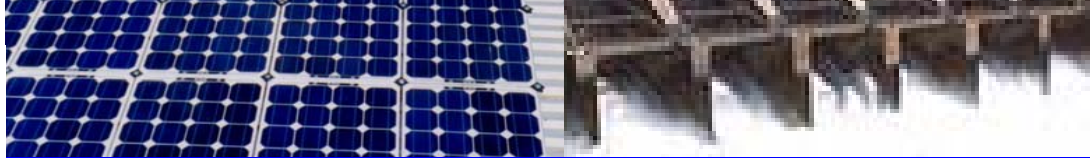


FI33A ELECTROMAGNETISMO

Clase 15

Magnetostática-II

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



INDICE

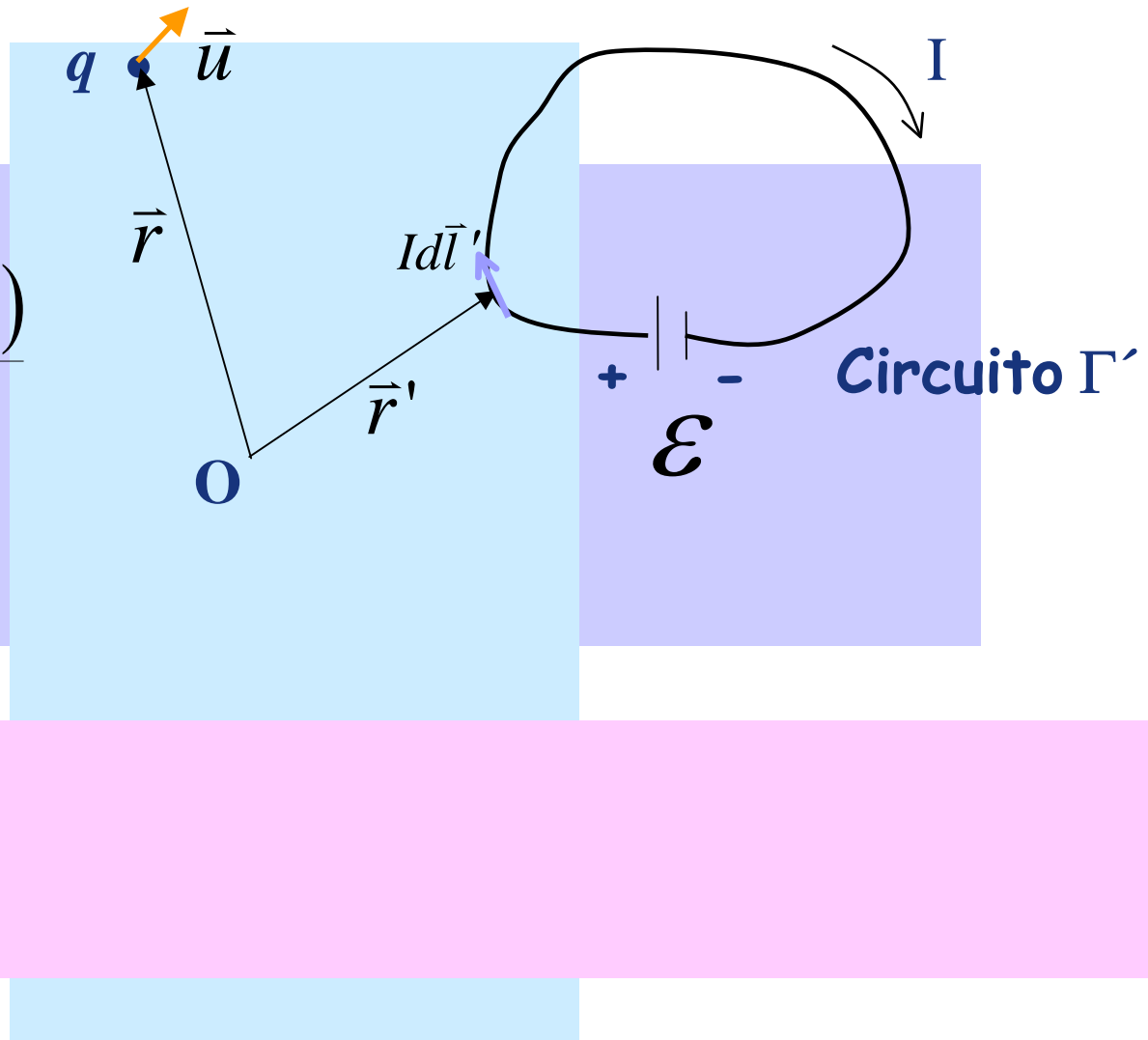
- Campo magnético
- Campo magnético de cargas y distribuciones
- Ley de Biot y Savarat
- Ley circuital de Ampere



Campo magnético

Campo producido
por circuito Γ'

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$





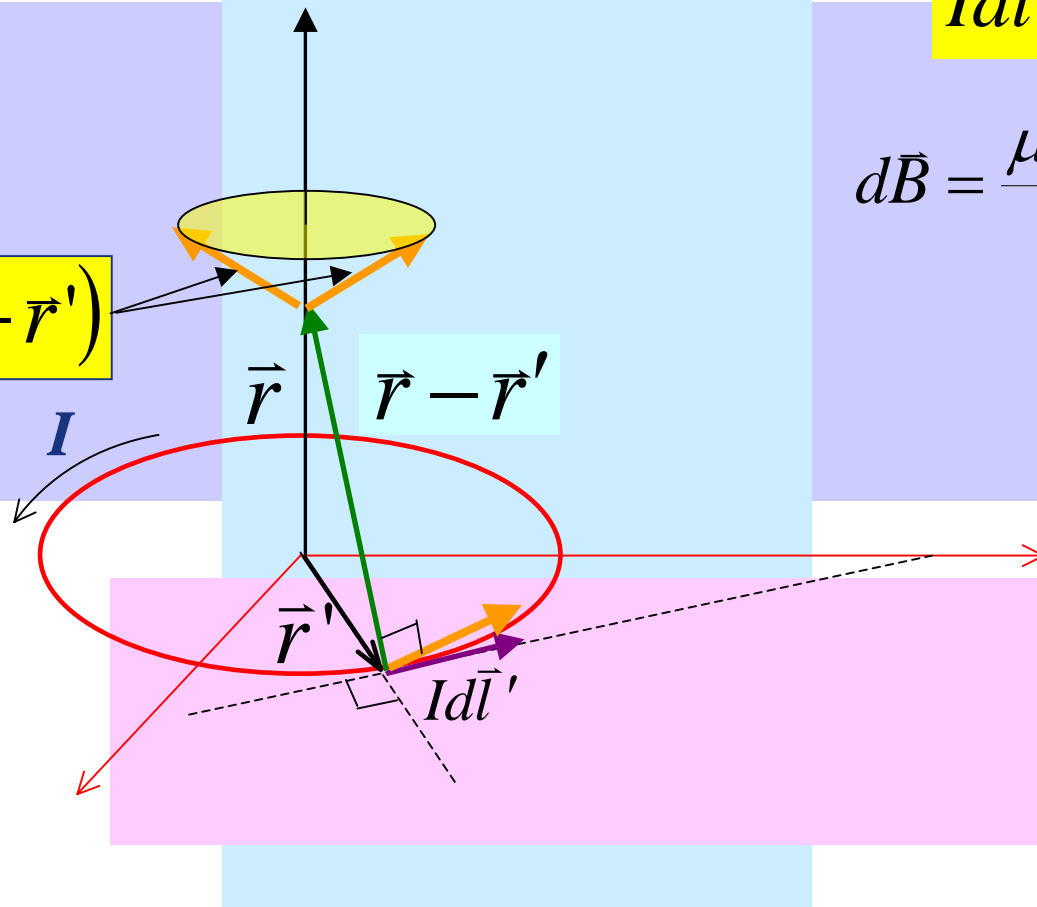
Regla de la mano derecha

Dirección de campo está dado por el producto

$$Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$$

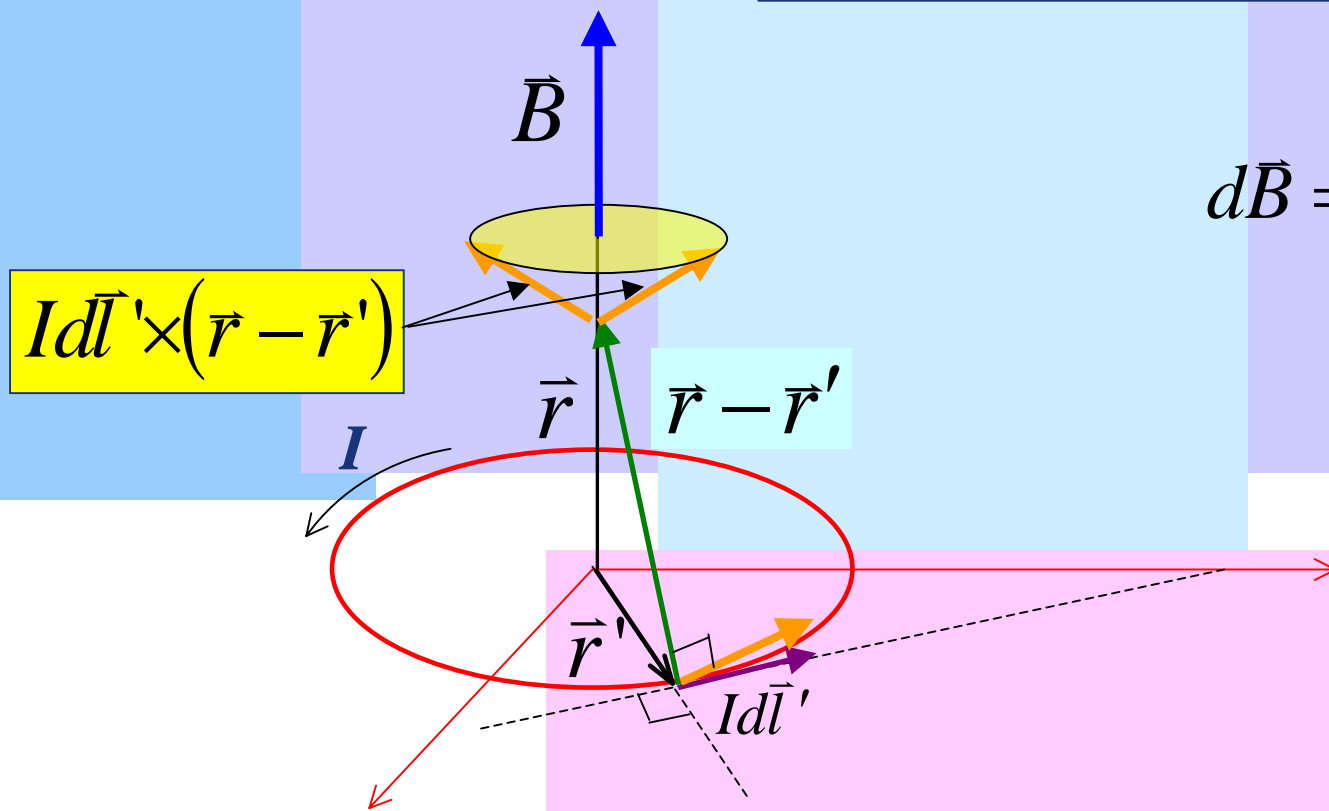
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$$



