Escuela de
Ingeniería
Universidad
de Chile

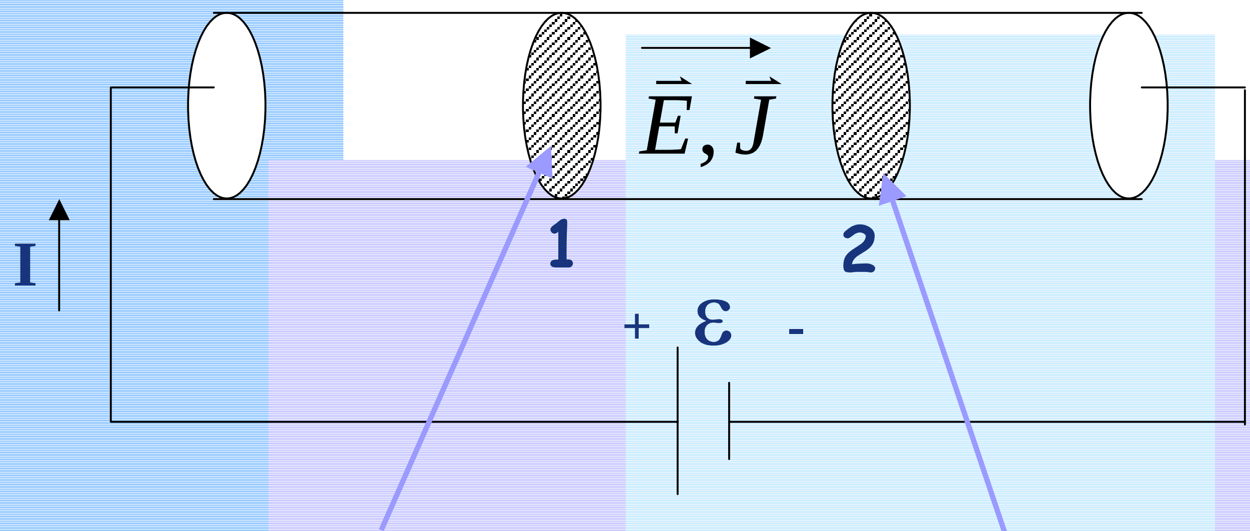
FI33A ELECTROMAGNETISMO
Clase 13
Corriente Eléctrica-III

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

- Efecto Joule
- Ecuación de Continuidad
- Condiciones de borde para J

Efecto Joule



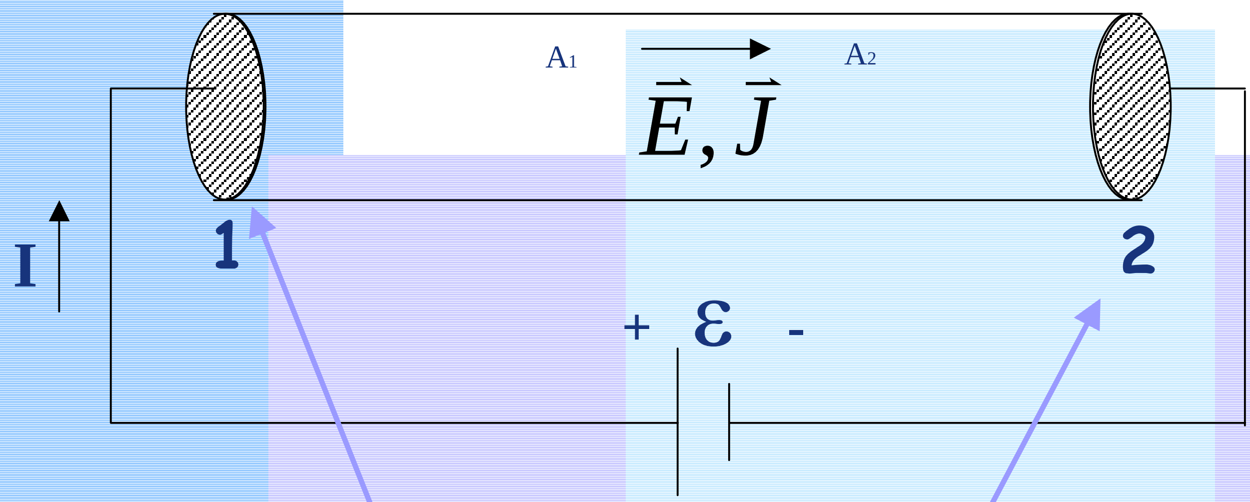
$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2$$

