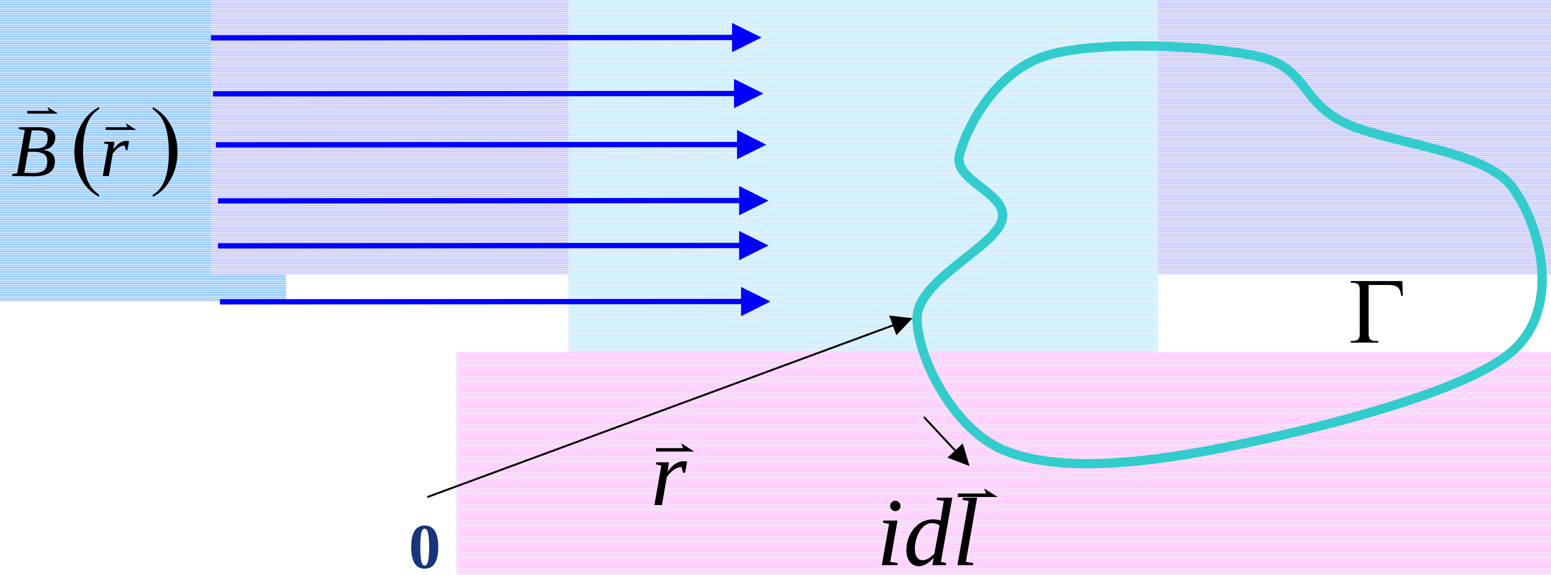
Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

Ley de Biot y Savarat

Así, un circuito en presencia de un campo magnético experimenta una fuerza dada por la ecuación

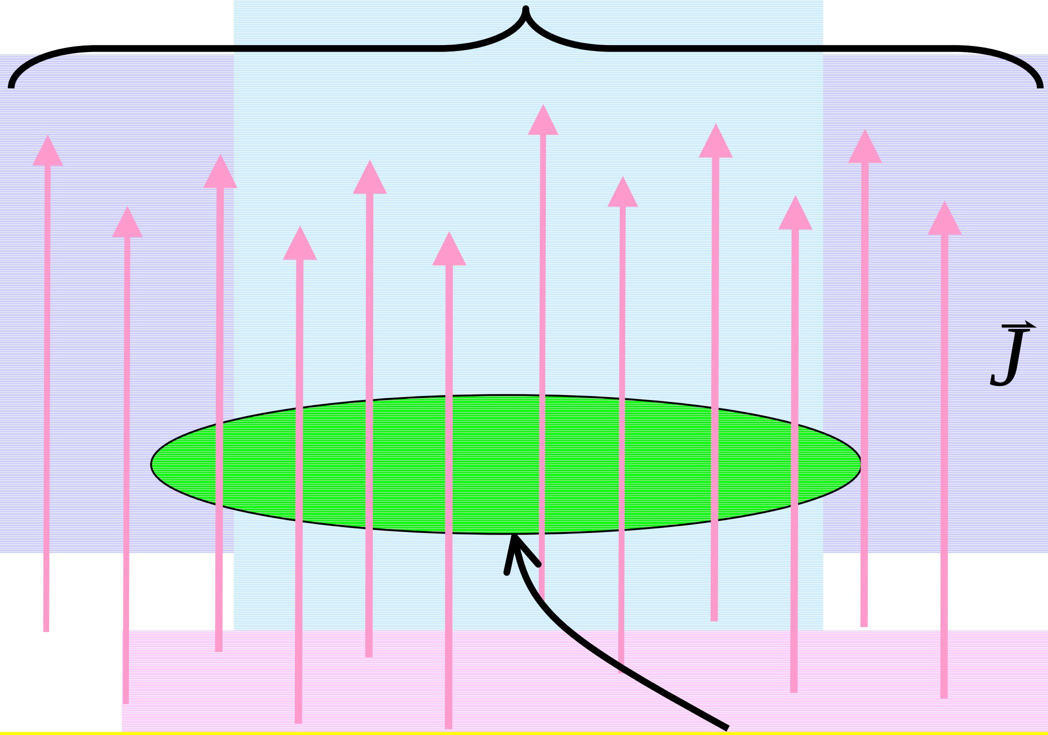
$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\therefore \quad \vec{F} = \oint_{\Gamma} d\vec{F} = \oint_{\Gamma} I d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$



