Escuela de
Ingeniería
Universidad
de Chile

FI33A ELECTROMAGNETISMO
Clase 10
Conductores en Electrostática-II

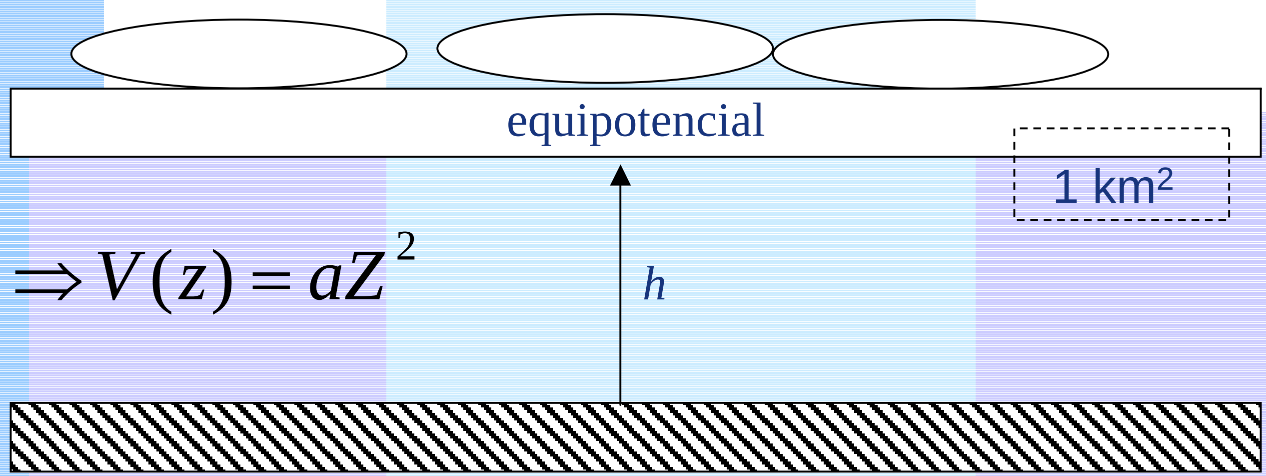
LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

- Revisión Control 1
- Modelo de conductores y propiedades
- Condensador
- Ejemplo
- Energía Electrostática
- Energía sistema de conductores
- Caso condensadores
- Fuerza eléctrica y energía

Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

Revisión Control 1



$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow V(z) = aZ^2$$

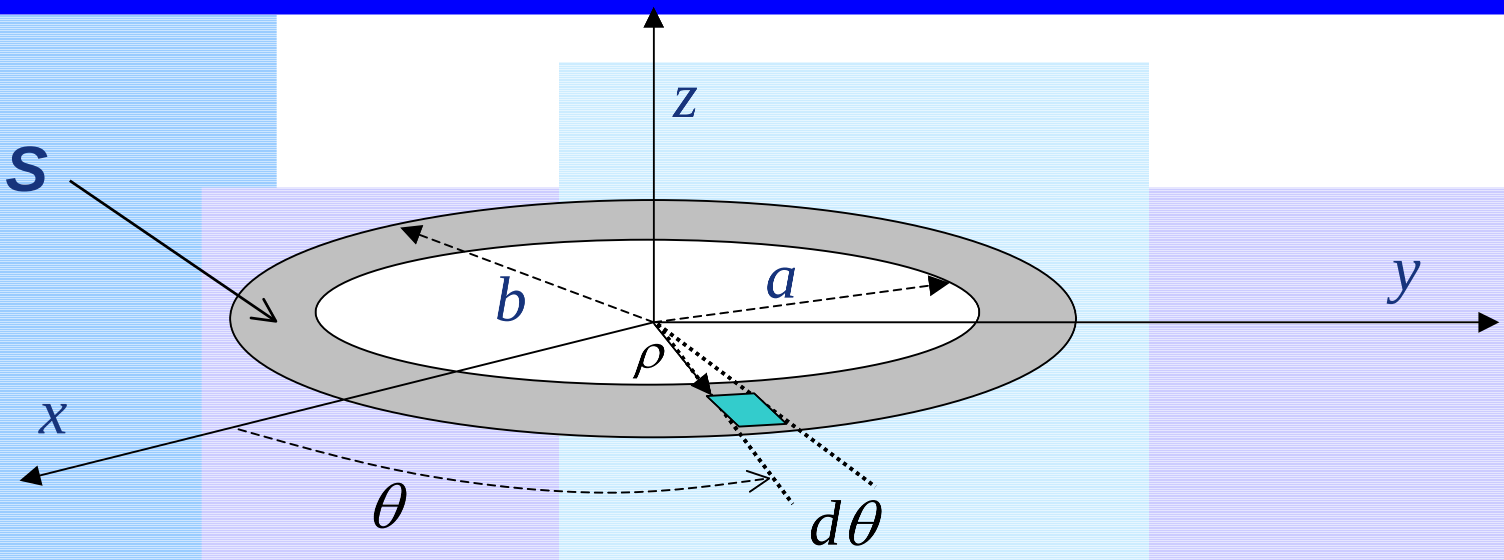
Condiciones de Borde

$$\left.\begin{array}{l} V(z=0)=0 \quad y \\ \\ V(z=1)=5 \end{array}\right\} \therefore V(z)=5z^2$$

a) $\vec{E} = -\nabla V = -\dfrac{\partial V}{\partial z}\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -10z\hat{k}$

b) $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = -10\varepsilon z\hat{k}$

Revisión Control 1



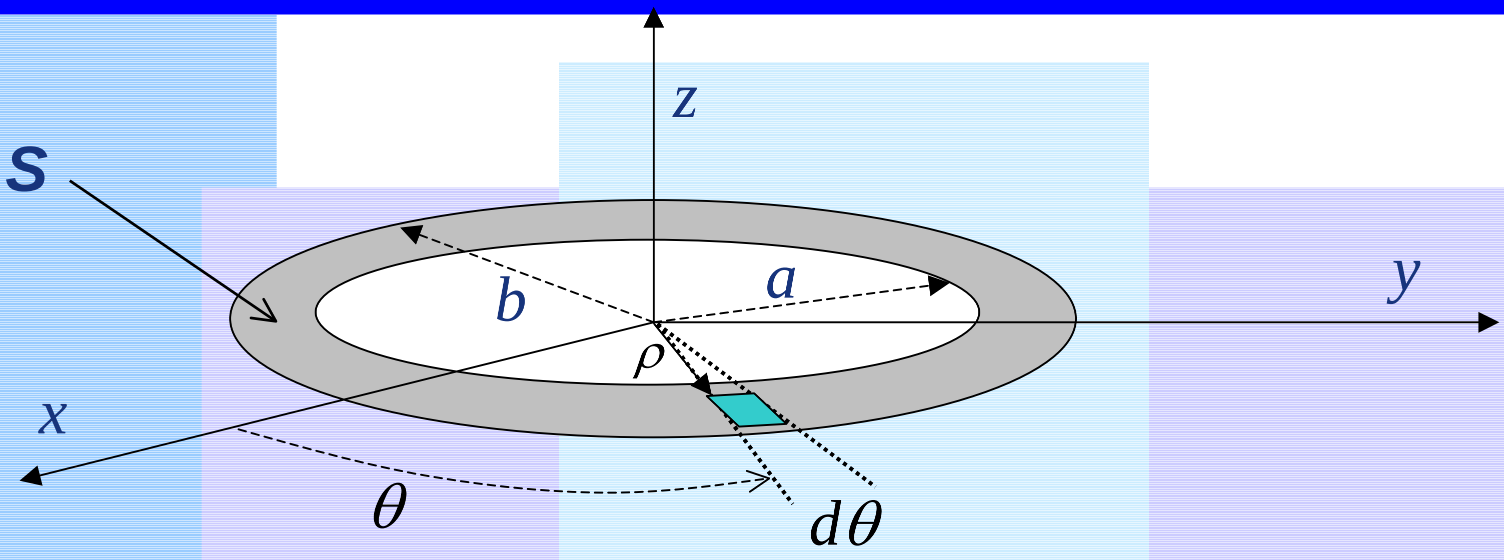
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$$

$$\vec{r} = z\hat{k} \qquad \vec{r}\,' = \rho\cos\theta\hat{i} + \rho\sin\theta\,\hat{j}$$

$$dq = \sigma ds = \sigma_0 \rho d\theta d\rho$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_0 \rho\, d\theta\, d\rho(-\rho\cos\theta\hat{i} - \rho\sin\theta\,\hat{j} + z\hat{k})}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Revisión Control 1