$$\Delta U = \Delta Q (V_1 - V_2)$$

Potencia es la derivada de la Energia

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}(V_1 - V_2)$$

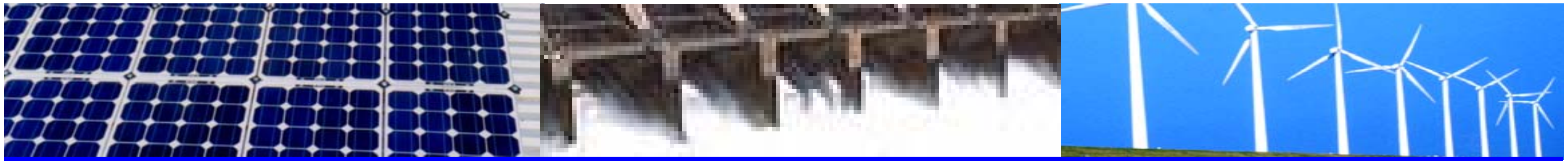
Efecto Joule



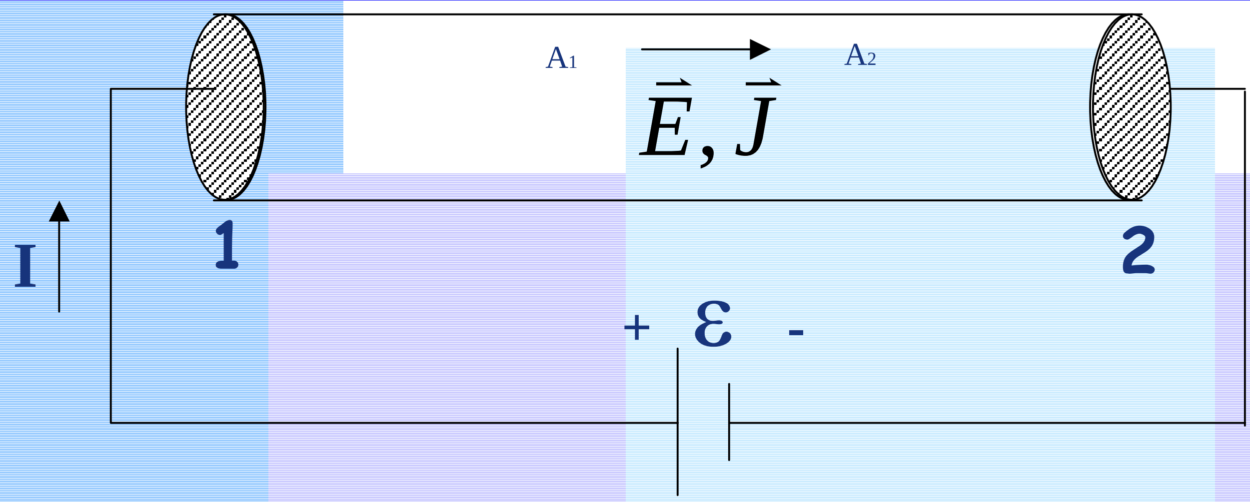
- Calor disipado
- Fem proporciona energía

Potencia es diferencia de potencial por corriente

$$\Rightarrow P = I\Delta V$$



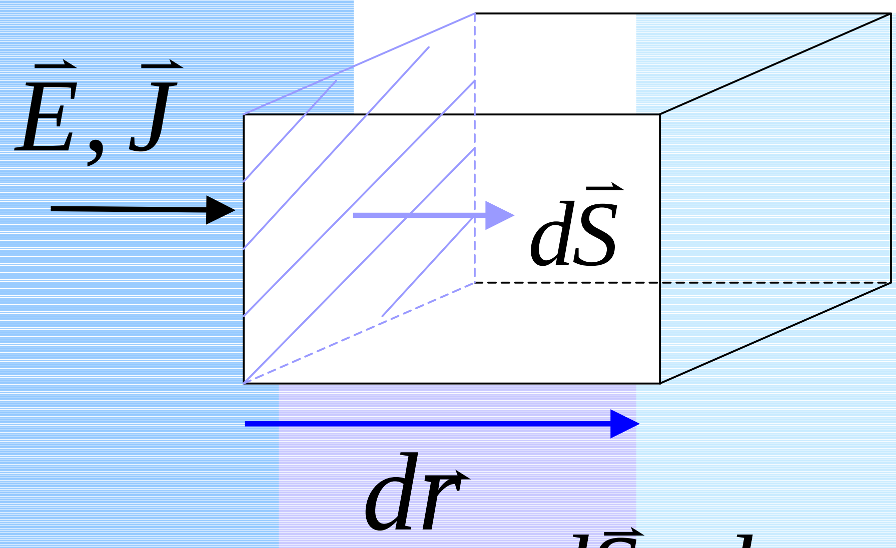
Efecto Joule



- Calor disipado
- Fem proporciona energía

$$\Delta V = RI \Rightarrow P = I \cdot R \cdot I = RI^2 \quad \text{ó} \quad P = \frac{\Delta V^2}{R}$$