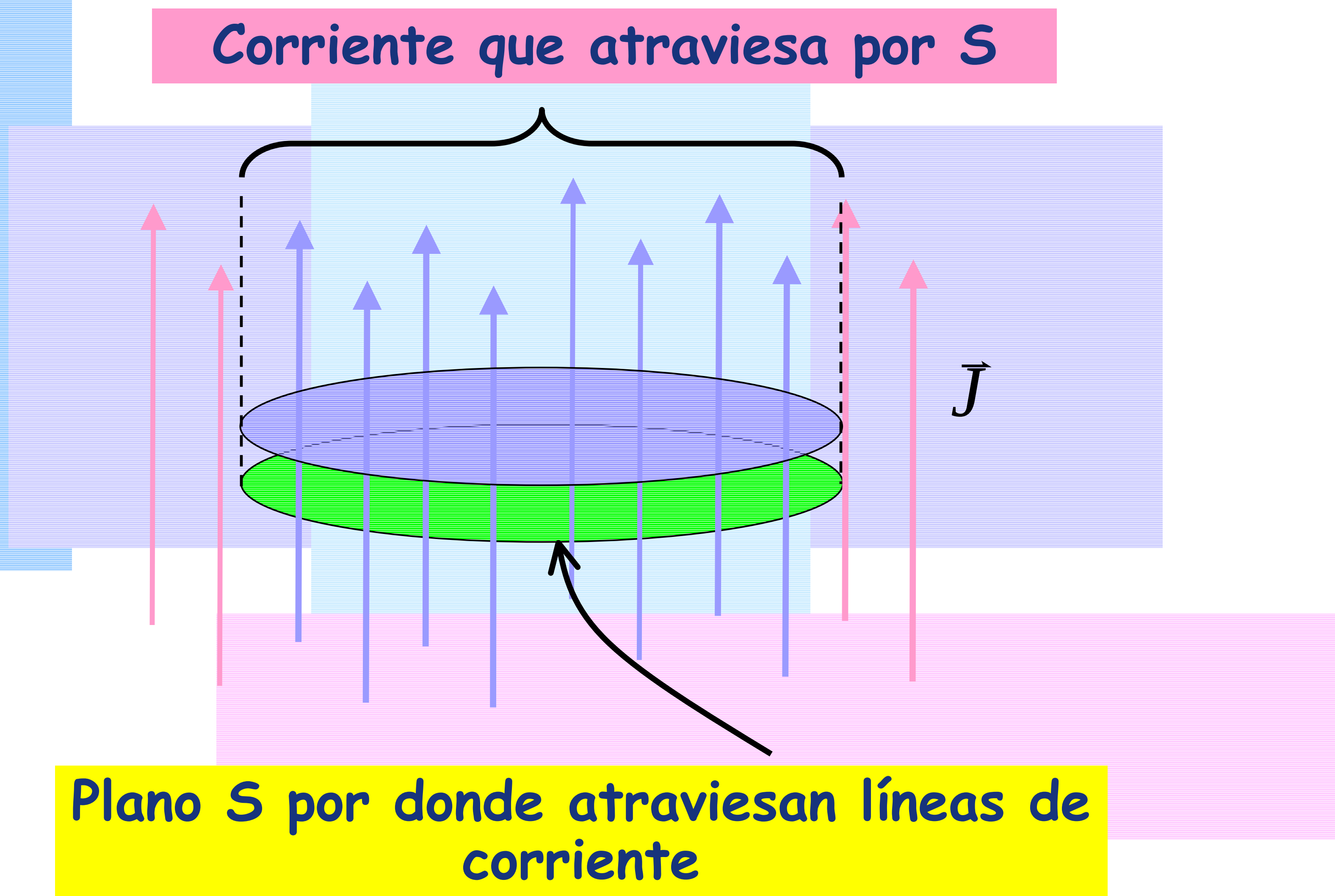
Ley Circuital de Ampere

Líneas de corriente



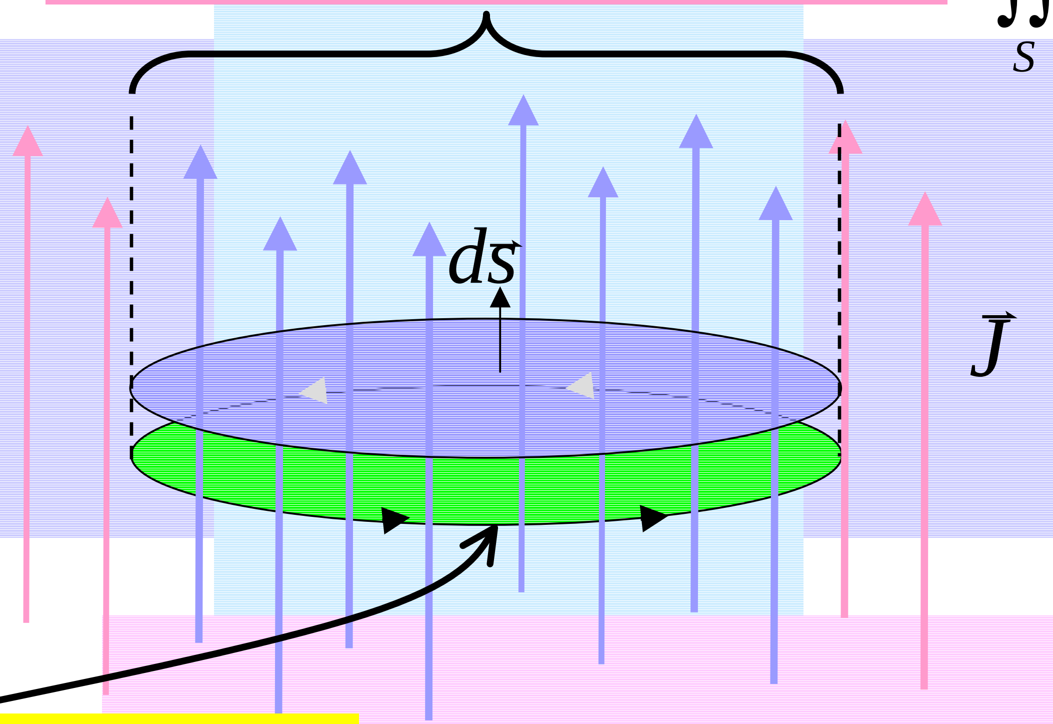
Plano S por donde atraviesan líneas de corriente