Regla de la mano derecha

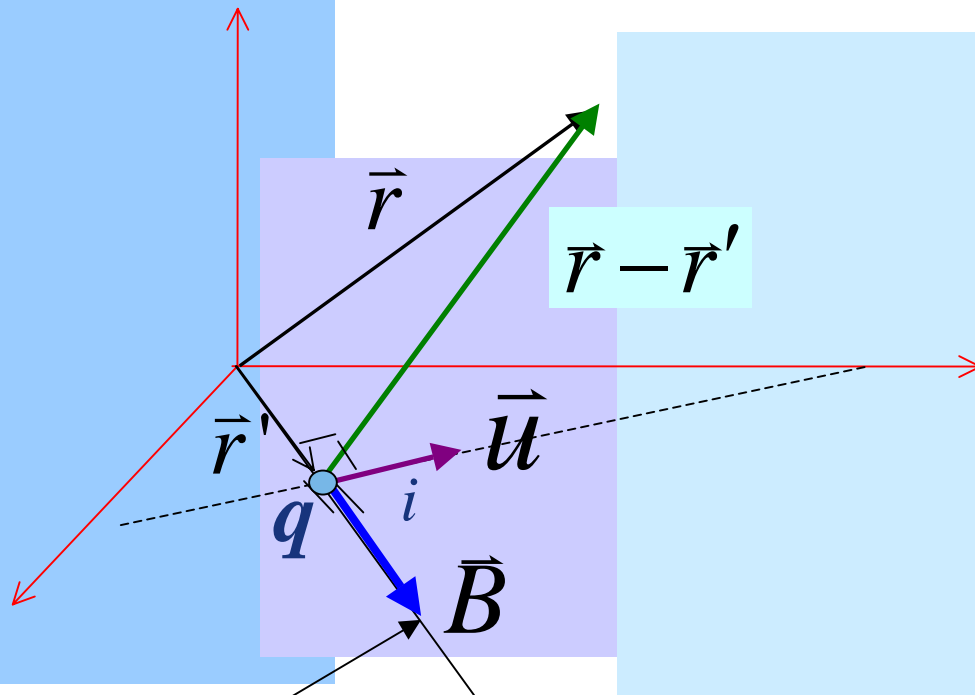
Campo magnético resultante sólo tiene dirección según eje z.



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Campo Magnético de una Carga Puntual



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

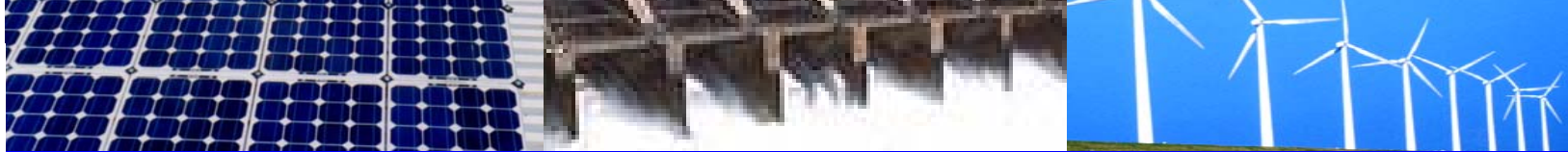
$$i d\vec{l} = \frac{dq}{dt} dl \hat{u} = dq \frac{dl}{dt} \hat{u}$$

$$dq \rightarrow q, \quad \frac{dl}{dt} = \|\vec{u}\| \quad \gamma \quad d\vec{B} \rightarrow \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \vec{u} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

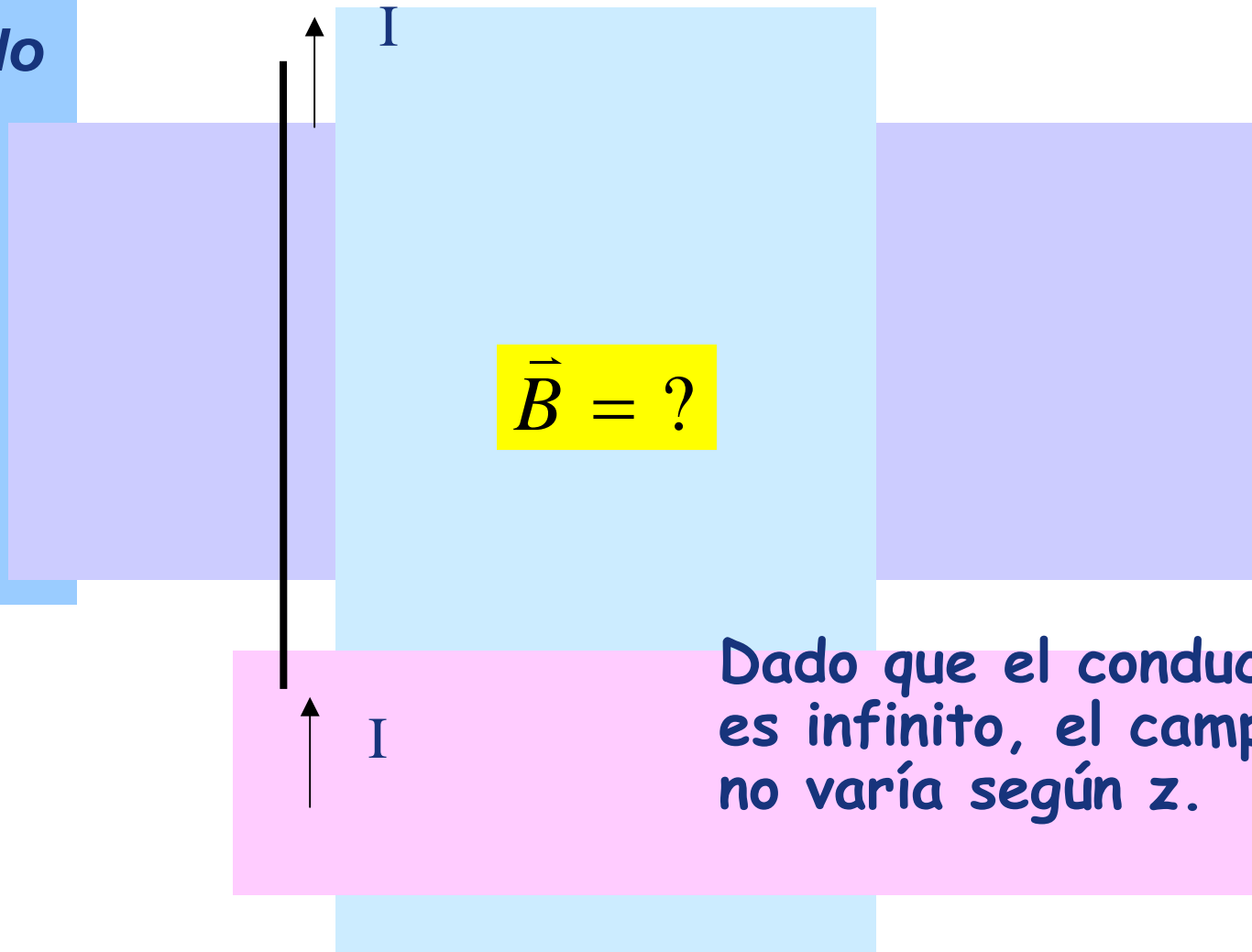
$$I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$$

Campo magnético resultante perpendicular a la velocidad

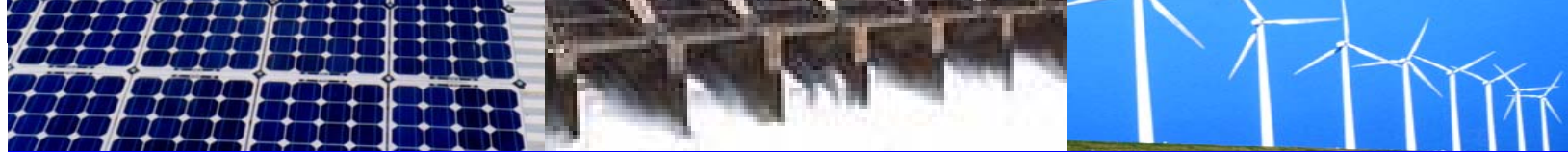


Campo Magnético

Ejemplo

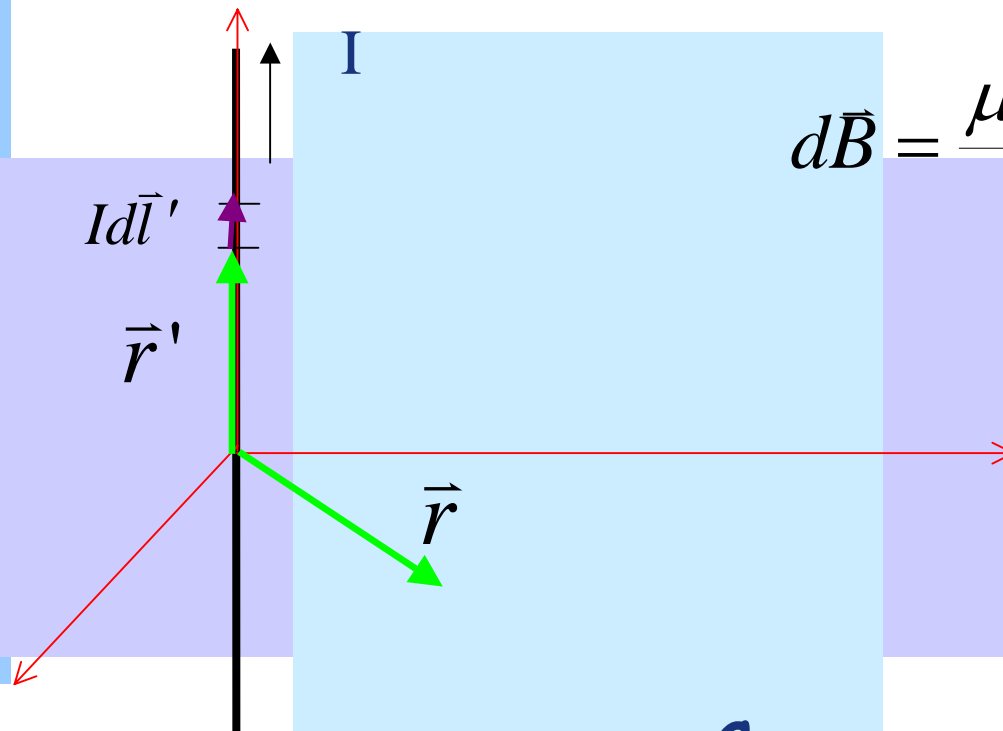


Dado que el conductor es infinito, el campo no varía según z .