Efecto Joule



$$dP = I\Delta V$$

$$dP = \underbrace{\left(\vec{J}\cdot d\vec{S}\right)}_{I}\cdot\underbrace{\left(\vec{E}\cdot d\vec{r}\right)}_{\Delta V}$$

$$d\vec{S}\cdot d\vec{r} = dv \;\Rightarrow\; dP = \vec{J}\cdot\vec{E}\cdot dv$$

Potencia disipada en volumen Ω

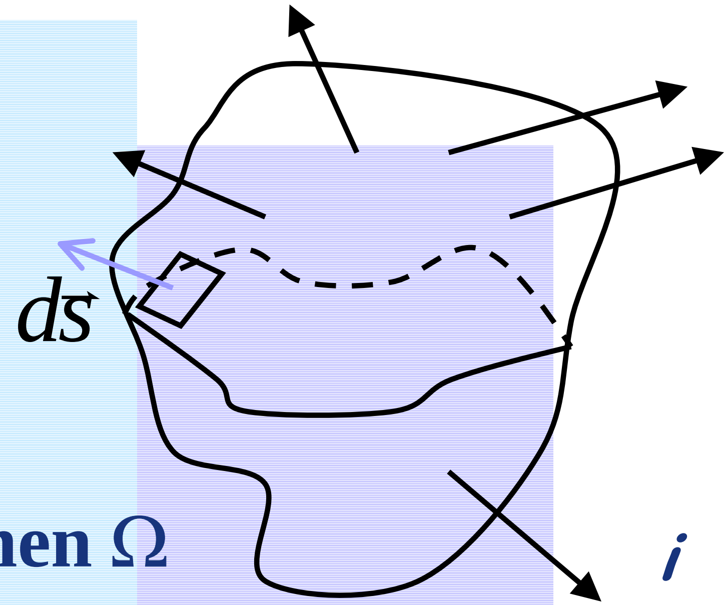
$$\therefore \quad P = \iiint_{\Omega} \vec{J}\cdot\vec{E}\, dv$$

Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

Ecuación de Continuidad

Corriente saliendo de volumen Ω

$$I_{salida} = \oint\!\!\oint_{S(\Omega)} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



Q_{in} a la carga contenida en el volumen Ω

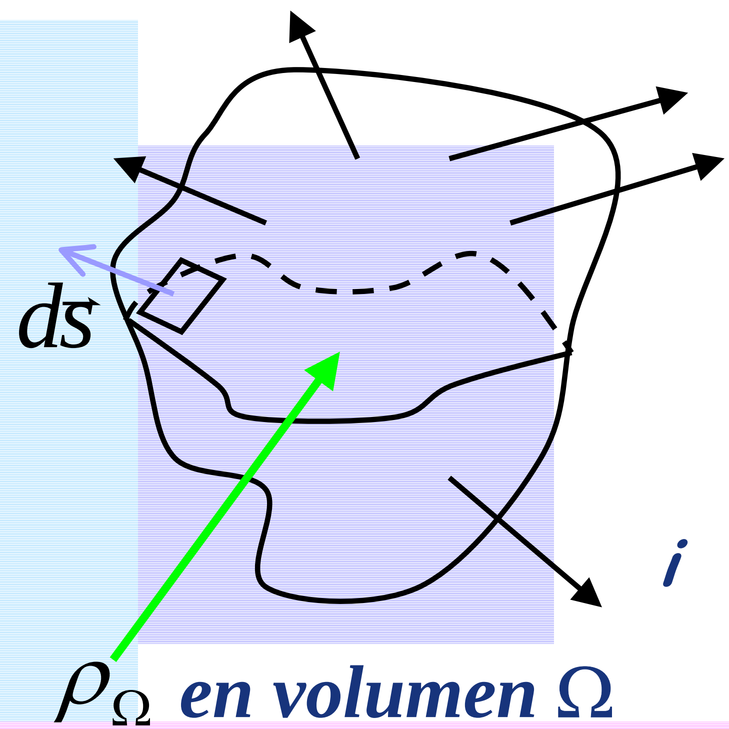
$$I_{salida} = -\frac{dQ_{in}}{dt}$$

Corriente que sale corresponde a la variación de carga encerrada en el volumen

Ecuación de Continuidad

$$Q_{in} = \iiint_{\Omega} \rho_{\Omega}(\vec{r})\,dV \quad (5.30)$$

$$I_{salida} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega} \rho_{\Omega}(\vec{r})\,dV \quad (5.31)$$