Ley Circuital de Ampere



Ley Circuital de Ampere

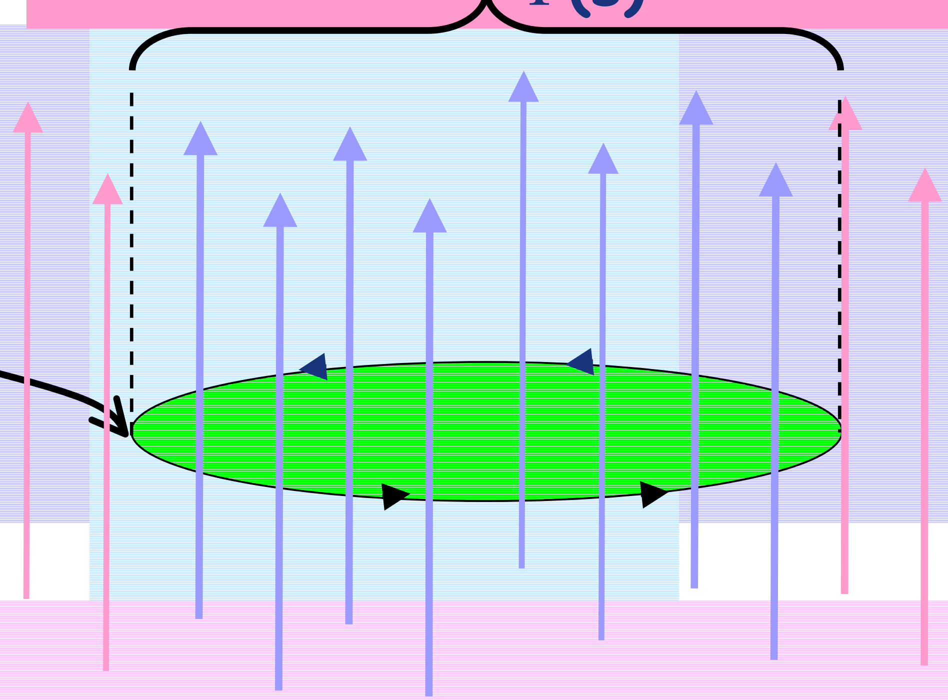
$$\text{Corriente enlazada por } \Gamma(s) = \iint_S \vec{J} \bullet d\vec{s}$$