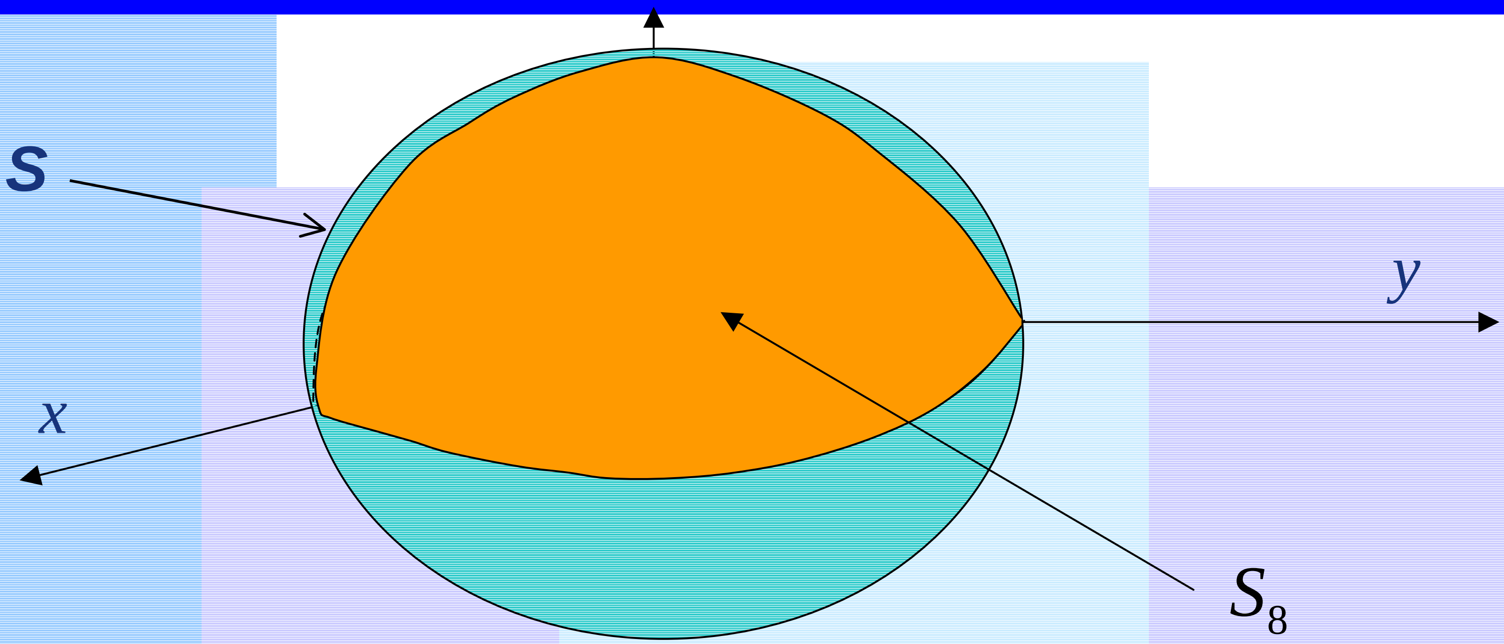
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{dq(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|^3}$$

$$\vec{r} = z\hat{k} \qquad \vec{r}\,' = \rho\cos\theta\,\hat{i} + \rho\sin\theta\,\hat{j}$$

$$dq = \sigma\, ds = \sigma_0 \rho\, d\theta\, d\rho$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma_0 \rho\, d\theta\, d\rho\,(\cancel{-\rho\cos\theta\,\hat{i}} \cancel{-\rho\sin\theta\,\hat{j}} + z\hat{k})}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