Campo Magnético

Ejemplo



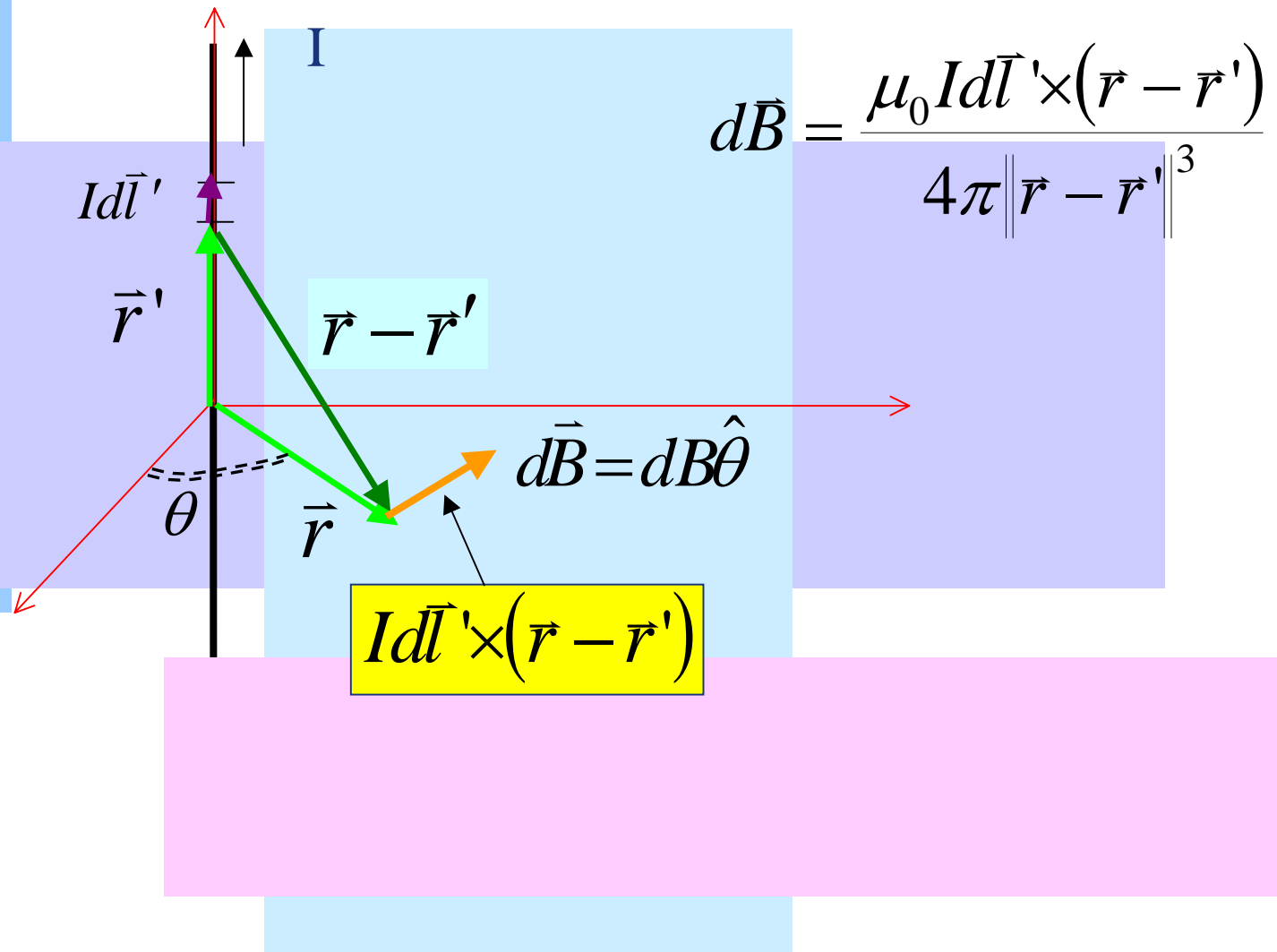
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Campo en $z=0$



Campo Magnético

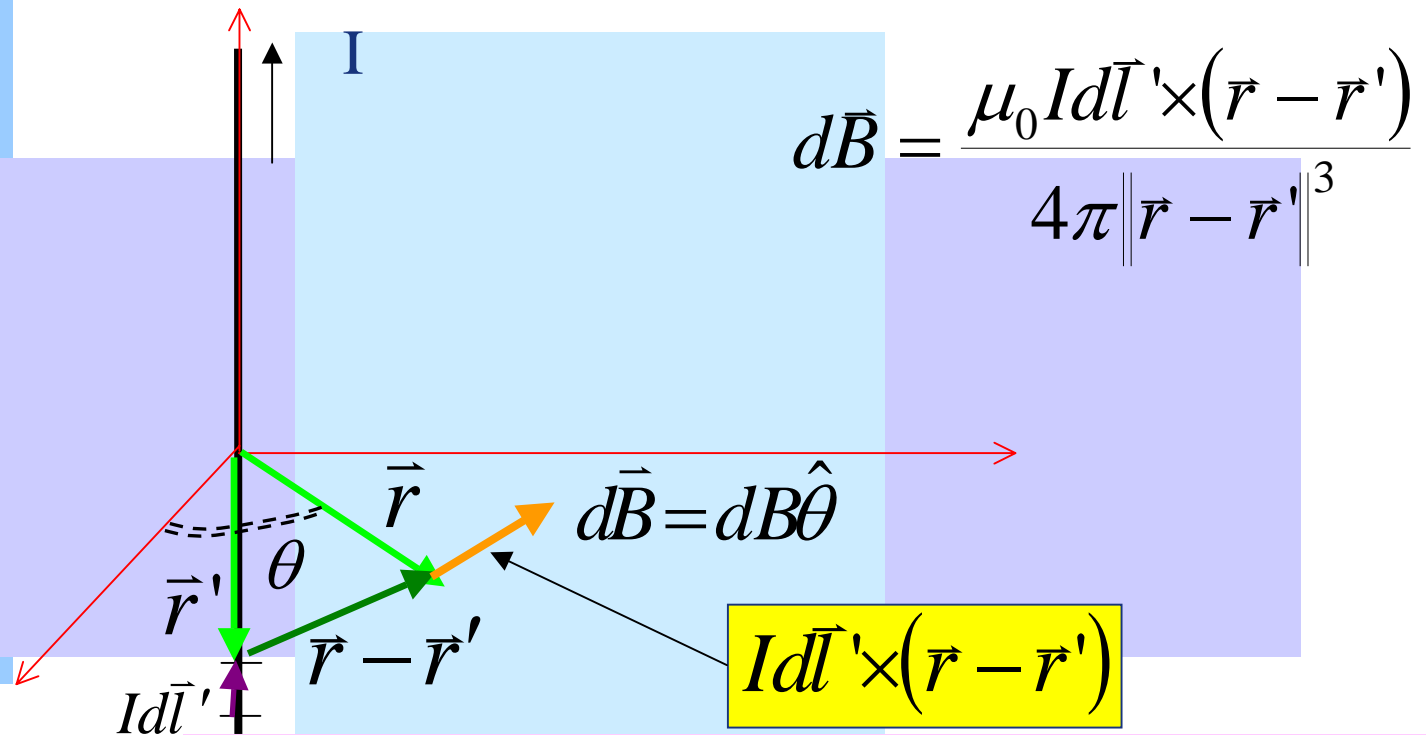
Ejemplo





Campo Magnético

Ejemplo

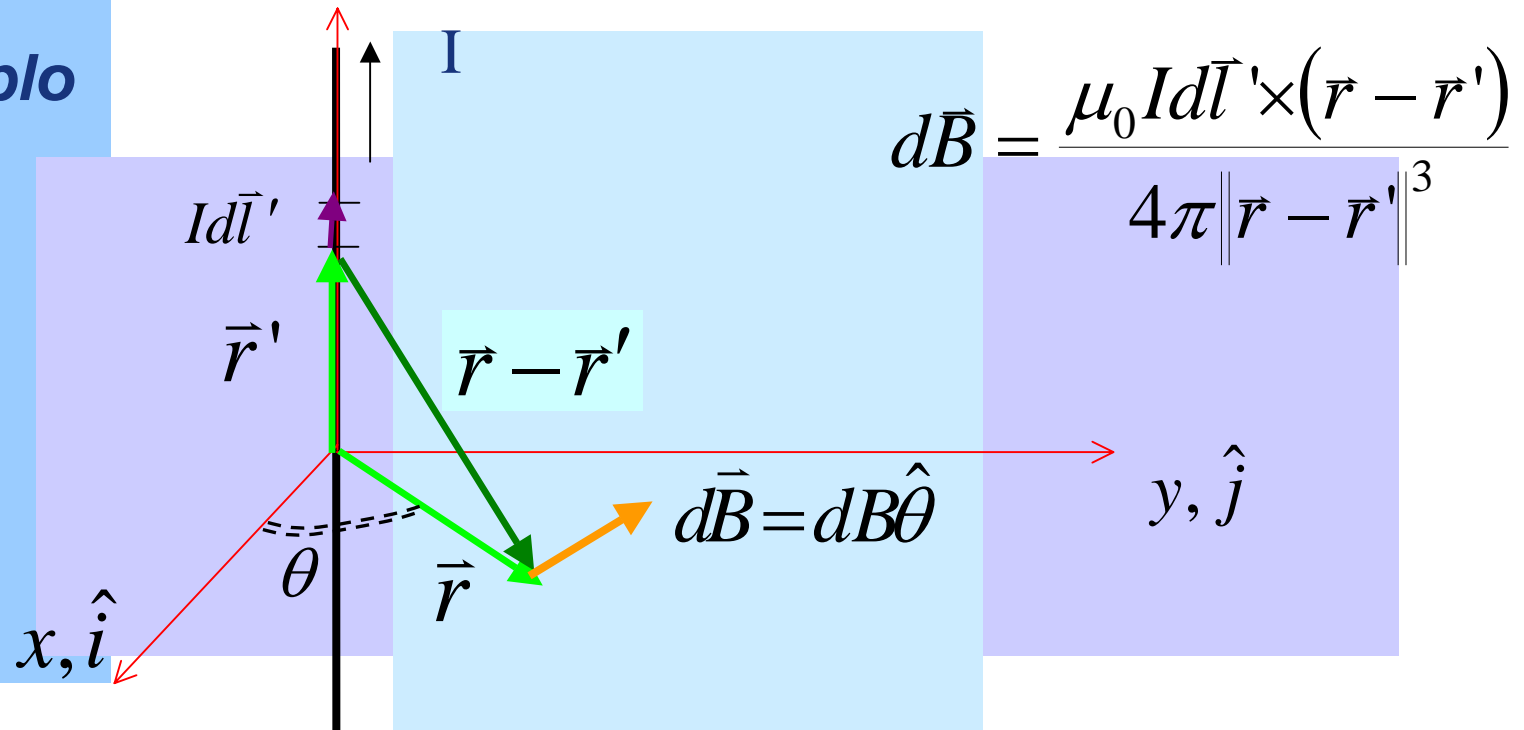


Notar que la contribución de todos los elementos de corriente tiene la misma dirección según $\hat{\theta}$