Trayectoria cerrada $\Gamma(s)$

Ley Circuital de Ampere

$I_{enlazada}$ = Corriente enlazada por $\Gamma(s)$



$\vec{J}$

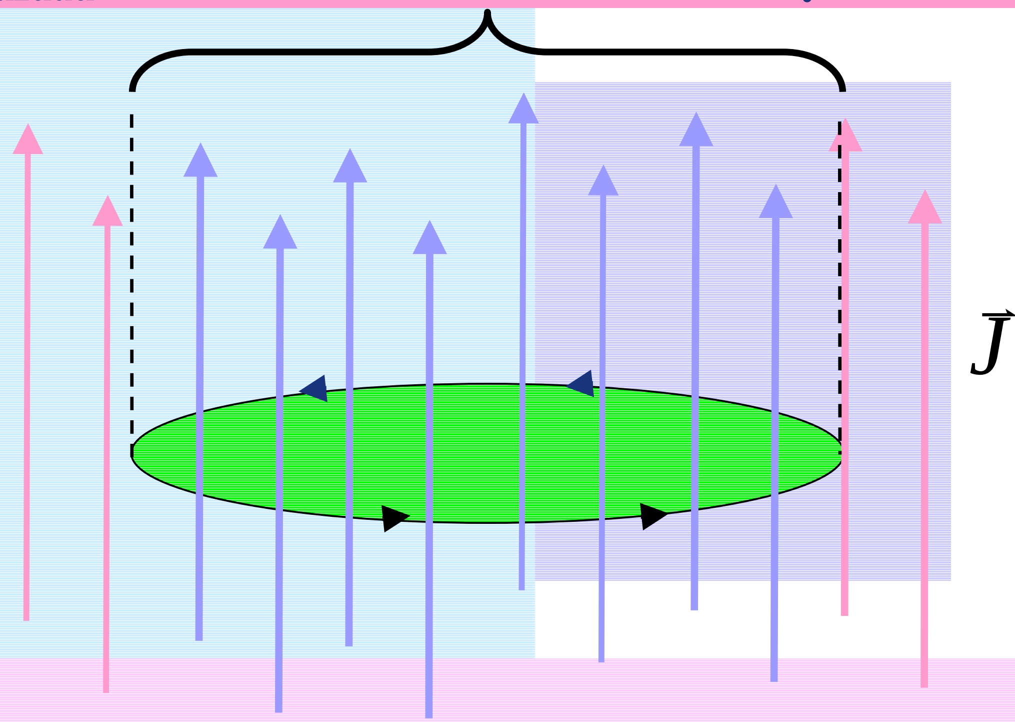
Trayectoria cerrada $\Gamma(s)$

$$\oint_{\Gamma(s)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada}$$

Ley Circuital de Ampere

Ley Circuital de Ampere

$I_{enlazada}$ = Corriente enlazada por $\Gamma(s)$



$\vec{H}$: Vector intensidad de campo magnético

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

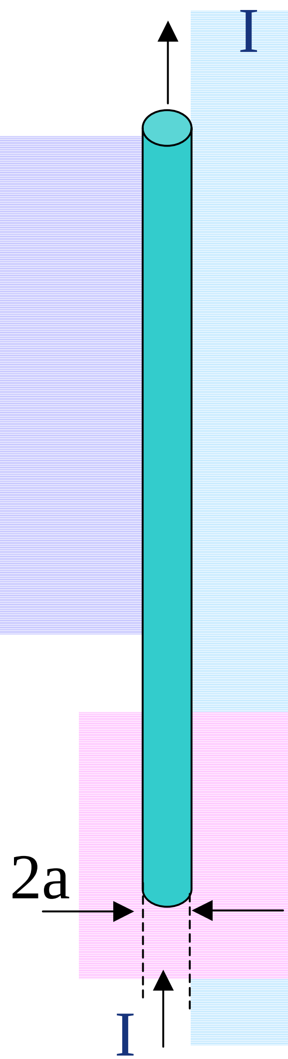
$$\oint_{\Gamma(s)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$$