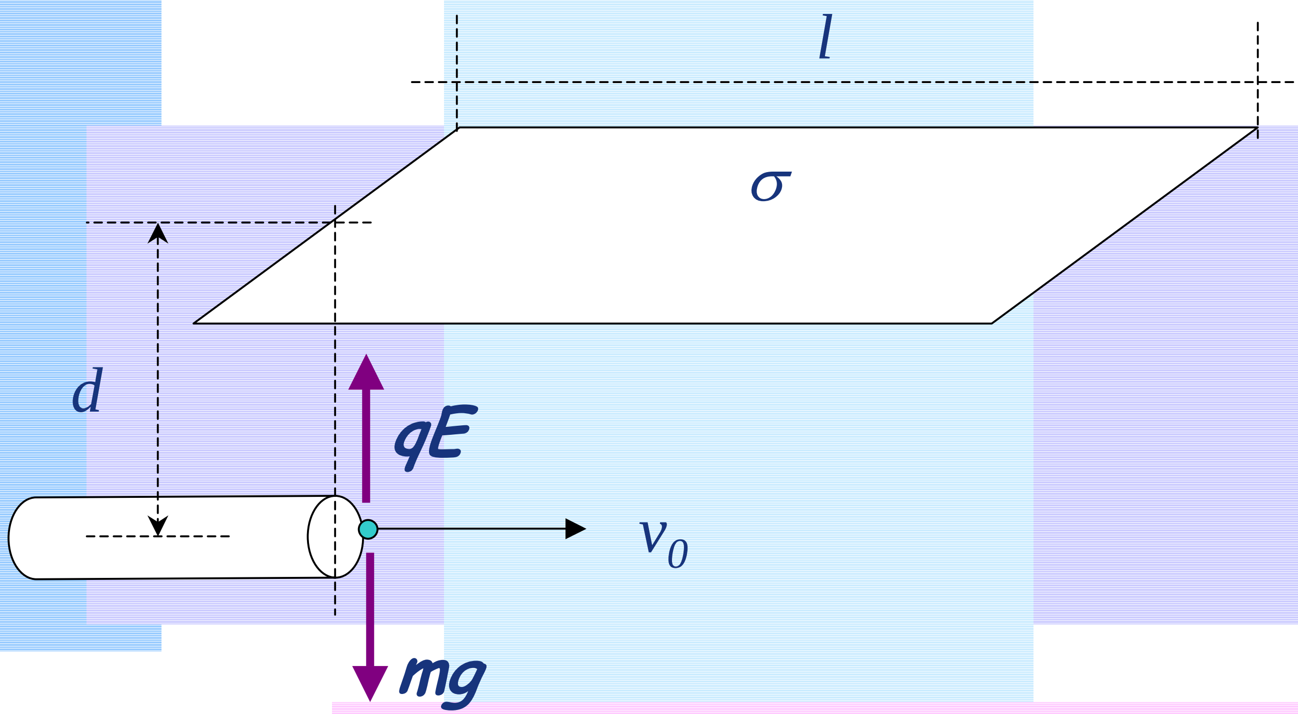
Revisión Control 1



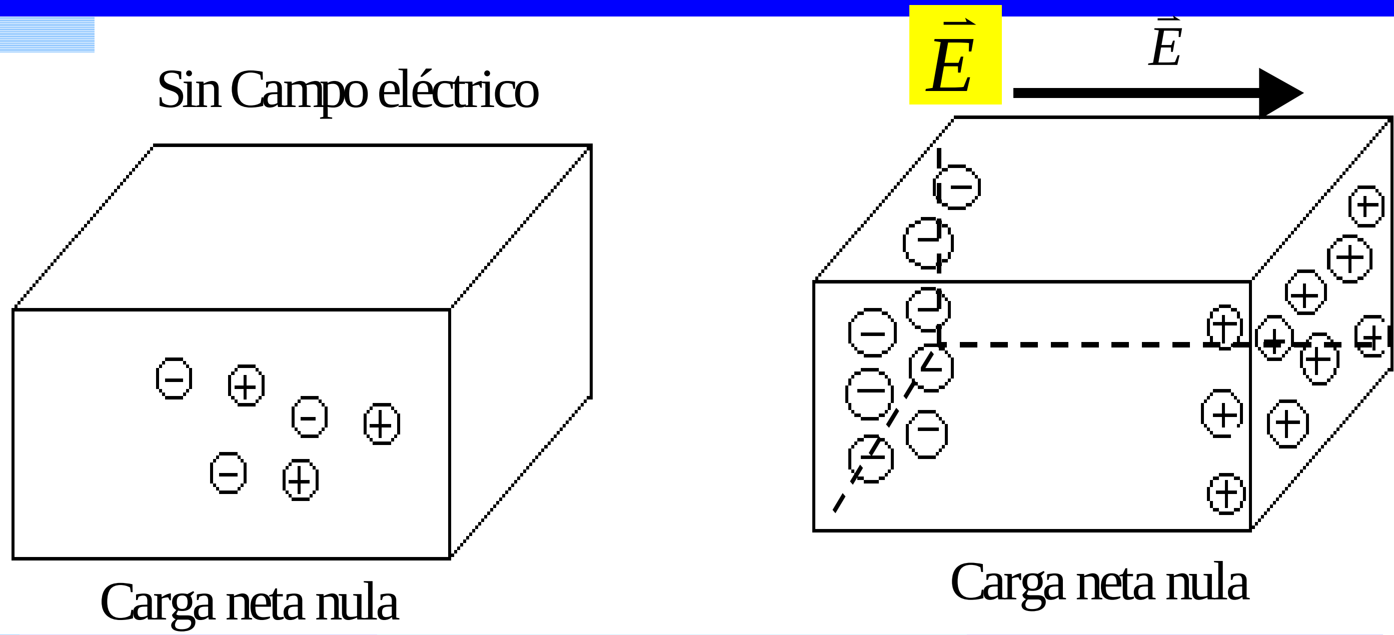
$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = 8\iint_{s_8} \vec{E} \bullet d\vec{s} \\ \displaystyle Q = \iint_{\Lambda} \sigma ds = \pi(b^2 - a^2)\sigma_0 \end{array}\right\} \iint_{s_8} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\pi(b^2 - a^2)\sigma_0}{8\varepsilon_0}$$

Revisión Control 1



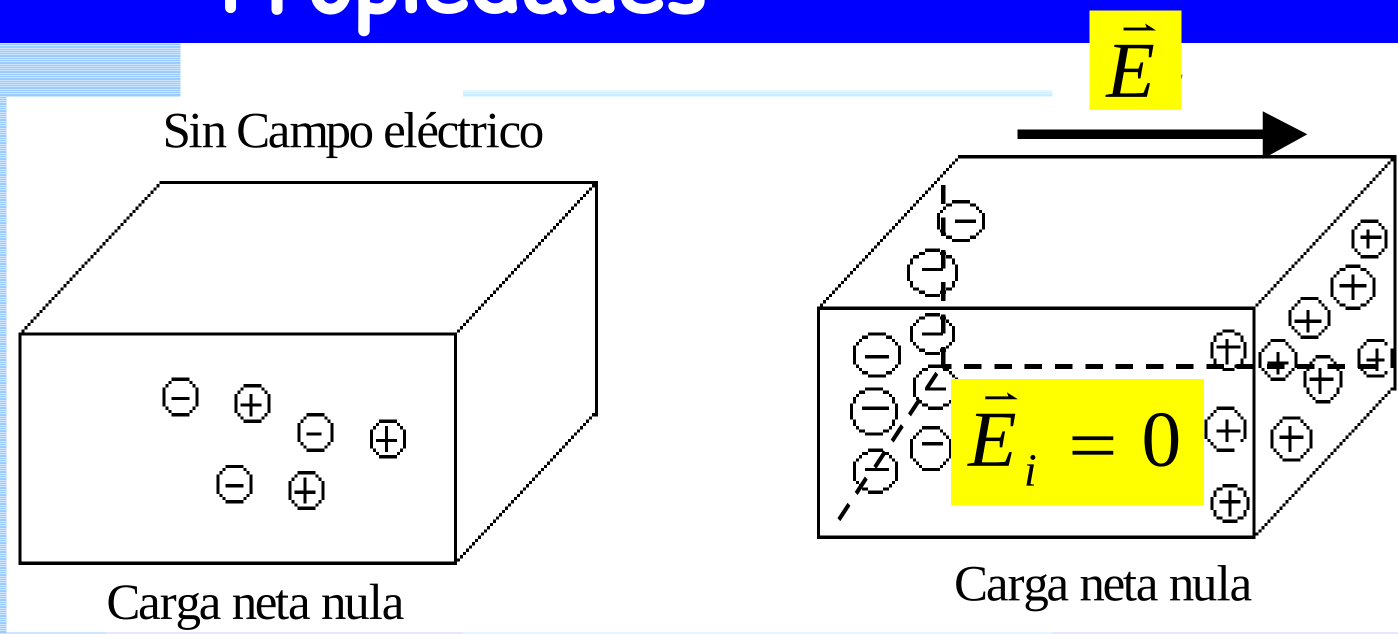
Modelo Básico de Conductores



- Abundantes cargas positivas y negativas
- Pueden moverse libremente en presencia de un campo eléctrico

Estado de Equilibrio ⇒ **Campo eléctrico nulo en el interior**

Propiedades



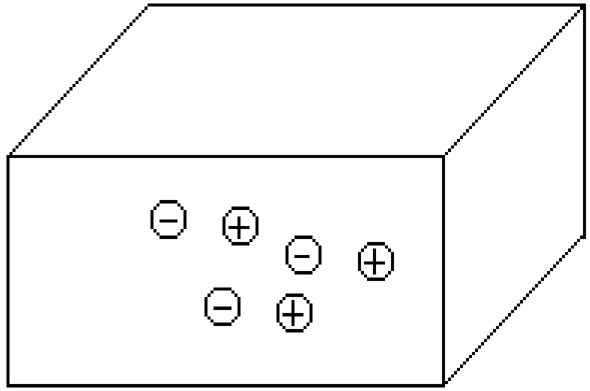
1. La carga sólo se redistribuye en la superficie

Estado de Equilibrio dentro del conductor

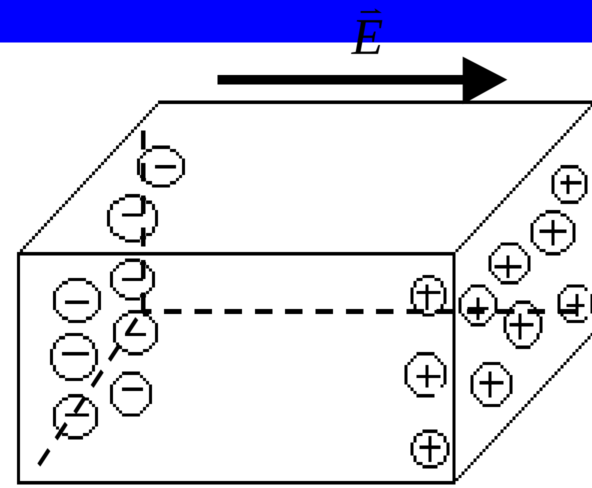
$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho_l = 0$$

Propiedades

Sin Campo eléctrico



Carga neta nula



Carga neta nula

2. Toda la superficie del conductor es una superficie equipotencial

Estado de Equilibrio dentro del conductor

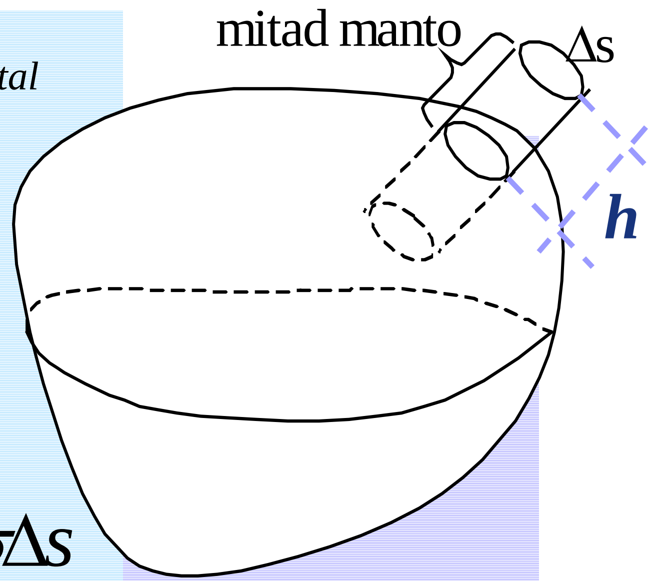
$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