volumen Ω es fijo (no depende de t)

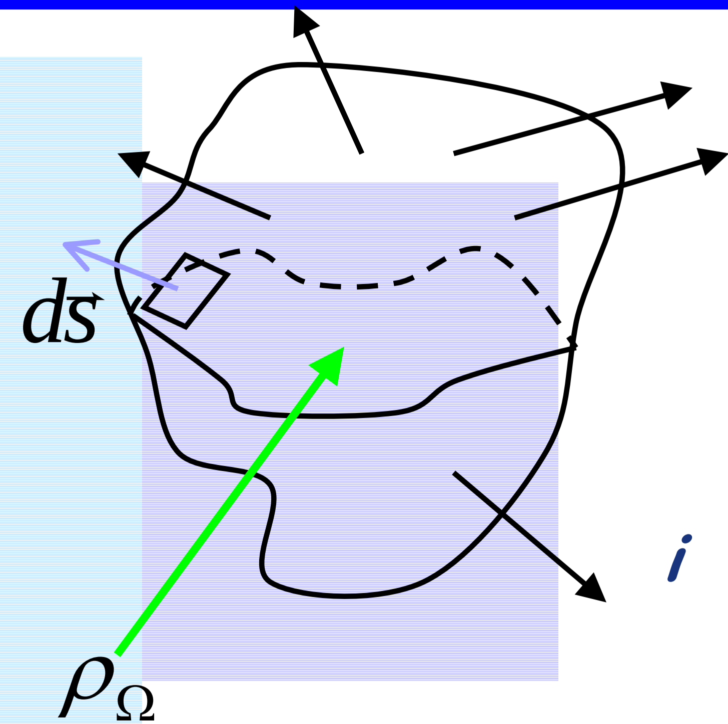
$$\Rightarrow \quad I_{salida} = -\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\Omega}(\vec{r})\right]dV$$

Ecuación de Continuidad

teníamos $$-\frac{dQ_{in}}{dt} = I_{salida}$$

$$\Rightarrow \quad -\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\Omega}(\vec{r})\right]dV = \oint\!\!\oint_{S(\Omega)} \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \quad -\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\Omega}(\vec{r})\right]dV = \iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{J}dV$$



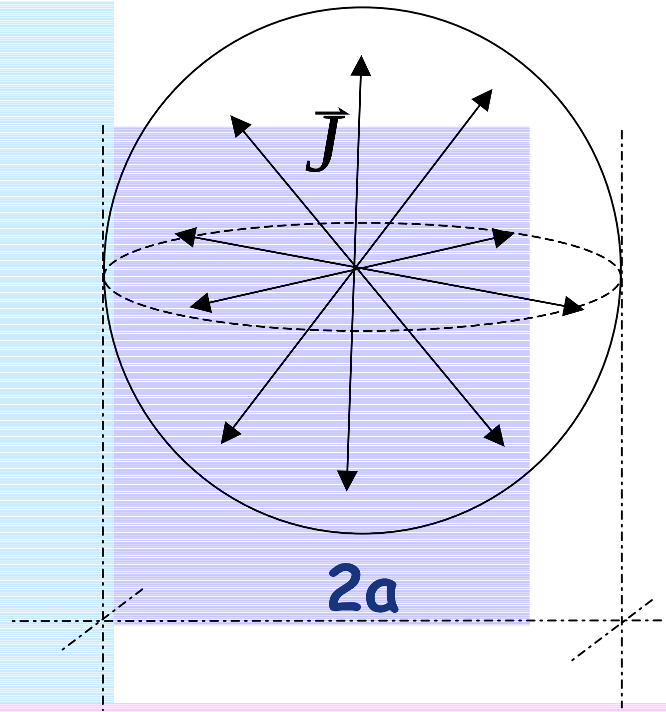
$$\boxed{\Rightarrow \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}) = 0}$$