Ley Circuital de Ampere

Ley Circuital de Ampere

Ejemplo

Cilindro de corriente infinito

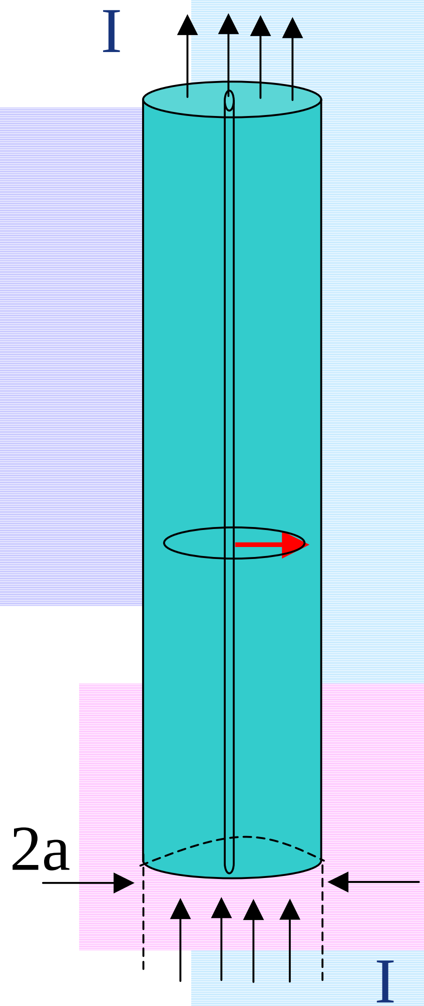


$$\vec{B} = ?$$

Ley Circuital de Ampere

Ejemplo

$r < a$



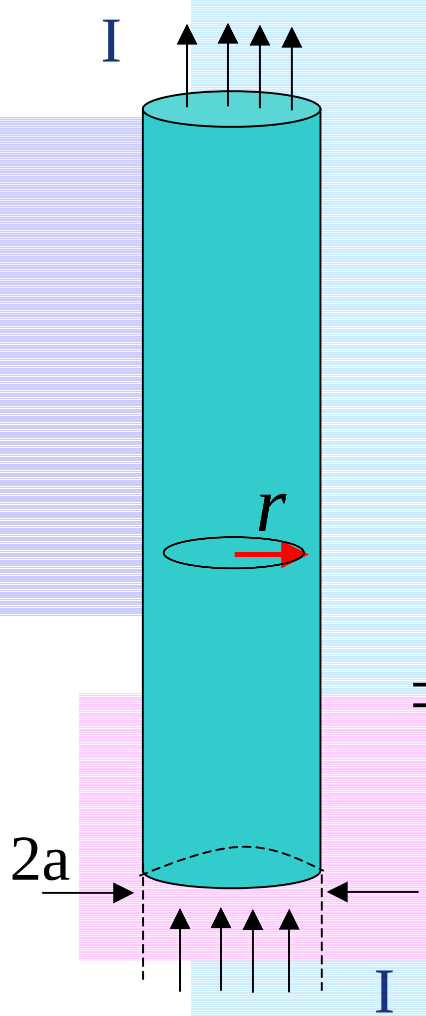
1ª Observación. Al interior se tiene el efecto de muchas líneas de corriente Luego el campo magnético tiene una dirección similar al de un conductor unifilar, es decir,

$$\vec{B} = B\hat{\theta}, \quad \vec{H} = H\hat{\theta}$$

Ley Circuital de Ampere

Ejemplo

$r < a$



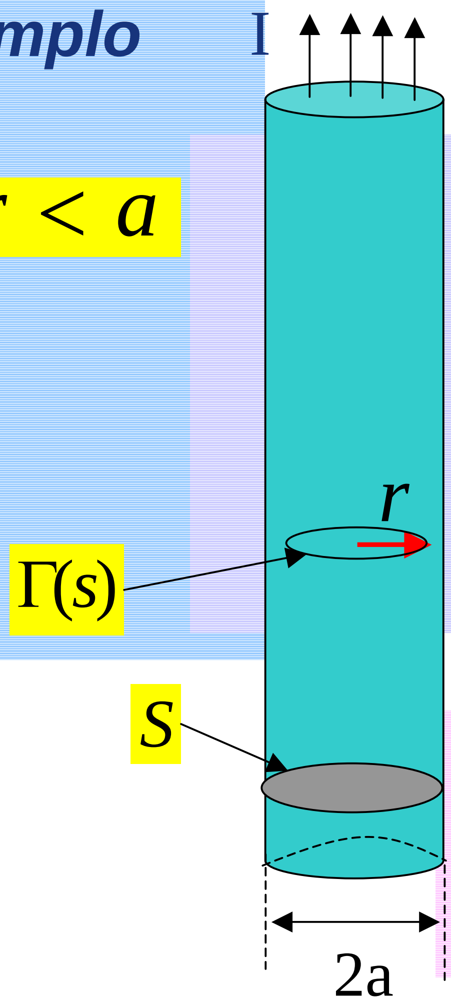
2ª Observación. El sistema tiene simetría azimutal, es decir, el campo magnético no depende de θ. Por lo tanto, el campo sólo puede depender de r

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = B(r)\hat{\theta}, \quad \vec{H} = H(r)\hat{\theta}$$

Ley Circuital de Ampere

Ejemplo

$r < a$



Apliquemos la ley circuital de ampere a la trayectoria circular de radio r

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$$

$$I_{enlazada} = \iint_{S} \vec{J} \bullet d\vec{s}\,, \qquad \vec{J} = \frac{I}{S}\hat{k} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{k}$$

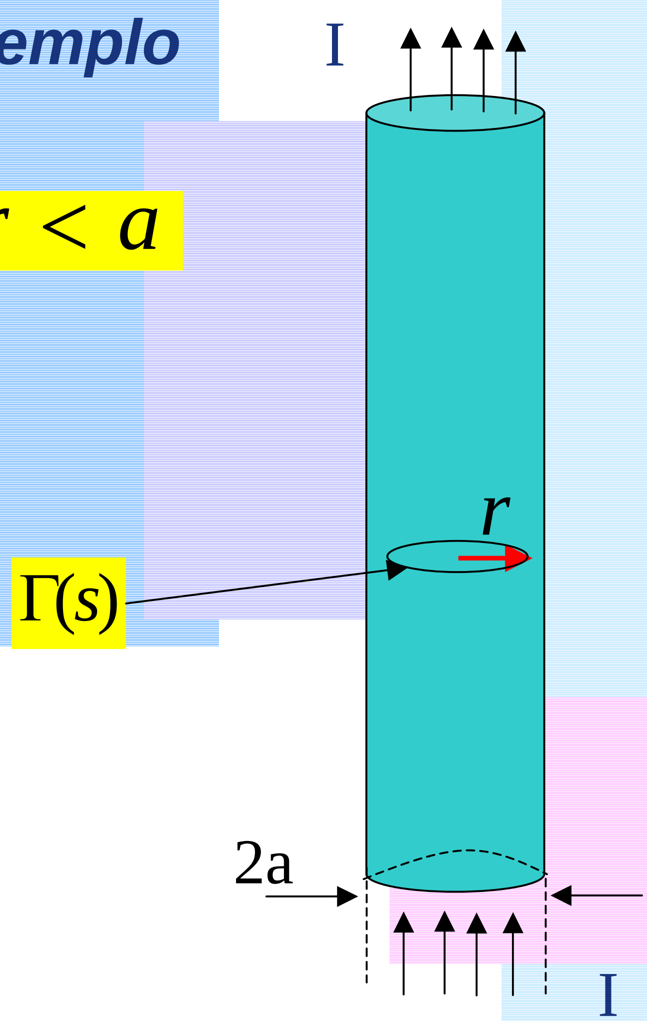
$$\Rightarrow I_{enlazada} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=r} \frac{I}{\pi a^2}\hat{k} \bullet r d\theta dr \hat{k}$$