No existe diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera al interior del conductor

Propiedades

Conductor en estado de Equilibrio $\vec{E}=0$

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{Total}$$



$$\Rightarrow D_{\text{int.}} = 0$$

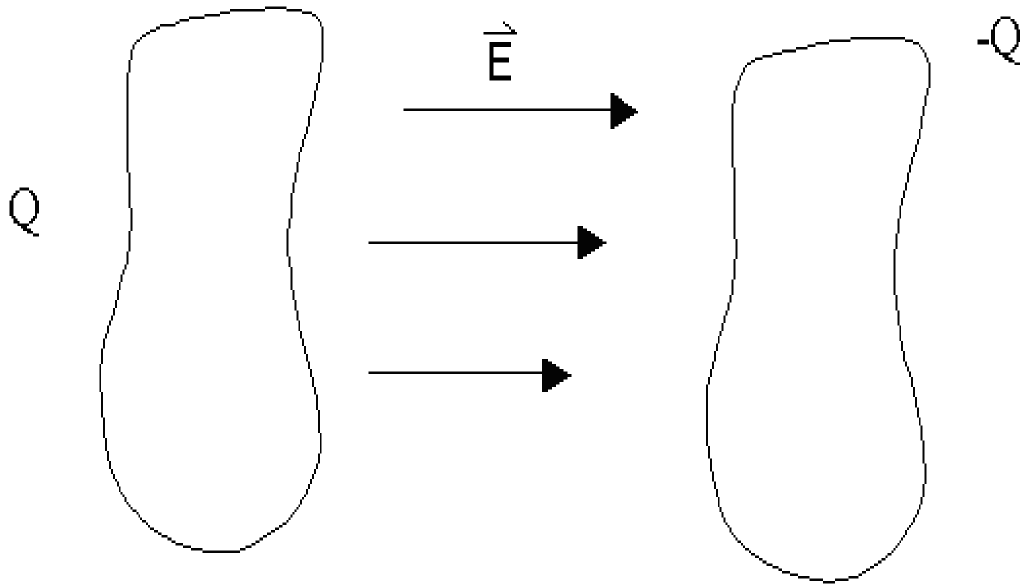
$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iint_{\substack{mitad\\manto}} D\cdot dS + \iint_{\substack{tapa\\exterior}} \vec{D}\cdot dS$$

$$h \to 0 \Rightarrow \oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = D_n \Delta s \;\Rightarrow D_n \Delta s = \sigma \Delta s$$

3. El campo eléctrico inmediatamente afuera del conductor es normal a la superficie del conductor (sino la carga se movería)

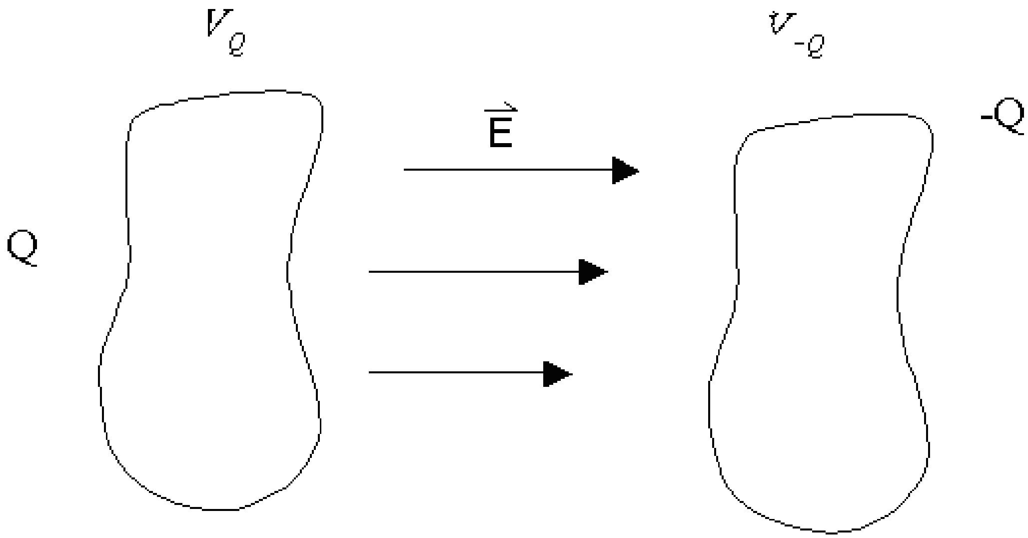
$$D_n = \varepsilon_0 E_n \;\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

Condensadores



Sistema de dos conductores en donde la carga de uno de ellos es de igual magnitud pero de signo contrario al otro.

Condensadores



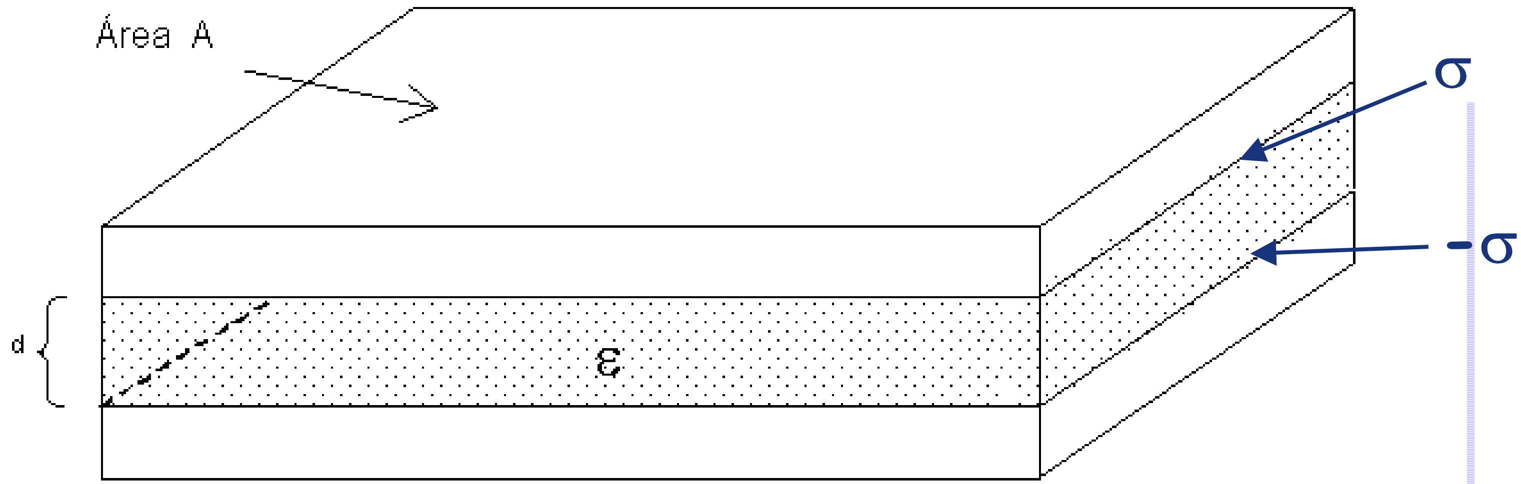
$$V_Q > V_{-Q}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V_Q - V_{-Q}} > 0$$