Ecuación de continuidad

Ecuación de Continuidad

EJEMPLO

Calcular corriente total saliendo del círculo de radio a si $\vec{J} = J_0 \vec{r}$



$$I = \iint_S J_0 a \hat{r} \bullet d\vec{s}$$

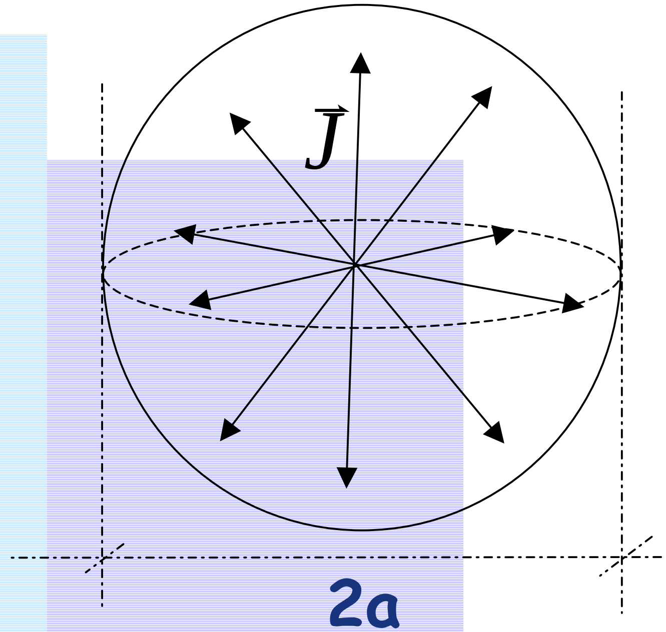
$$I = 4\pi a^2 J_0 a$$

$$I = 4\pi a^3 J_0$$

Ecuación de Continuidad

EJEMPLO: Si se tiene una densidad ed corriente

$$\vec{J} = J_0 \vec{r}$$



Calcular densidad de carga en volumen

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla \bullet \vec{J} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 J_0 r \hat{r}\right) = \frac{1}{r^2} J_0 3r^2 = 3J_0$$

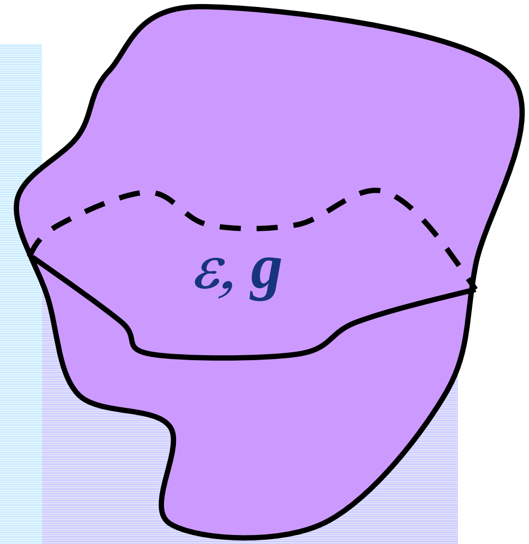
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}) = -3J_0 \quad \Rightarrow \quad \rho(\vec{r},t) = -3J_0 t + \rho_0(\vec{r})$$

Ecuación de Continuidad en Medios materiales

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{J} = g\,\vec{E} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = g \nabla \cdot \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \frac{g}{\varepsilon}\nabla \cdot \vec{D} = \frac{g}{\varepsilon}\rho(t)$$



volumen Ω

$$\boxed{\frac{g}{\varepsilon}\rho(t) + \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho(t) = \rho_0 e^{-t/T_R}}$$

$T_R = \varepsilon / g$ ***Constante de relajación***

Ecuación de Continuidad en Medios materiales

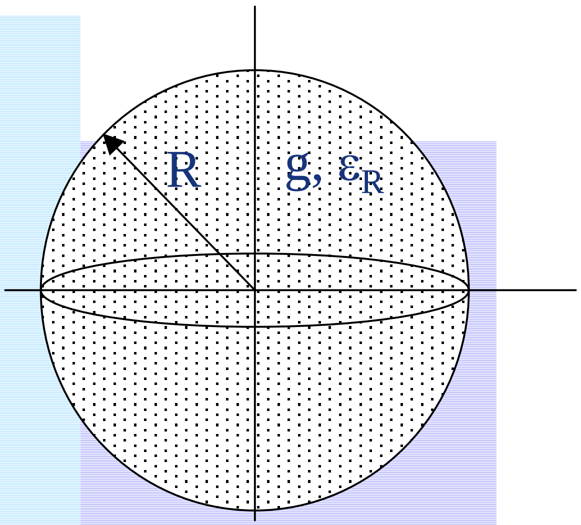
EJEMPLO

$$\frac{g}{\varepsilon}\rho(t)+\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}=0$$