$$\therefore I_{enlazada} = \frac{I r^2}{a^2}$$

Ley Circuital de Ampere

Ejemplo

$r < a$



$$\oint_{\Gamma(s)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$$

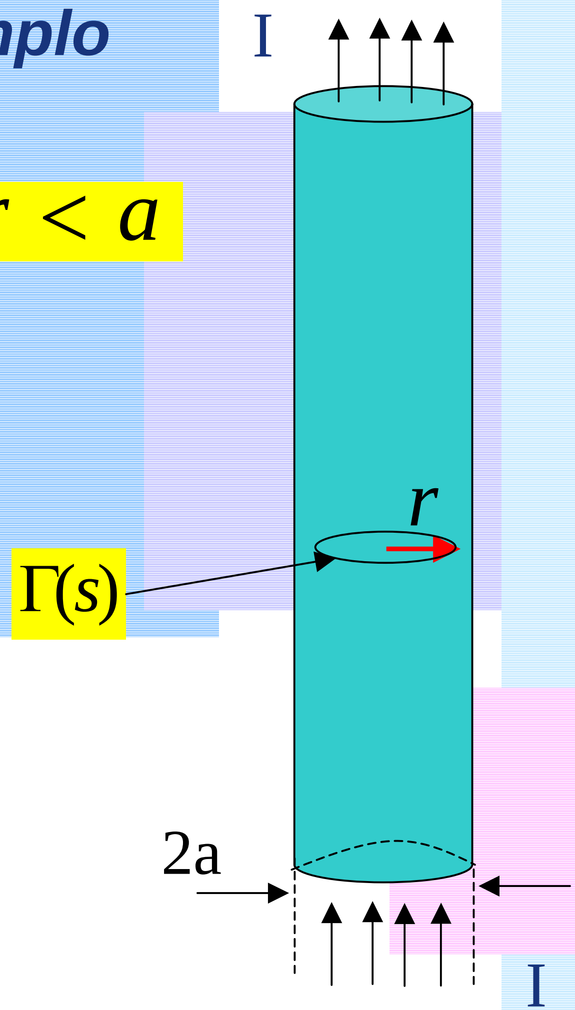
$$\oint_{\Gamma(s)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} H(r)\hat{\theta} \bullet r d\theta\hat{\theta}$$

$$\oint_{\Gamma(s)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H(r)$$

Ley Circuital de Ampere

Ejemplo

$r < a$



$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$$

$$2\pi r H(r) = \frac{Ir^2}{a^2} \Rightarrow H(r) = \frac{Ir}{2\pi a^2}$$

$$\therefore \vec{H}(r) = \frac{Ir}{2\pi a^2}\hat{\theta}, \quad \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\hat{\theta}$$

3ª Ecuación de Maxwell

Podemos escribir $$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\nabla \times \vec{H}\right) \cdot d\vec{S}$$

Además, según vimos $$I_{enlazada} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Reemplazando en la Ley circuital de Ampere

$$\Rightarrow \iint_S \left(\nabla \times \vec{H}\right) d\vec{S} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

3ª Ecuación de Maxwell

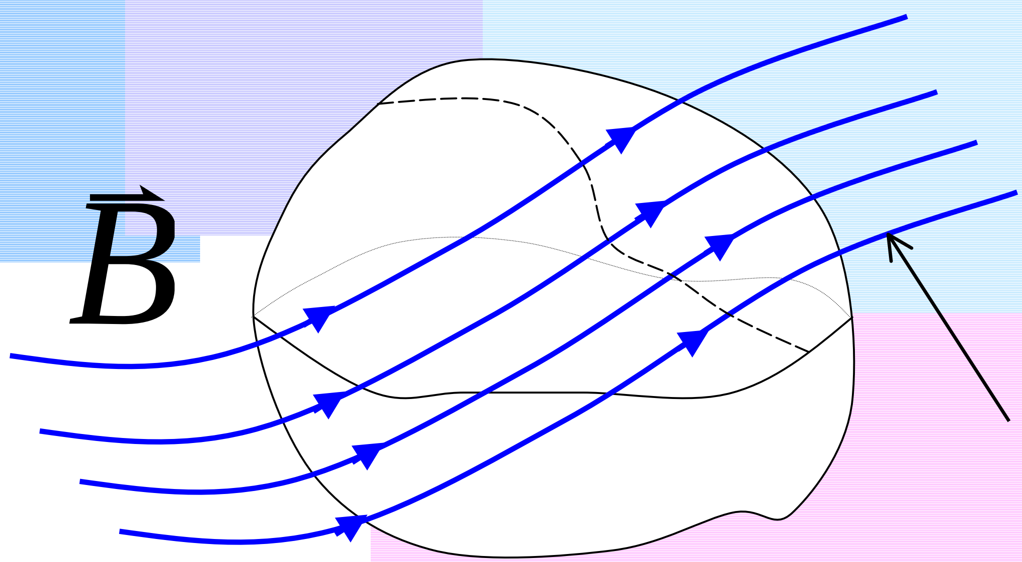
Escuela de
Ingeniería
Universidad
de Chile