Campo Magnético

Ejemplo

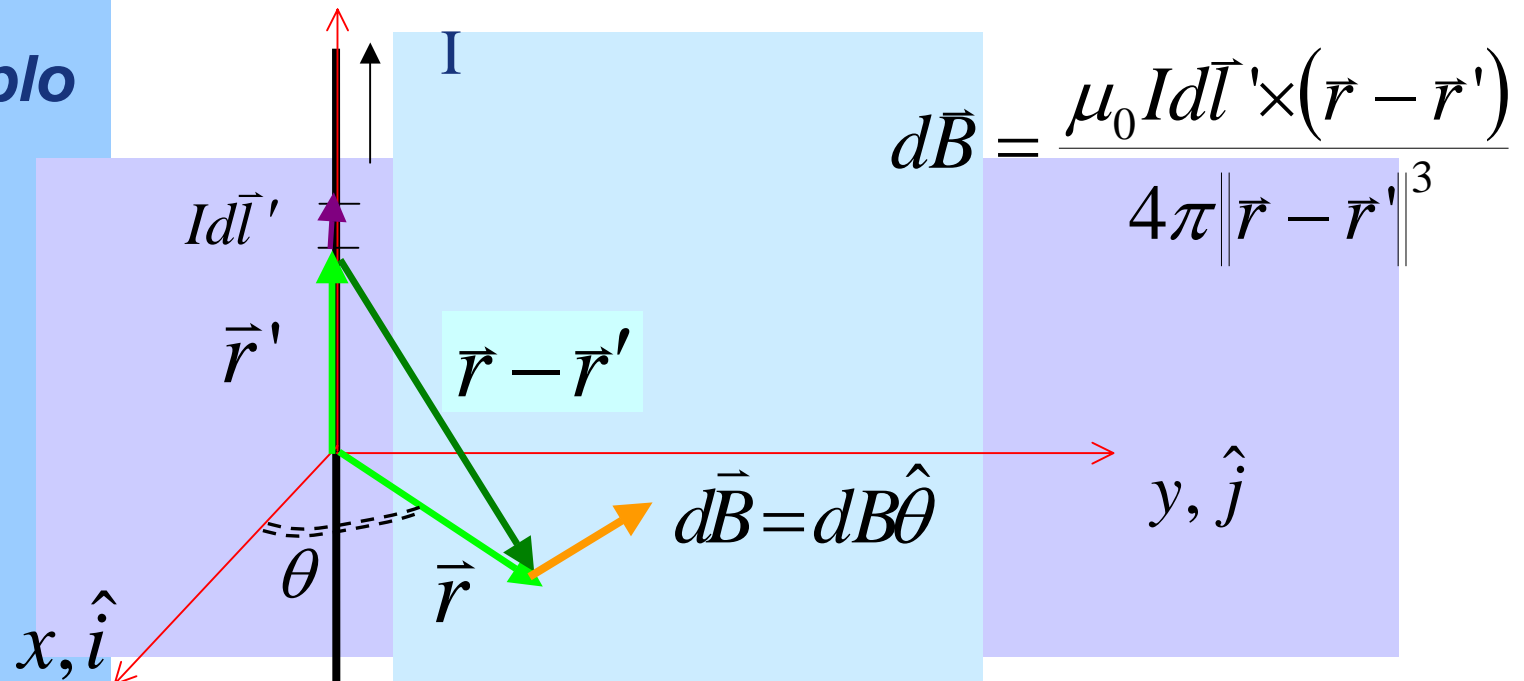


$$\left. \begin{aligned} \vec{r}' &= z'\hat{k} \\ \vec{r} &= r\cos\theta\hat{i} + r\sin\theta\hat{j} \\ Id\vec{l}' &= Idz'\hat{k} \end{aligned} \right\} d\vec{B} = \frac{\mu_0 Idz'\hat{k} \times (r\cos\theta\hat{i} + r\sin\theta\hat{j} - z'\hat{k})}{4\pi [r^2 + z'^2]^{3/2}}$$



Campo Magnético

Ejemplo

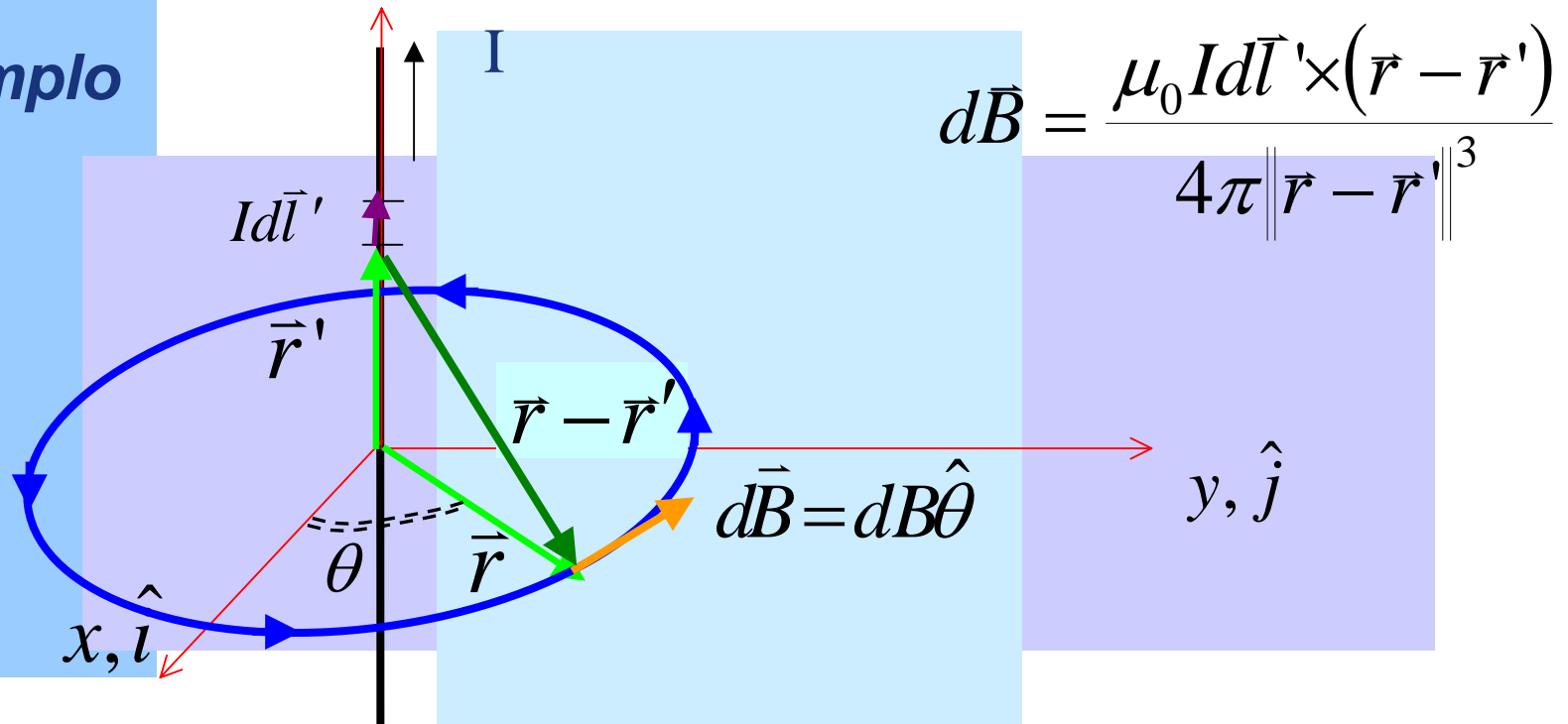


$$\vec{B} = \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} \frac{\mu_0 I r (\cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{i}) dz'}{4\pi [r^2 + z'^2]^{3/2}}$$