$$\Rightarrow \iiint_V\left(\frac{g}{\varepsilon}\rho(t)+\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}\right)dV=0$$

$$\Rightarrow \frac{g}{\varepsilon}\underbrace{\iiint_V\rho(t)dV}_{Q(t)}+\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\iiint_V\rho(t)dV}_{Q(t)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{g}{\varepsilon}Q(t)+\frac{\partial Q(t)}{\partial t}=0\Rightarrow Q(t)=Q_0e^{-t/T_R}$$



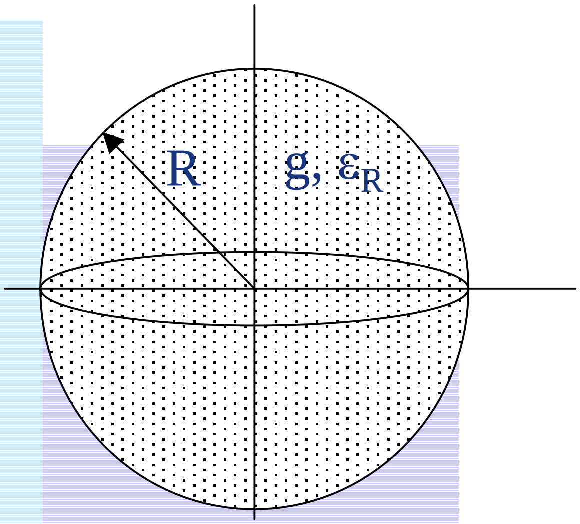
Q_0 inicial

Ecuación de Continuidad en Medios materiales

EJEMPLO

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/T_R}$$

	cobre	Cuarzo fusionado
T_R	$1.53\times10^{-19}\,seg$	51.2 días

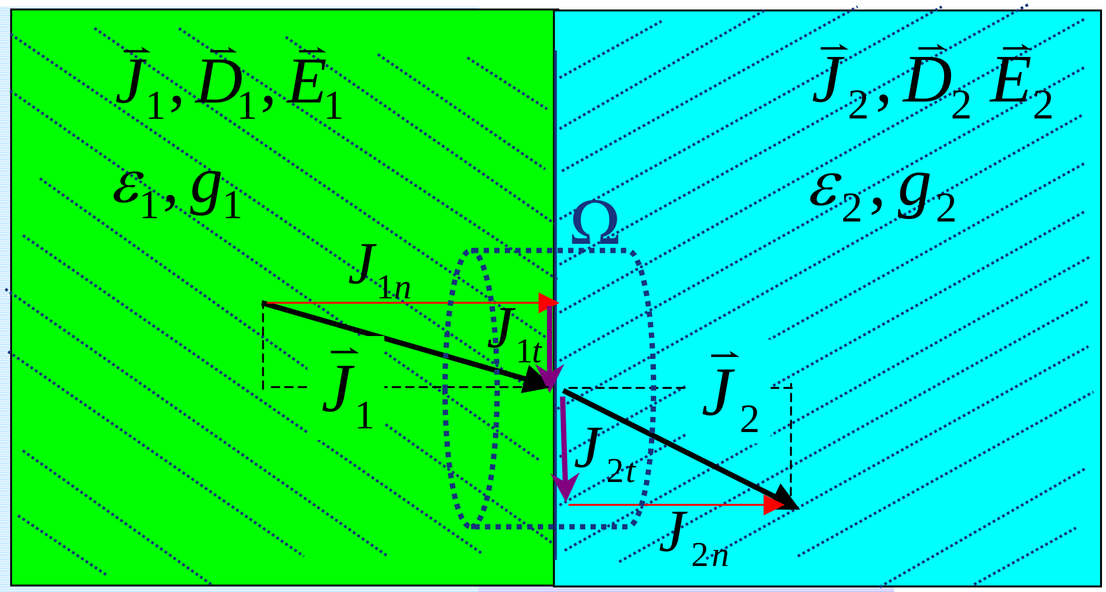


Q_0 inicial

Condiciones de Borde para $\vec{J}$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \boxed{\frac{J_{1t}}{g_1} = \frac{J_{2t}}{g_2}}$$