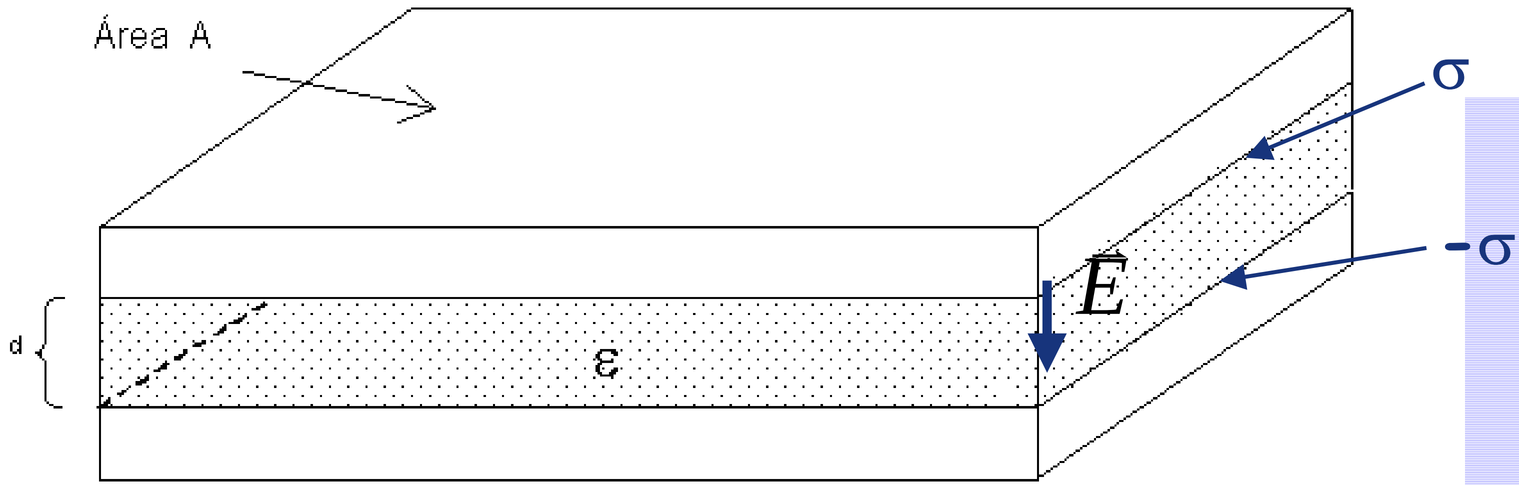
Se caracteriza a través de su capacidad C

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V}$$

Ejemplo

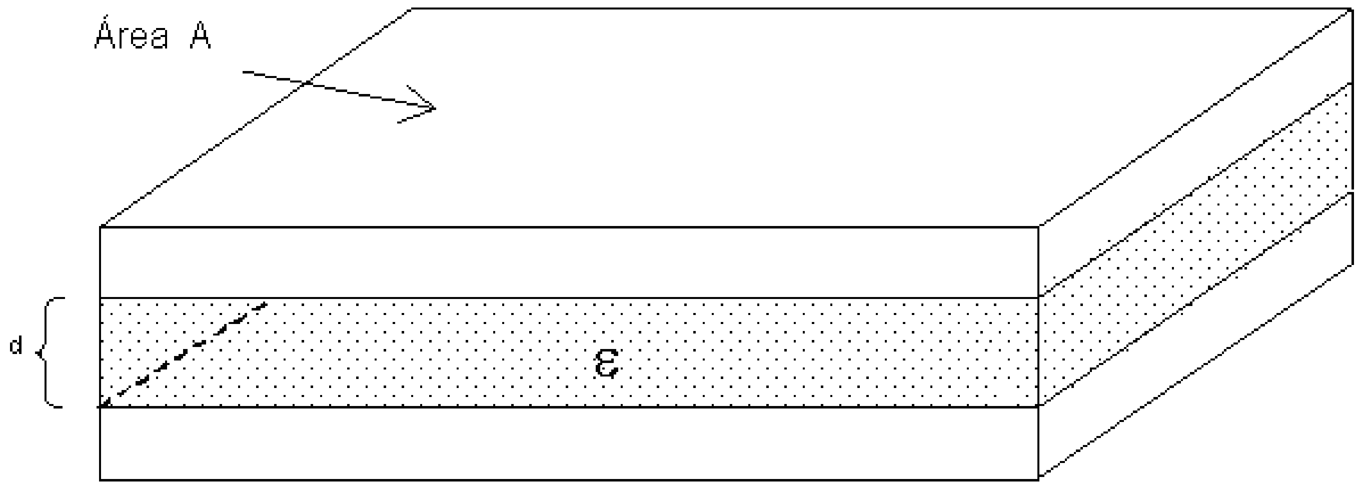


Ejemplo



$$\vec{D} = -\sigma\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{k} \Rightarrow \quad -\int_{-d}^{0}\vec{E}\bullet d\vec{l} = V_{\sigma} - V_{-\sigma} \quad \Rightarrow \overbrace{V_{\sigma} - V_{-\sigma}}^{\Delta V} = \frac{\sigma}{\varepsilon}d$$

Ejemplo



$$Q=\sigma A \;\; y \;\; \Delta V=\frac{\sigma}{\varepsilon}d, \quad luego \quad C=\frac{\sigma A}{\frac{d}{\sigma\frac{}{\varepsilon}}}\Rightarrow C=\varepsilon\frac{A}{d}$$

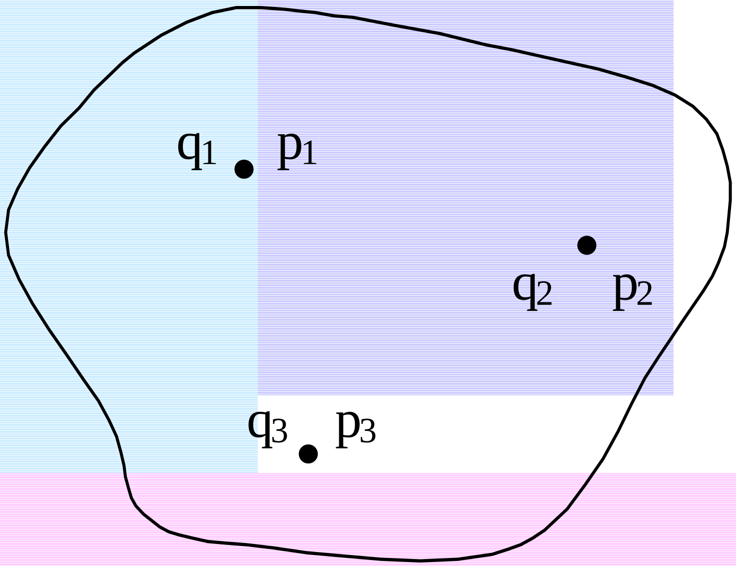
- Menor d $\Rightarrow$ mayor C,
- Mayor A $\Rightarrow$ mayor C,

Mayor ε $\Rightarrow$ mayor C,

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

La energía electrostática de un sistema de partículas es el trabajo necesario para formar dicho sistema $\Rightarrow$ *W=U.*

Caso sistema de 3 cargas



ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Para la primera carga no es necesario realizar trabajo

$$W_1 = 0$$

$q_1 \bullet p_1$

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Para la Segunda carga

$$W_2 = q_2 V_{21}$$

q_1 • p_1

•
q_2 p_2

V_{21} es el potencial producido por la carga 1 en la posición P_2

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Para traer la 3ª carga

$$W_3 = q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$

q_1 P_1

q_2 P_2

q_3 P_3

V_{31} es el potencial producido por la carga 1 en la posición P_3

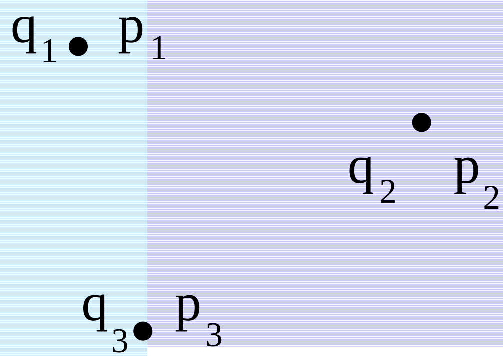
V_{32} es el potencial producido por la carga 2 en la posición P_3

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Luego el trabajo total es

$$W = 0 + W_2 + W_3 = q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$



ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Si invertimos el orden, primero traemos la carga 3, luego la 2 y finalmente la 1 se tiene:

$$W' = \underbrace{0}_{\text{Trabajo carga 3}} + \underbrace{q_2 V_{23}}_{\text{Trabajo carga 2}} + \underbrace{q_1 V_{13} + q_1 V_{12}}_{\text{Trabajo carga 1}}$$

q_1 • P_1

• q_2 P_2

q_3 • P_3

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

$$W = q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$

y

$$W' = 0 + q_2 V_{23} + q_1 V_{13} + q_1 V_{12}$$

Trabajo es el mismo independiente del orden, luego

$$W' = W$$

$q_1 \bullet$ p_1

$\bullet$ q_2 p_2

$q_3 \bullet$ p_3

Sumando

$$\Rightarrow 2W = q_1 \underbrace{(V_{13} + V_{12})}_{potencial\ en\ 1} + q_2 \underbrace{(V_{21} + V_{23})}_{potencial\ en\ 2} + q_3 \underbrace{(V_{31} + V_{32})}_{potencial\ en\ 3}$$