Campo Magnético

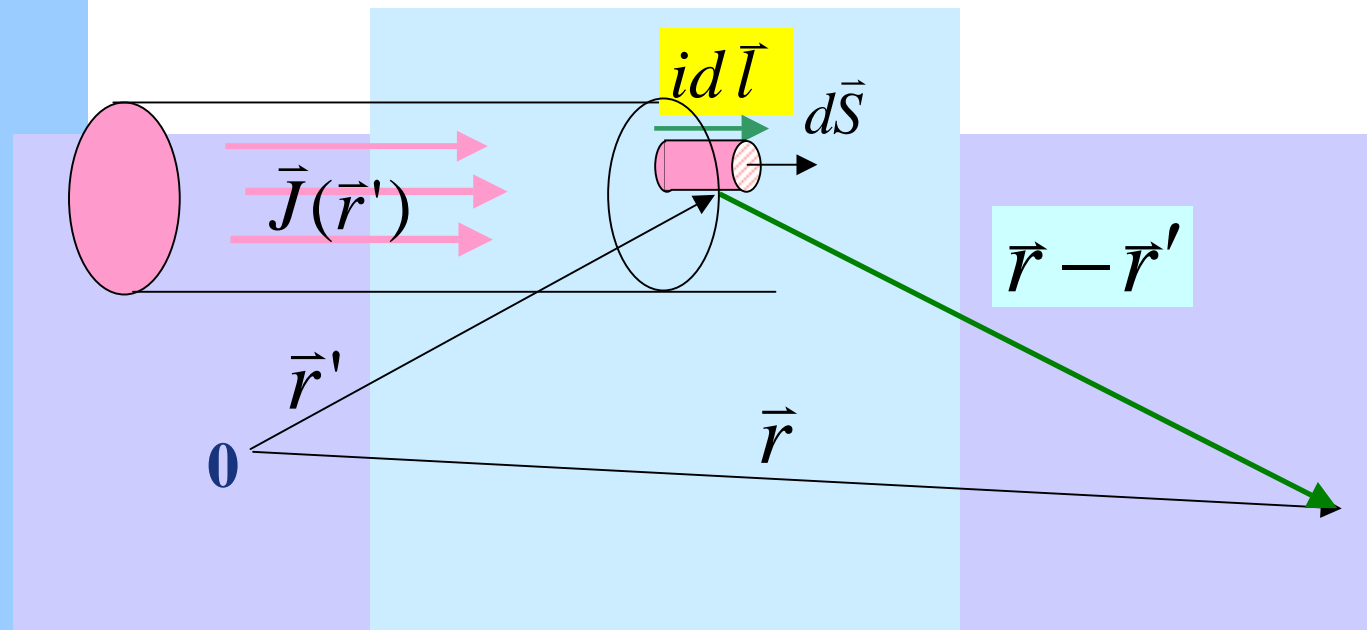
Ejemplo



$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}$$

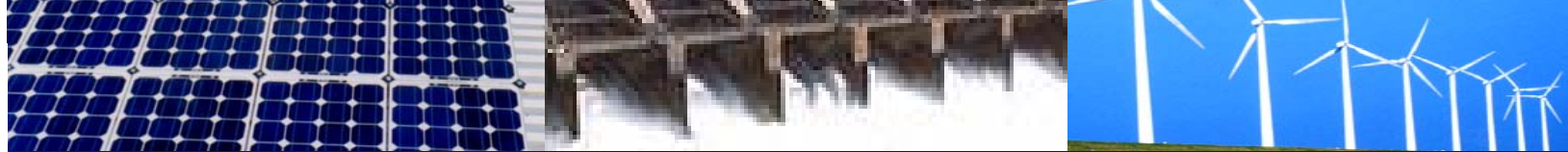


Campo magnético de distribuciones de corriente

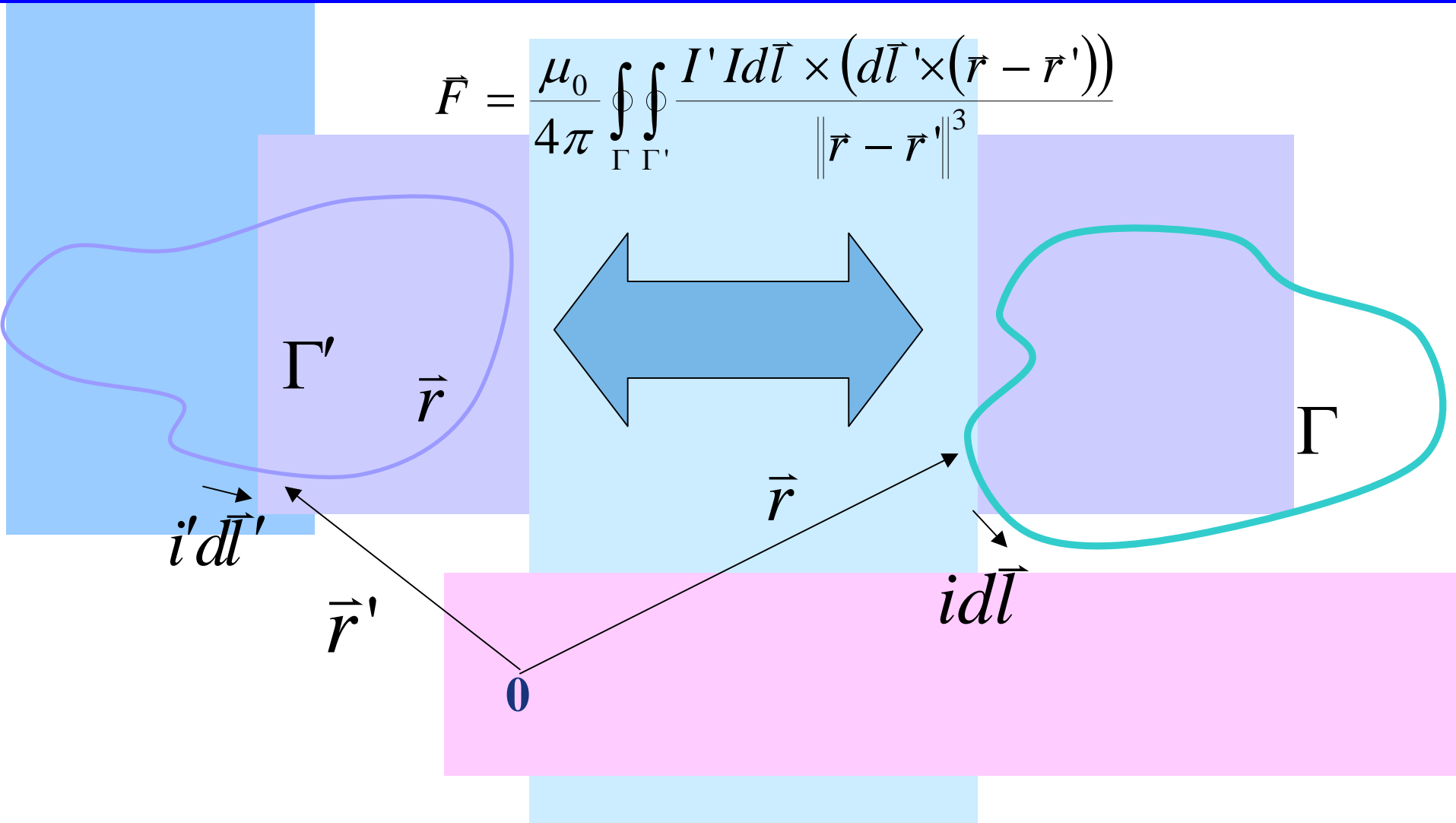


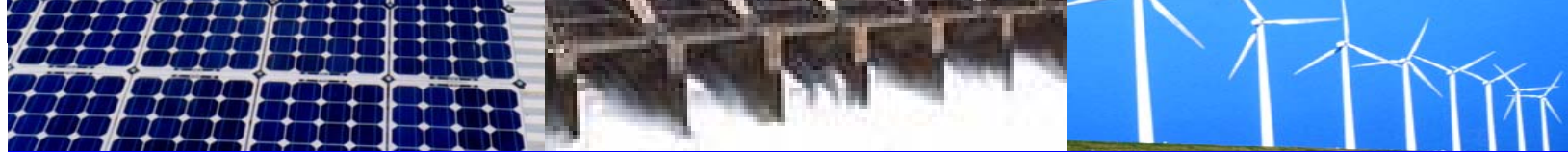
$$idl = \vec{J} \cdot d\vec{S} \cdot d\vec{l} = \vec{J} dV'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV'$$



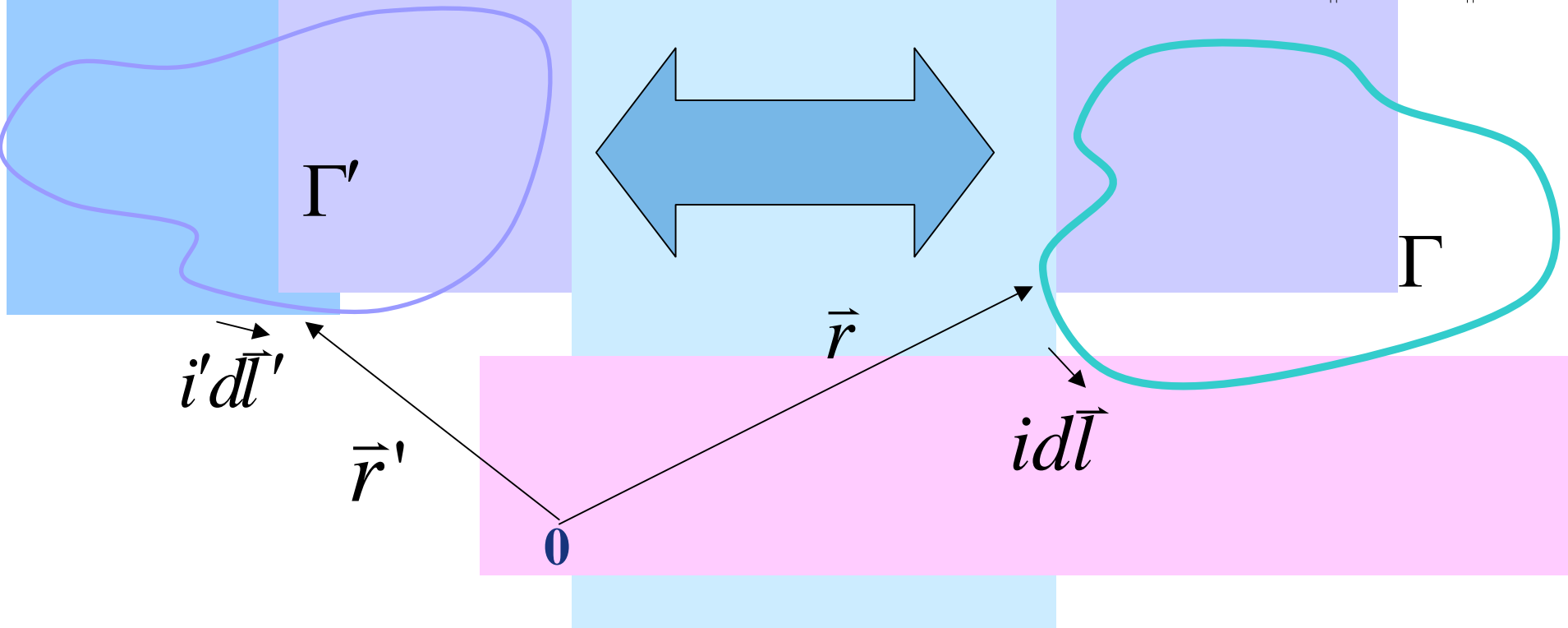
Ley de Biot y Savarat





Ley de Biot y Savarat

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} \frac{I' I d\vec{l} \times (d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \rightarrow d\vec{F} = \frac{Id\vec{l} \times \mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I' d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

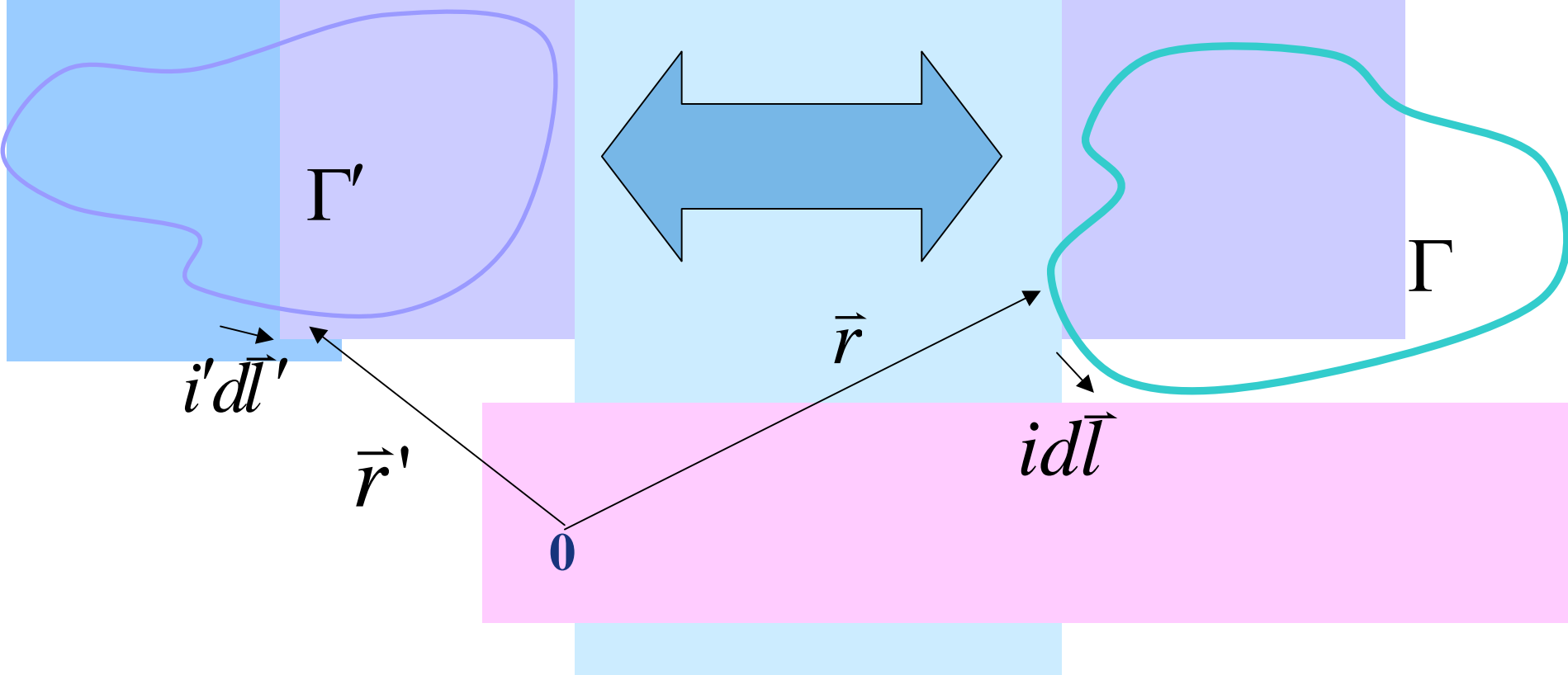




Ley de Biot y Savarat

$$d\vec{F} = \frac{Id\vec{l} \times \mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I' d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$\therefore d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$