$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

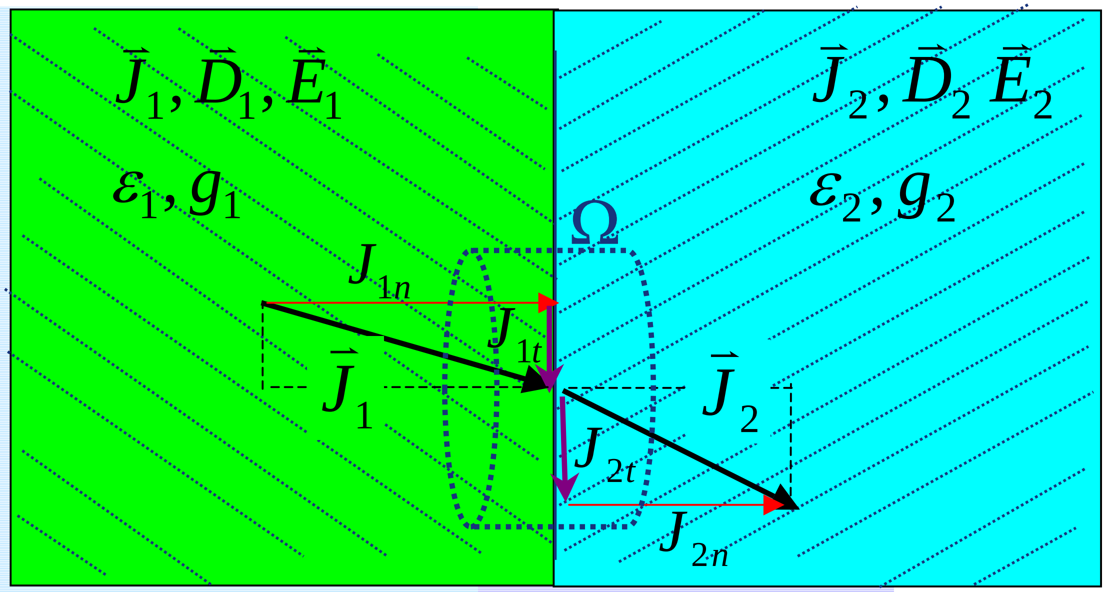
$$D_{1N} - D_{2N} = \sigma_{libre}$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma_l \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_1 \frac{J_{1n}}{g_1} - \varepsilon_2 \frac{J_{2n}}{g_2} = \sigma_l}$$

Condiciones de Borde para $\vec{J}$

$$\frac{J_{1t}}{g_1} = \frac{J_{2t}}{g_2}$$

$$\varepsilon_1 \frac{J_{1n}}{g_1} - \varepsilon_2 \frac{J_{2n}}{g_2} = \sigma_l$$



I. Situación Estacionaria $\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

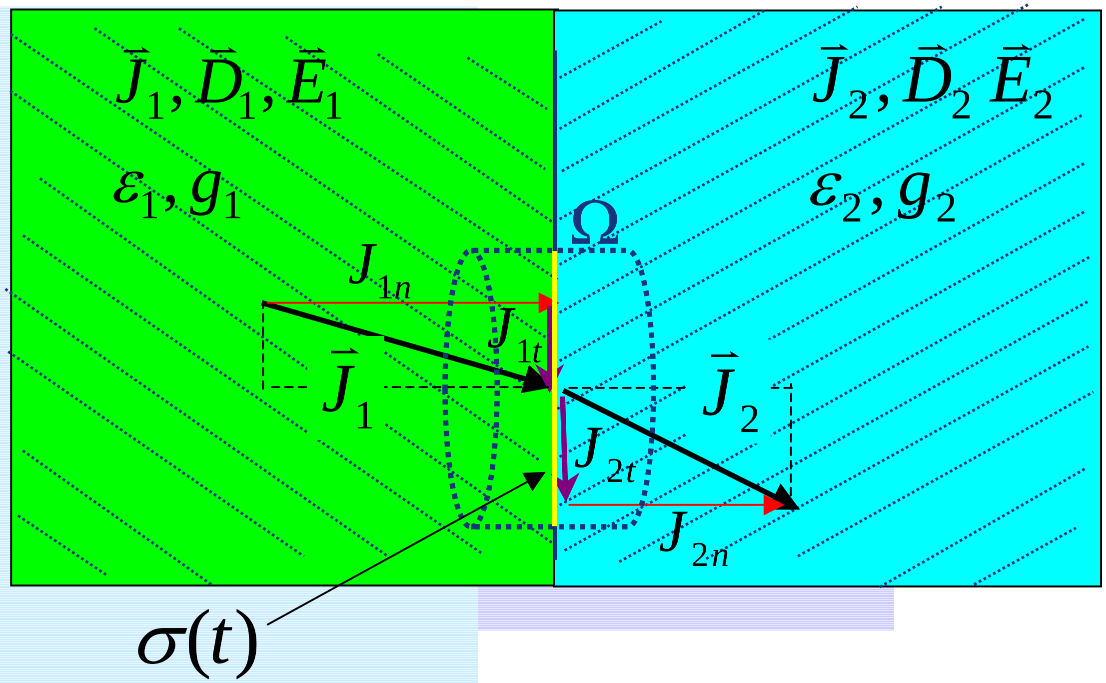
$$\oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \bullet d\vec{s} = 0 \Rightarrow \boxed{J_{1n} = J_{2n}}$$