4ª Ecuación de Maxwell

Hasta aquí no se han encontrado fuentes de donde nazcan líneas de campo, es decir, no existen cargas magnéticas

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

4ª Ecuación de Maxwell



Las líneas de campo no nacen ni mueren en parte alguna

Campo Magnético

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

4ª Ecuación de Maxwell

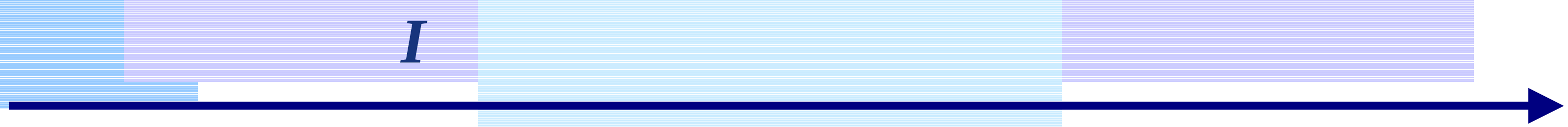
Campo Magnético

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

4ª Ecuación de Maxwell



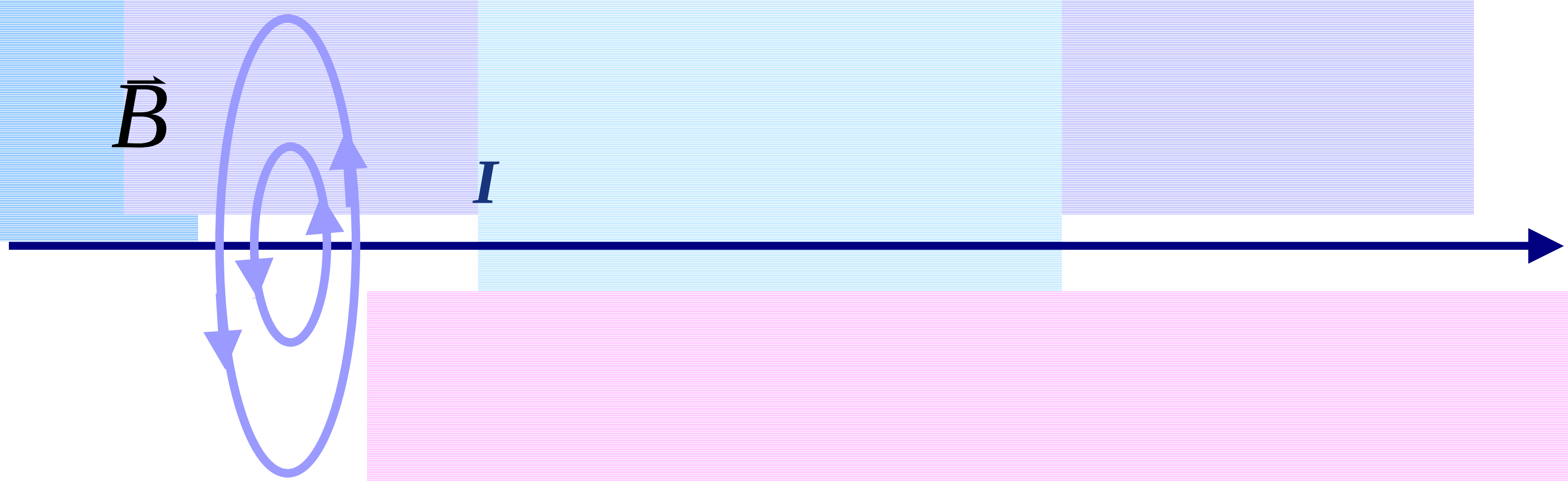
Campo Magnético

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

4ª Ecuación de Maxwell



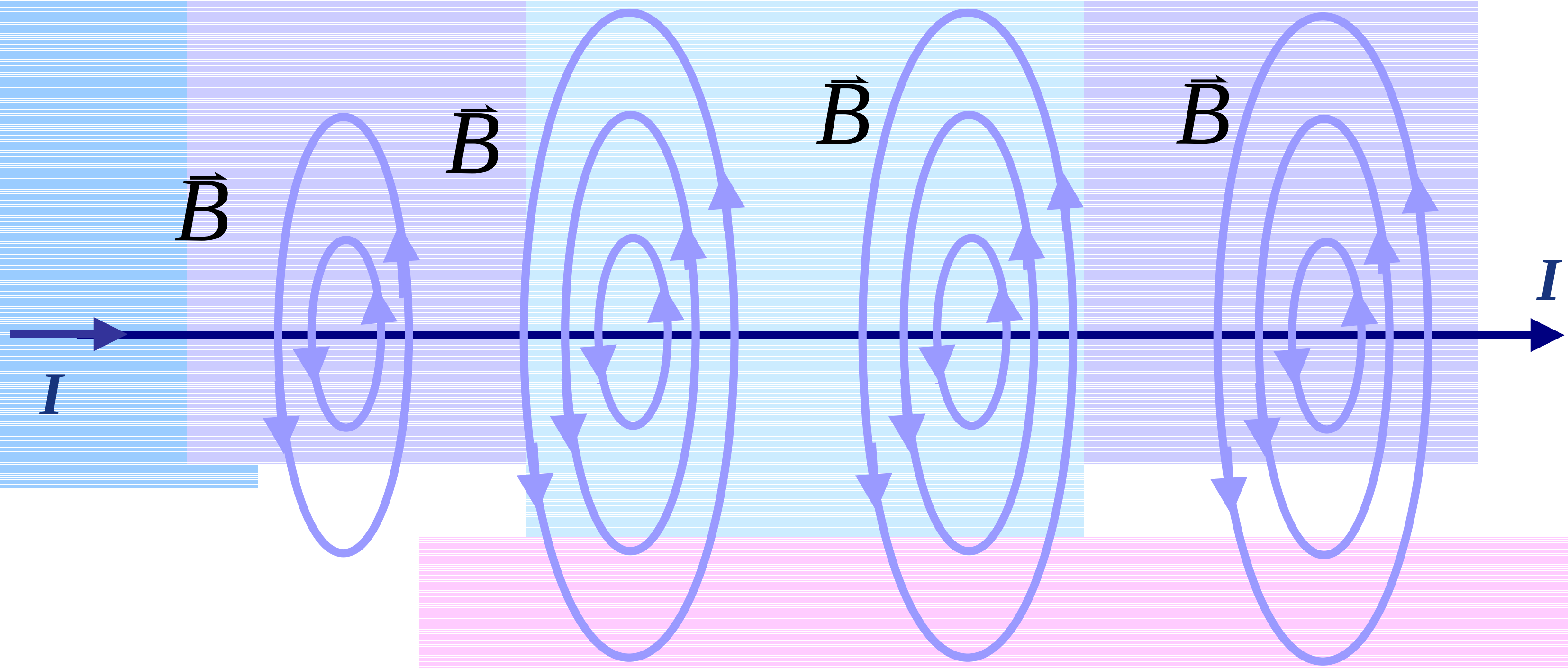
Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

4ª Ecuación de Maxwell



Las líneas de campo aparecen alrededor de una corriente y rotan en torno a ella

Potencial Magnético Vector

Para un campo vectorial cualquiera se cumple la propiedad

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = 0$$

Como sabemos que el campo magnético cumple

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Luego $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$\vec{A}$: Potencial Magnético Vector

A partir de la definición del Campo encontraremos las expresiones para $\vec{A}$

Potencial Magnético Vector

Usaremos la identidad $$\nabla_{\vec{r}}\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)=-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}$$

Recordemos que el campo producido por circuitos lineales tiene la forma $$\vec{B}=\oint\frac{\mu_0 I d\vec{l}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}$$

Usando la identidad escribimos $$\vec{B}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_\Gamma i d\vec{l}'\times\left(\nabla\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)\right)$$

Usando además la identidad $$\nabla\times\left(f\vec{F}\right)=f\nabla\times\vec{F}+\nabla f\times\vec{F}$$

$$\Rightarrow\nabla\times\left(\frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)=\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\nabla\times Id\vec{l}'+\nabla\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)\times Id\vec{l}'$$