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3\right)$$

Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Para un sistema de n cargas se obtiene

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Q_k V_k \qquad \text{en [J] joules}$$

para distribuciones continuas de carga se tiene
$\sum \rightarrow \int$ y $q \rightarrow dq$, con ello

$$W = \frac{1}{2}\int V(\vec{r})\,dq \qquad \text{en [J] joules}$$

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Para un sistema de n cargas se obtiene

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Q_k V_k$$ en [J] joules

para distribuciones continuas de carga se tiene $\sum \to \int$ y $q \to dq$, con ello

$$W = \frac{1}{2}\int V(\vec{r})\,dq$$ en [J] joules

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Para una distribución específica de carga tendremos

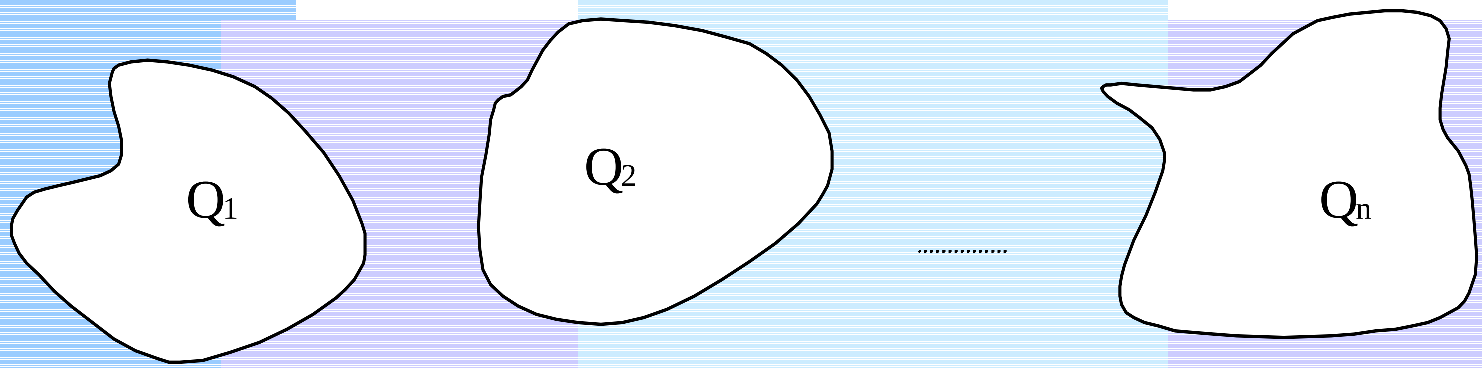
$$W = \frac{1}{2}\int \lambda(\vec{r})V(\vec{r})dr$$

$$W = \frac{1}{2}\iint \sigma(\vec{r})V(\vec{r})dS$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega} \rho(\vec{r})V(\vec{r})dv$$

Energía de un Sistema de Conductores

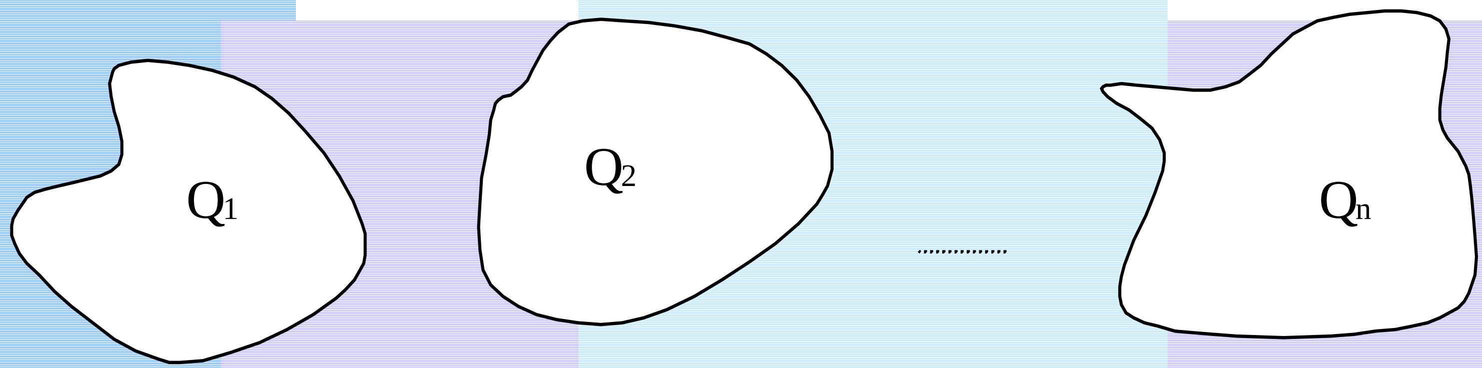
Consideremos n conductores cargados



¿Cuánta energía se gastó en formar este sistema?

Energía de un Sistema de Conductores

Solo hay carga en las superficies

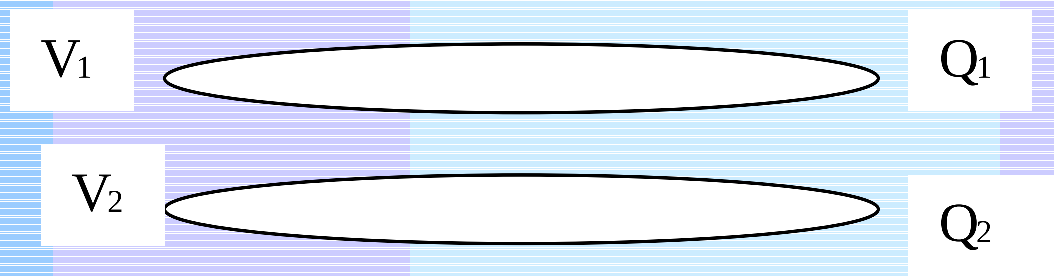


$$W = \frac{1}{2}V_1 \underbrace{\iint_{S_1} \sigma_1(\vec{r})dS}_{Q_1} + \frac{1}{2}V_2 \underbrace{\iint_{S_2} \sigma_2(\vec{r})dS}_{Q_2} + \ldots + \frac{1}{2}V_n \underbrace{\iint_{S_n} \sigma_n(\vec{r})dS}_{Q_n}$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}\sum V_i Q_i$$

Caso condensadores

Cada condensador tiene igual carga y de signo contrario



$$W=\frac{1}{2}\sum V_i Q_i \quad \Rightarrow \quad W=\frac{1}{2}(V_1Q_1+V_2Q_2)\Rightarrow$$

$$Q_2=-Q_1\Rightarrow W=\frac{1}{2}(V_1-V_2)Q_1$$

pero $Q=C\Delta V$

$$\Rightarrow W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

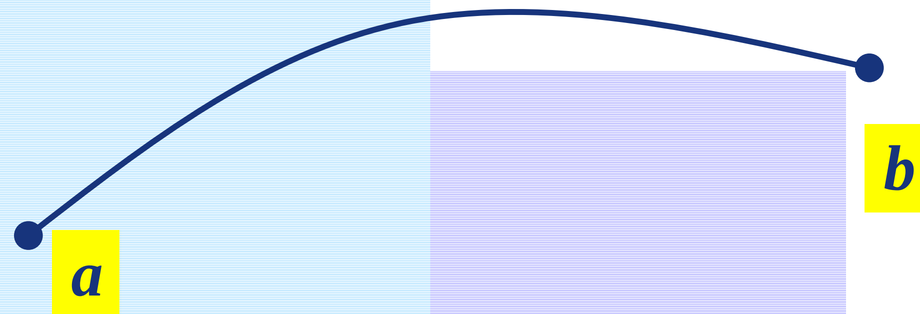
ó

$$W=\frac{1}{2}C(\Delta V)^2$$

Fuerza Eléctrica y Energía

Trabajo entre dos puntos

$$W = -\int_a^b \vec{F} \bullet d\vec{l}$$



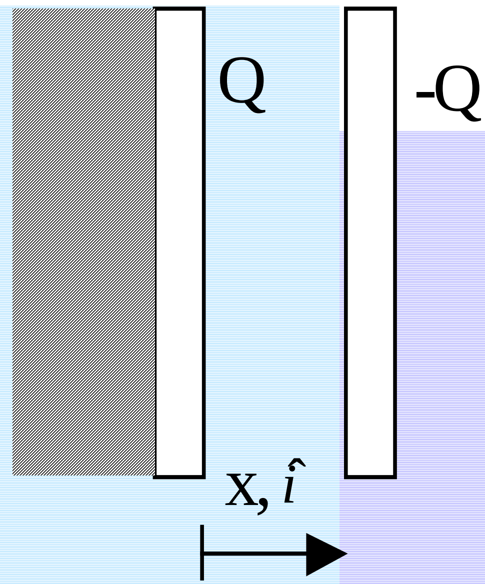
$$\Rightarrow \quad \vec{F} = -\nabla W$$