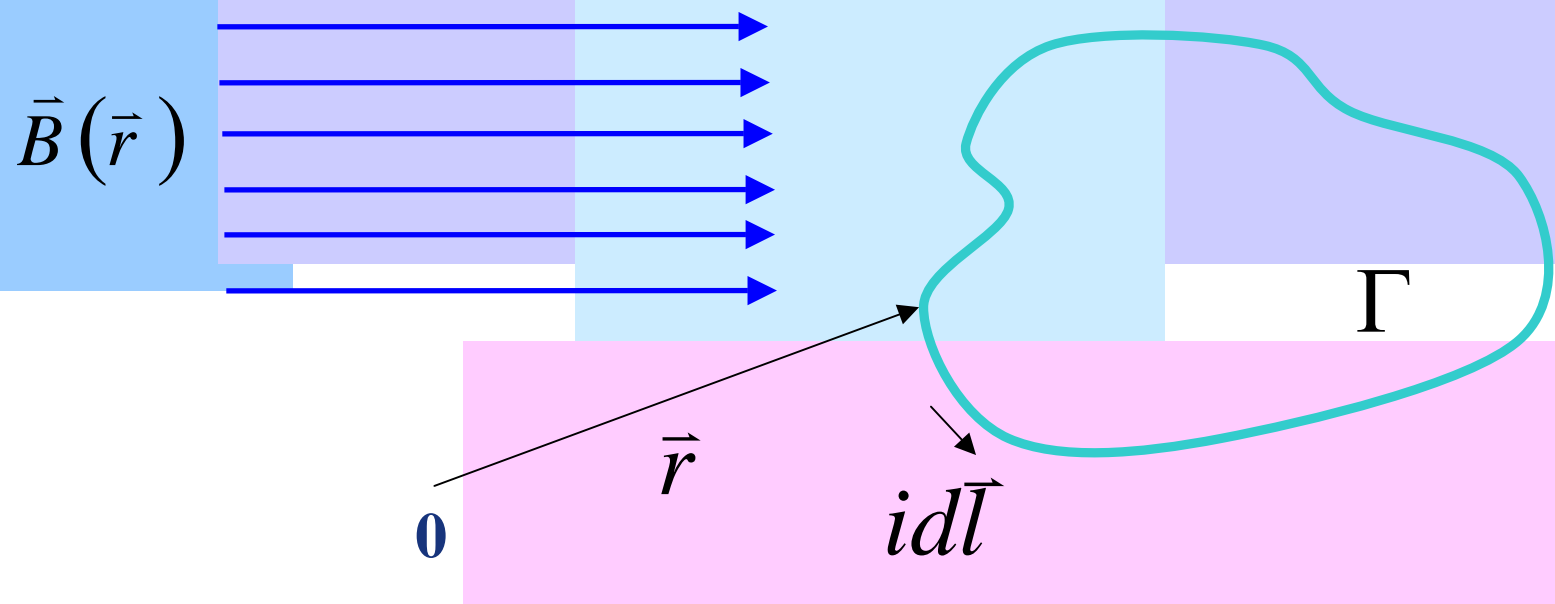


Ley de Biot y Savarat

Así, un circuito en presencia de un campo magnético experimenta una fuerza dada por la ecuación

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

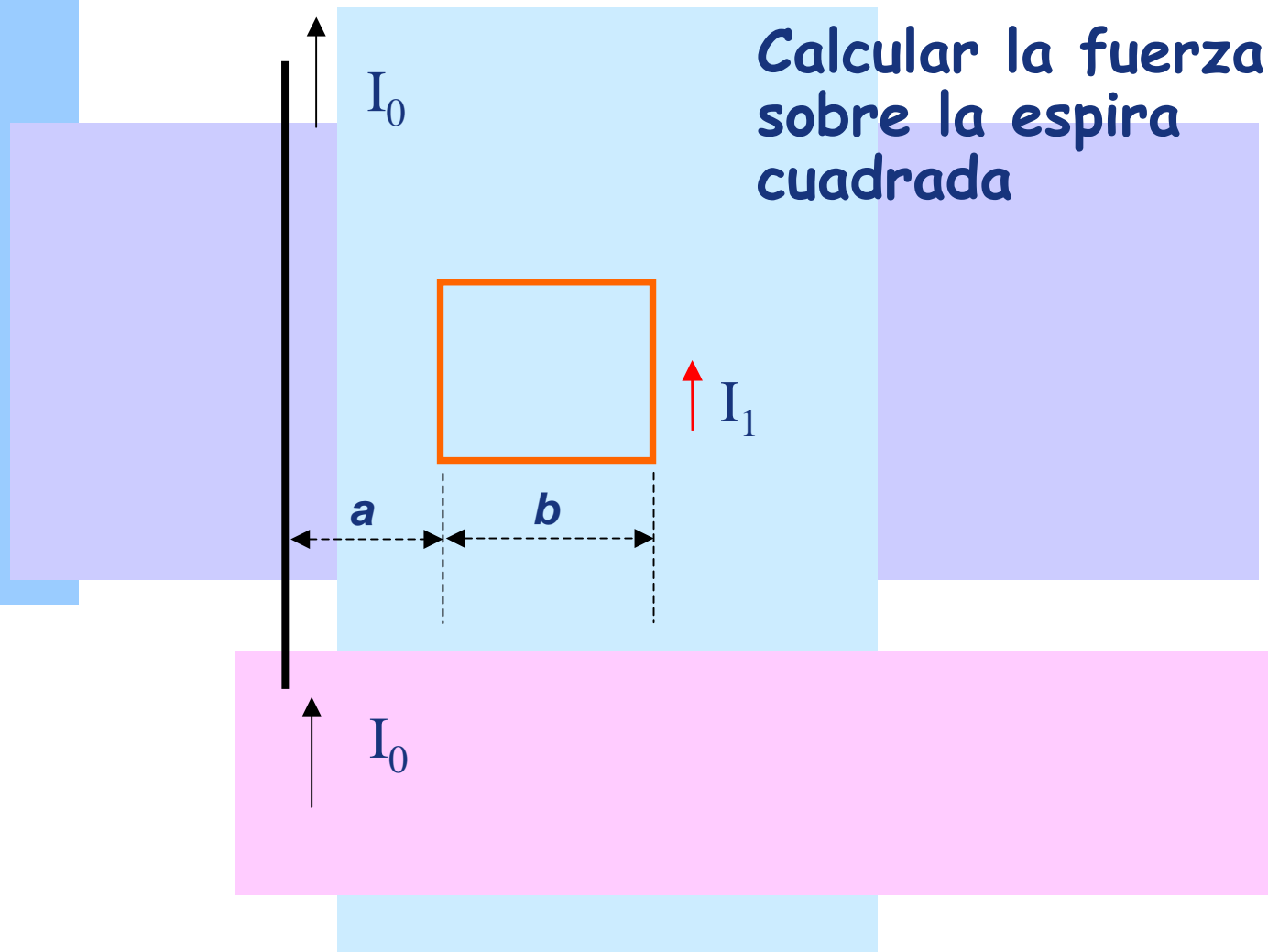
$$\therefore \vec{F} = \oint_{\Gamma} d\vec{F} = \oint_{\Gamma} Id\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$





Ley de Biot y Savarat

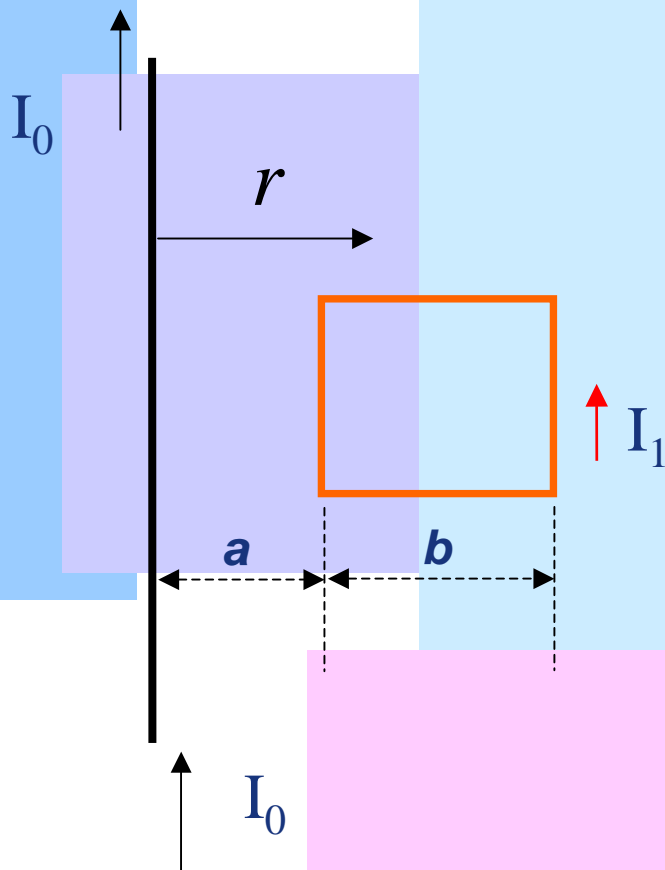
Ejemplo





Ley de Biot y Savarat

Ejemplo



Campo producido por el conductor infinito es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \hat{\theta}$$

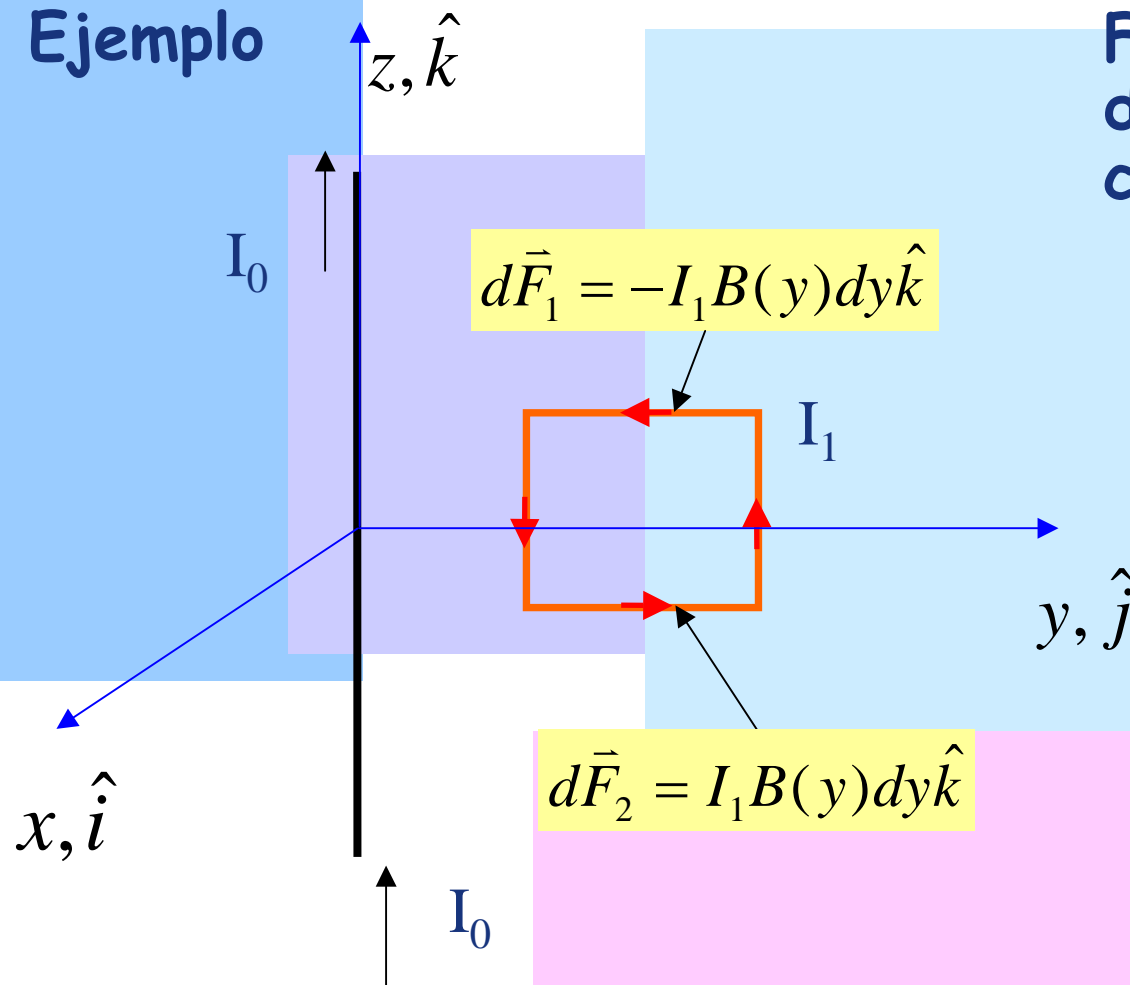
Fuerza sobre elemento de corriente de espira cuadrada

$$d\vec{F} = I_1 d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$



Ley de Biot y Savarat

Ejemplo



$$d\vec{F}_1 = -I_1 B(y) dy \hat{k}$$

$$d\vec{F}_2 = I_1 B(y) dy \hat{k}$$

Fuerza sobre elemento
de corriente de espira
cuadrada

$$d\vec{F} = I_1 d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -B(y) \hat{i}$$