Pero el rotor opera sobre $\vec{r}\Rightarrow\nabla\times Id\vec{l}'='0$

Potencial Magnético Vector

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\frac{Id\vec{l}\,'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \right) = \nabla \left(\frac{1}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \right) \times Id\vec{l}\,'$$

Invirtiendo el producto cruz $Id\vec{l}\,' \times \nabla \left(\frac{1}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \right) \times Id\vec{l}\,'$

$$\Rightarrow Id\vec{l}\,' \times \left[\nabla \left(\frac{1}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \right) \right] = -\nabla \times \left(\frac{Id\vec{l}\,'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \right)$$

Luego, podemos escribir $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \nabla \times \left(\frac{Id\vec{l}\,'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \right)$

e intercambiando operadores $\vec{B} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}\,'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \right]$

Potencial Magnético Vector

$$\vec{B} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}\,'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} \right]$$ esta en la forma $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Luego $$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}\,'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$ para circuitos

Haciendo un análisis similar se obtiene:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K} ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$ Para corrientes superficiales

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\Omega \frac{\vec{J} dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$ Para distribuciones en volumen

Resumiendo Podemos calcular Magnético

Usando la definición

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I' d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|^3}$$

Ley Circuital de Ampere

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Usando el potencial magnético vector

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3ª Ecuación de Maxwell

4ª Ecuación de Maxwell