Condiciones de Borde para $\vec{J}$

II. Situación transitoria

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} \neq 0$$

$$\oiint_{S(\Omega)} \vec{J}\cdot d\vec{S} = J_{2n}\Delta S - J_{1n}\Delta S$$



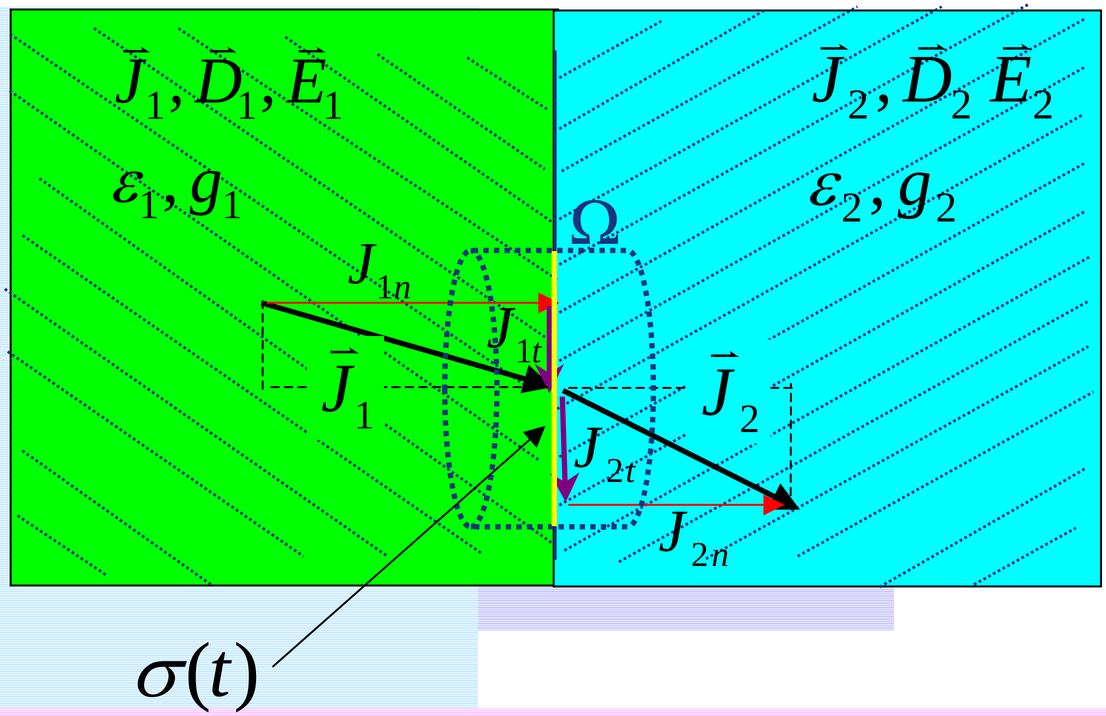
Haciendo tender la altura del cilindro a cero $\frac{\partial Q}{\partial t}$ se acumula sólo en la superficie que limita los medios

Condiciones de Borde para $\vec{J}$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\sigma \cdot \Delta S)$$

$$\Rightarrow J_{2n}\Delta S - J_{1n}\Delta S + \frac{\partial \sigma}{\partial t}\Delta S = 0$$

$$\Rightarrow J_{2n} - J_{1n} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$



$$\therefore \quad J_{2n} - J_{1n} = \frac{\partial \sigma(t)}{\partial t}$$