Claramente

$$d\vec{F}_1 = -d\vec{F}_2$$



Ley de Biot y Savarat

Ejemplo

$$d\vec{F} = I_1 d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -B(y)\hat{i}$$

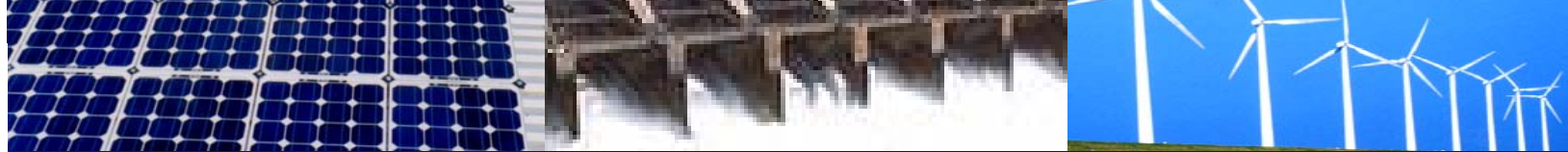
$$d\vec{F}_3 = I_1 B(y = a) dz \hat{j}$$

$$d\vec{F}_4 = -I_1 B(y = a + b) dz \hat{j}$$

Claramente

$$d\vec{F}_3 = I_1 \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a} dz \hat{j}$$

$$d\vec{F}_4 = -I_1 \frac{\mu_0 I_0}{2\pi (a + b)} dz \hat{j}$$



Ley de Biot y Savarat

Ejemplo

$$d\vec{F} = I_1 d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -B(y)\hat{i}$$

z, \hat{k}

I_0

$$d\vec{F}_1 = -I_1 B(y) dy \hat{k}$$

$$d\vec{F}_3 = I_1 B(y=a) dz \hat{j}$$

$$d\vec{F}_4 = -I_1 B(y=a+b) dz \hat{j}$$

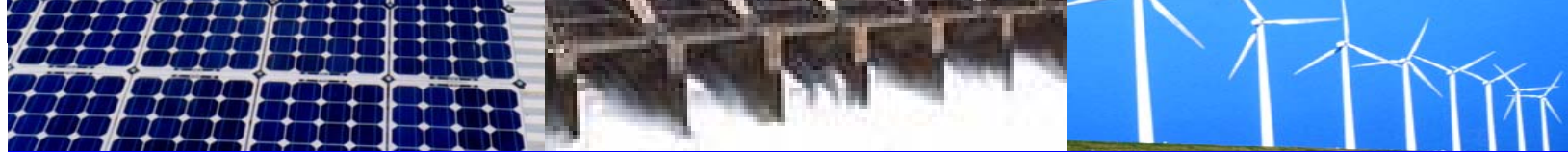
y, \hat{j}

$$d\vec{F}_2 = I_1 B(y) dy \hat{k}$$

**Fuerza total sobre el
circuito cuadrado**

x, \hat{i}

$$\therefore \vec{F} = \oint_{\Gamma} d\vec{F} = \int_{y=a+b}^{y=a} d\vec{F}_1 + \int_{z=b/2}^{-b/2} d\vec{F}_3 + \int_{y=a}^{y=a+b} d\vec{F}_2 + \int_{z=-b/2}^{z=b/2} d\vec{F}_4$$



Ley de Biot y Savarat

Ejemplo

$$d\vec{F} = I_1 d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -B(y)\hat{i}$$

$$d\vec{F}_1 = -I_1 B(y) dy \hat{k}$$

$$d\vec{F}_3 = I_1 B(y = a) dz \hat{j}$$

$$d\vec{F}_4 = -I_1 B(y = a + b) dz \hat{j}$$

$$d\vec{F}_2 = I_1 B(y) dy \hat{k}$$

x, \hat{i}

z, \hat{k}

I_0

y, \hat{j}

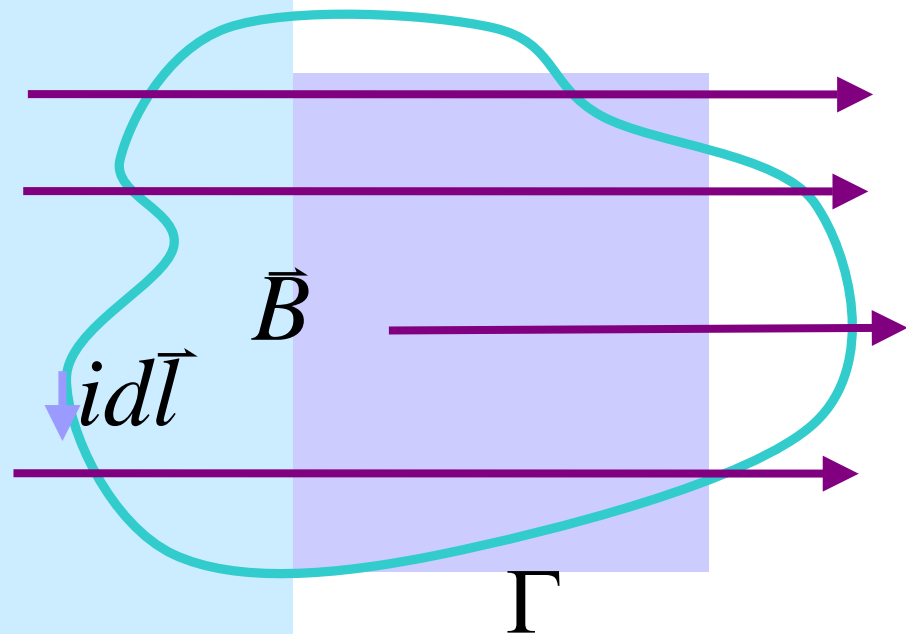
$$\vec{F} = \oint_{\Gamma} d\vec{F} = \int_{z=b/2}^{z=-b/2} \frac{\mu_0 I_1 I_0 \hat{j}}{2\pi a} dz - \int_{z=-b/2}^{z=b/2} \frac{\mu_0 I_1 I_0 \hat{j}}{2\pi(a+b)} dz = \frac{\mu_0 I_1 I_0 b^2}{2\pi(a+b)} \hat{j}$$