Y el trabajo es igual al cambio de la energía eléctrica del sistema

Fuerza Eléctrica y Energía

Ejemplo: Condensador de placas planas

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$



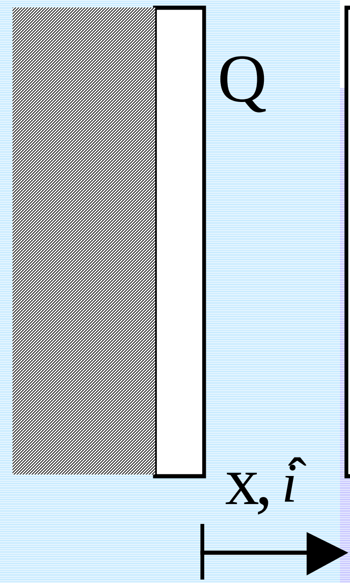
Al producirse el movimiento de atracción, la carga neta se mantiene constante (Q=constante)

Fuerza Eléctrica y Energía

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

La capacidad es función de la distancia x

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{x}$$



$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} x$$

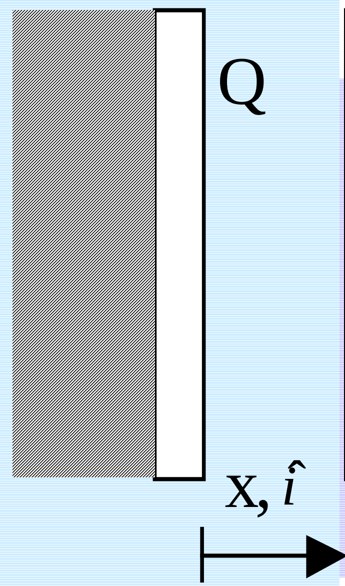
$$\vec{F} = -\frac{\partial W}{\partial x}\hat{x} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}\hat{x}$$

Fuerza Eléctrica y Energía

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

La capaciadad es función de la distancia x

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{x}$$



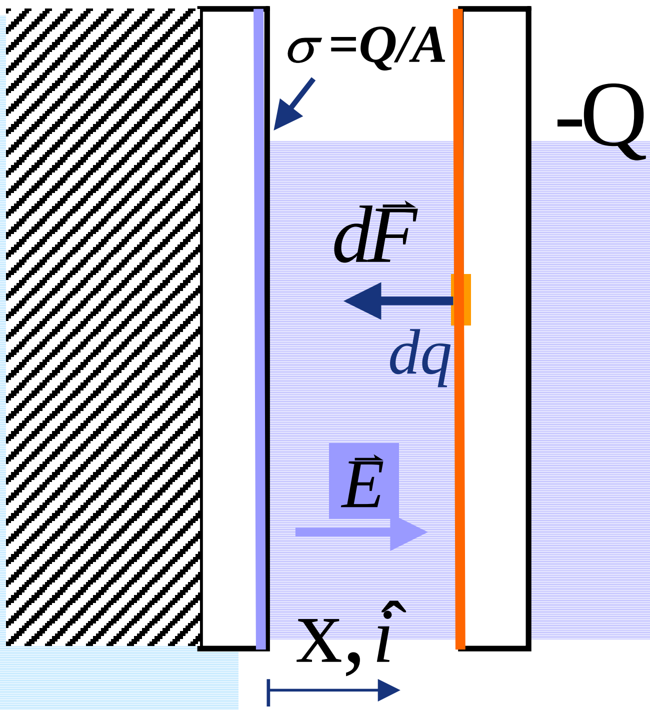
$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} x$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial W}{\partial x}\hat{x} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}\hat{x}$$

Fuerza Eléctrica y Energía

Método alternativo

Fuerza producida por el campo de una placa sobre las cargas de la otra

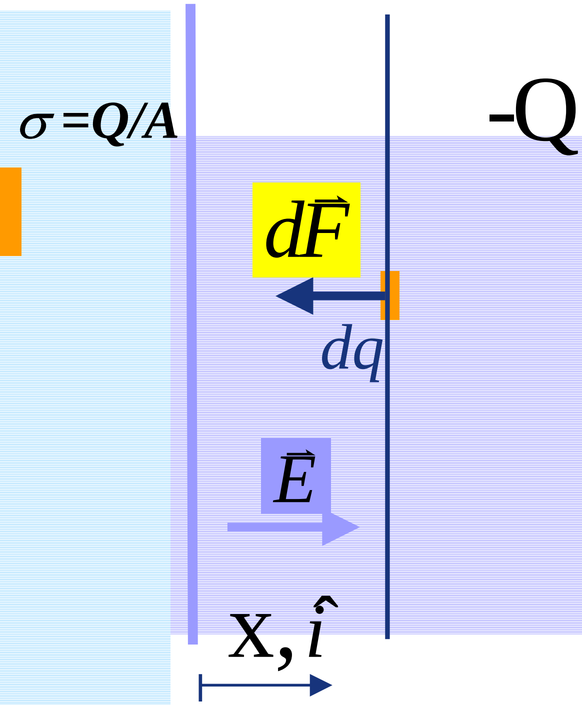


Fuerza Eléctrica y Energía

Método alternativo

Campo producido por placa con Q

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}$$



Fuerza sobre elemento *dq* de otra placa con -Q

$$d\vec{F} = \vec{E}dq$$

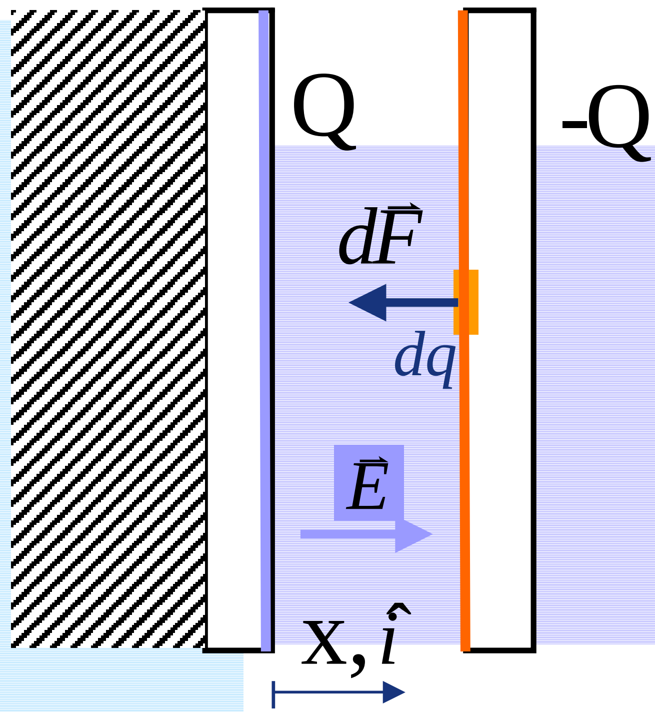
Fuerza Eléctrica y Energía

Método alternativo

Campo entre las placas

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}$$

$$d\vec{F} = \vec{E}dq$$



$$\vec{F} = \iint_A d\vec{F} = \iint_A \vec{E}dq = \iint_A \vec{E}(-\sigma)ds$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\iint_A \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}\sigma ds = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}A\hat{i} \qquad \Rightarrow \vec{F} = -\frac{(\sigma A)^2}{2\varepsilon_0 A}\hat{i}$$