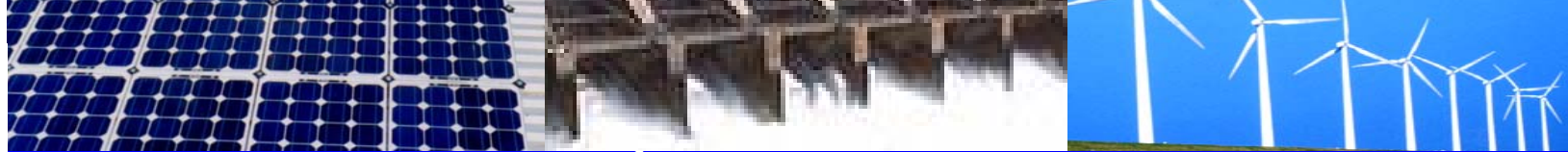


Torque Magnético

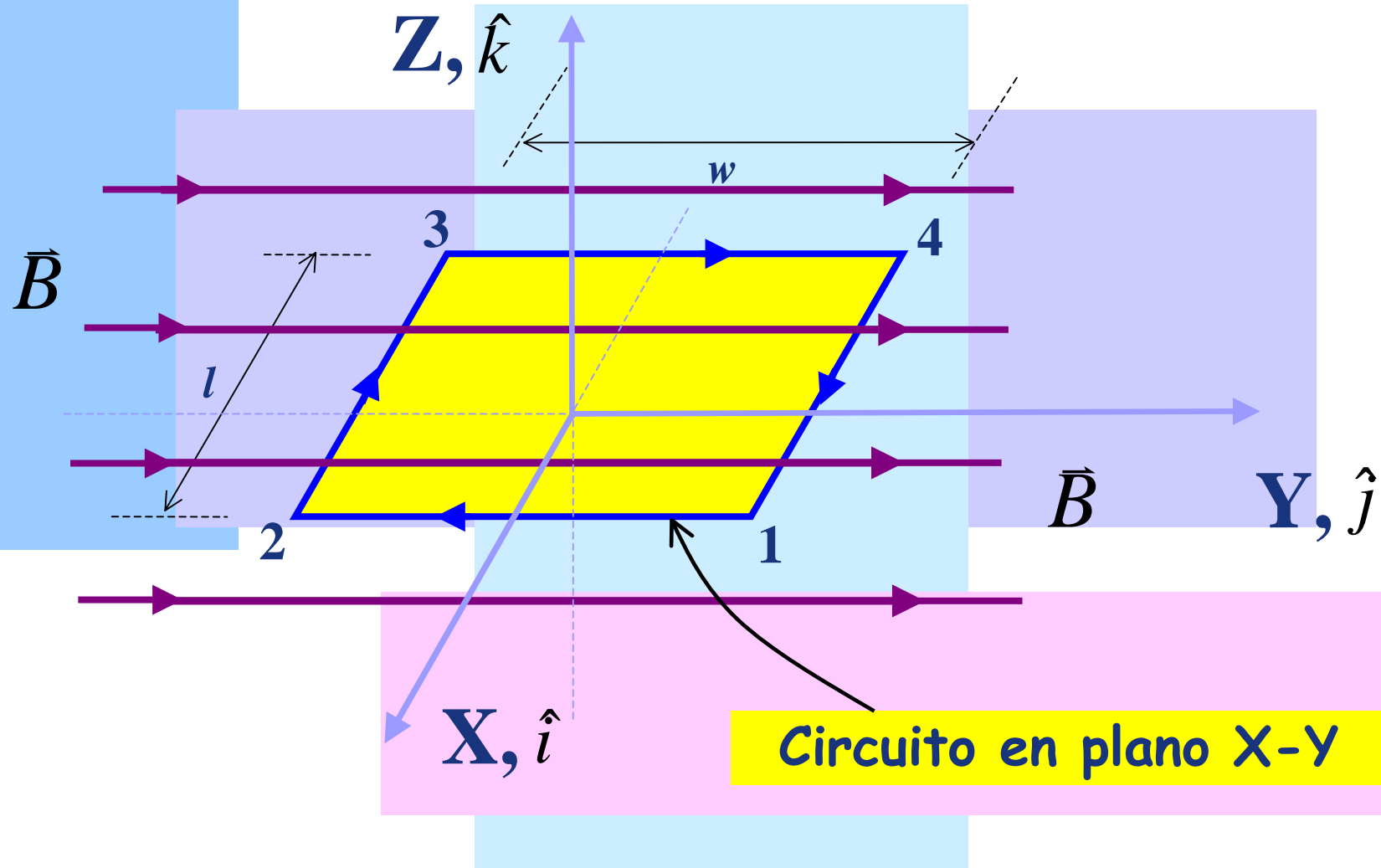
Ley de Biot y Savarat

$$\therefore d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$



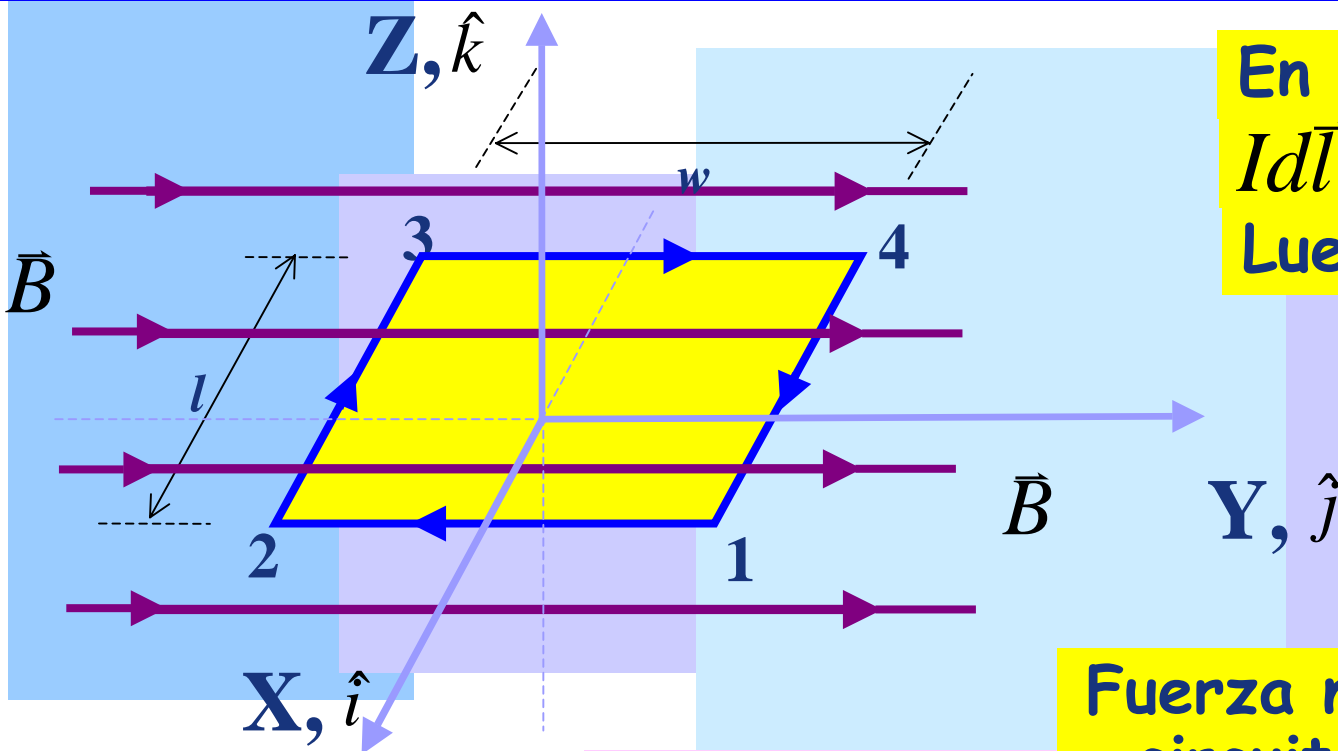


Torque Magnético





Torque Magnético



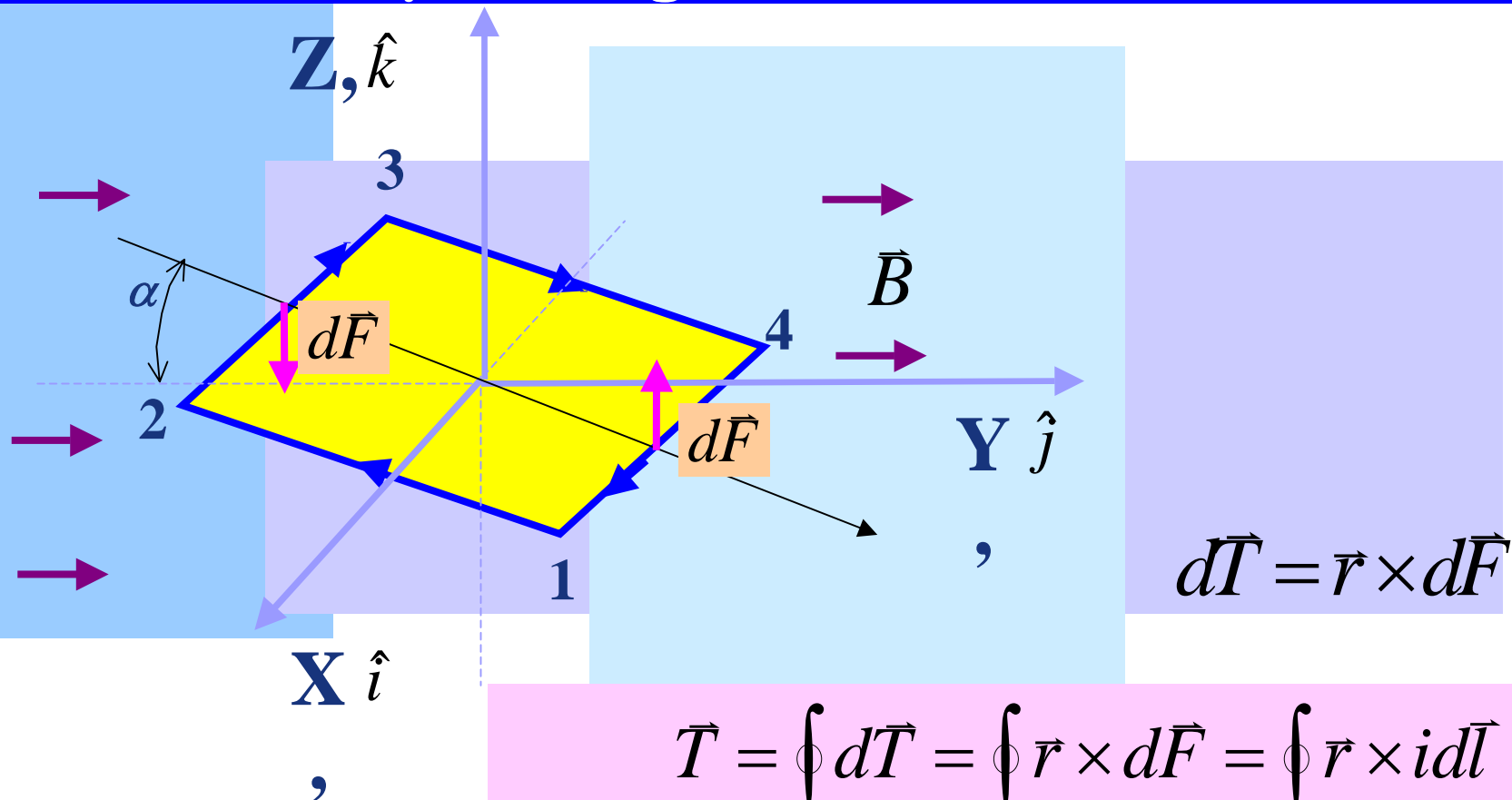
En lados 1-2 y 3-4
 $I d\vec{l}$ es paralelo a \vec{B}
Luego $F=0$

Fuerza neta nula sobre el
circuito si B constante

$$\vec{F} = I \int_2^3 d\vec{l} \times \vec{B} + I \int_4^1 d\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = I \int_2^3 dx (-\hat{i}) \times \vec{B} + I \int_4^1 dx (\hat{i}) \times \vec{B}$$



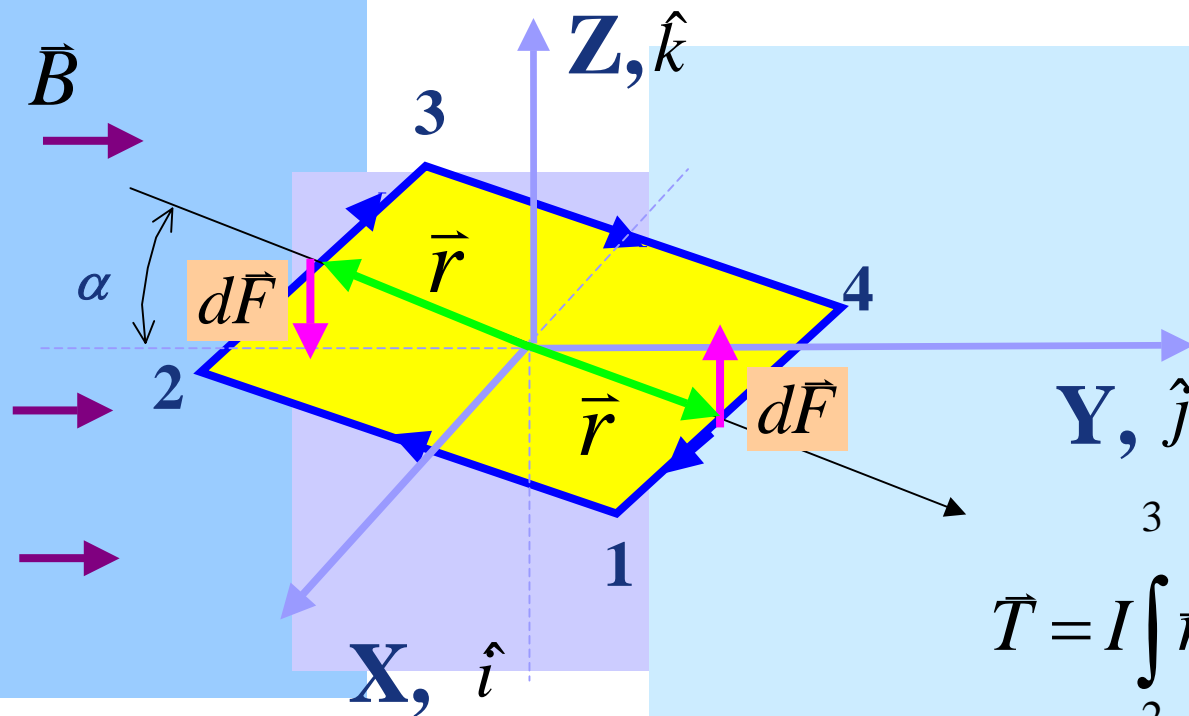
Torque Magnético



Torque neto no nulo sobre el circuito



Torque Magnético



$$\vec{T} = I \int_2^3 \vec{r} \times d\vec{x} \times \vec{B} + I \int_4^1 \vec{r} \times d\vec{x} \times \vec{B}$$

$$\vec{T} = \frac{Iwl}{2} \cos\alpha \hat{i} + \frac{Iwl}{2} \cos\alpha \hat{i}$$

Torque neto sobre el circuito

$$\therefore \vec{T} = Iwl \cos\alpha \hat{i}$$