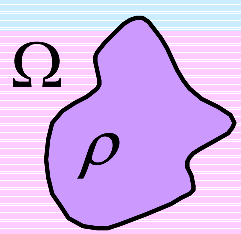
$$\boxed{\therefore \vec{F} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\hat{i}}$$

Energía en términos de Campos

Habíamos visto que en distribuciones de carga en volumen

$$W = U = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega} \rho(\vec{r})V(\vec{r})dv$$

pero $\nabla \bullet \vec{D} = \rho(\vec{r})$ $\quad \Rightarrow U = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}(\nabla \cdot \vec{D})Vdv$



Energía en términos de Campos

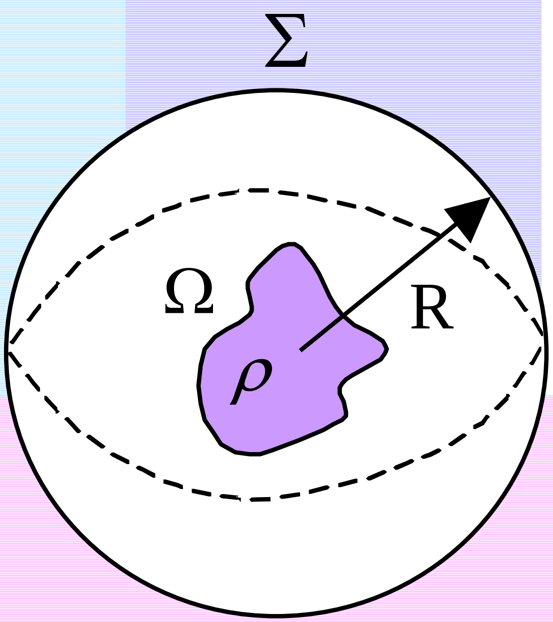
ρ será nulo en todo punto fuera del volumen Ω, luego podemos extender el espacio de integración a un espacio mayor, por ejemplo una esfera Σ de radio R

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma}\left(\nabla \cdot \vec{D}\right)V dv$$

y usando

$$\nabla \cdot f\vec{A} = \vec{A} \cdot \nabla f + f\left(\nabla \cdot \vec{A}\right)$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma}\nabla \cdot \left[V\vec{D}\right]dv - \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma}\vec{D} \cdot \left(\nabla V\right)dv$$

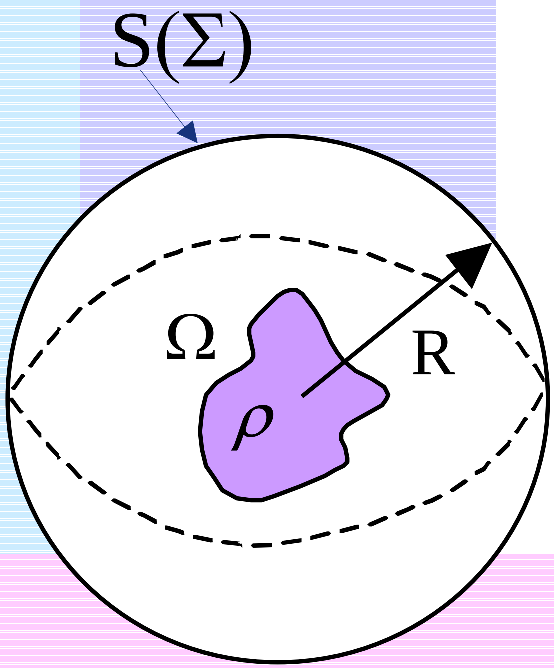


Energía en términos de Campos

Aplicando el teorema de la divergencia

$$\iiint_{\Sigma} \nabla \cdot \left[V\vec{D}\right] dv = \oiint_{S(\Sigma)} V\vec{D} \bullet d\vec{s}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}\oiint_{S(\Sigma)} V\vec{D}\cdot d\vec{s} - \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot(\nabla V)\,dv$$



pero $V \propto \frac{1}{r}$ **y** $\vec{D} \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow V\vec{D} \propto \frac{1}{r^3}$

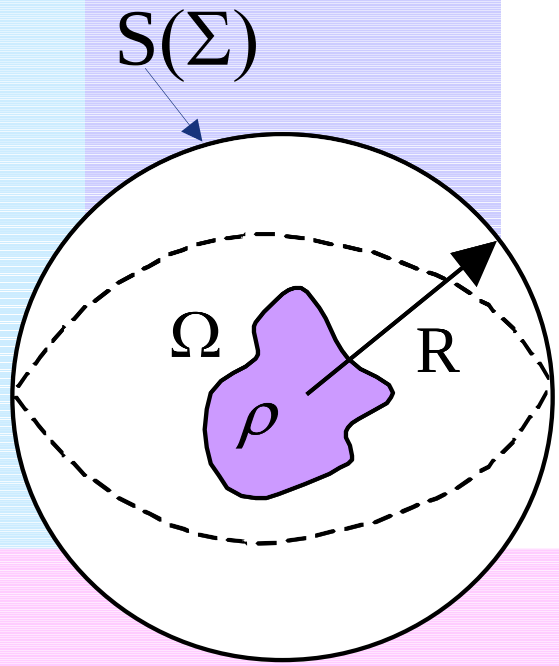
si R→∞ $\oiint_{S(\Sigma)} V\vec{D}\cdot d\vec{s} \rightarrow 0 \Rightarrow U = -\frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot(\nabla V)\,dv$

Energía en términos de Campos

$$\Rightarrow U = -\frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot(\nabla V)\,dv$$

Aplicando $\nabla V = -\vec{E}$

$$\therefore U = \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot\vec{E}\,dv$$



Aquí Σ es todo el espacio

$$W_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$

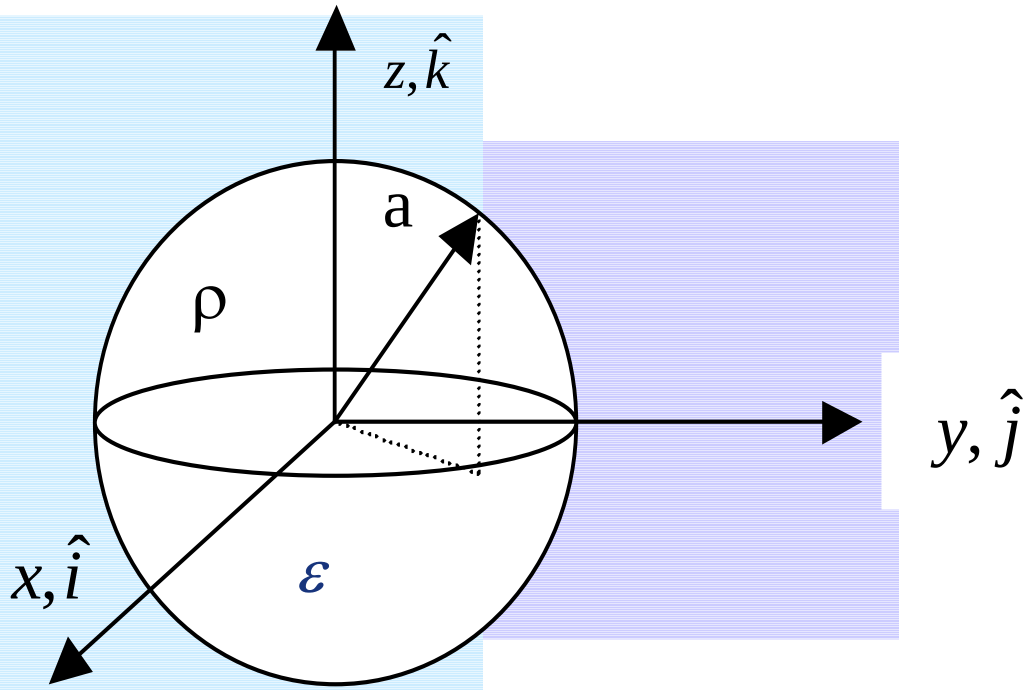
es la densidad de energía electrostática

Fuerza Eléctrica y Energía

Ejemplo

Esfera dieléctrica cargada con densidad ρ.

Si $\rho = \rho_0$ es constante se pide calcular la energía electrostática del sistema



Fuerza Eléctrica y Energía

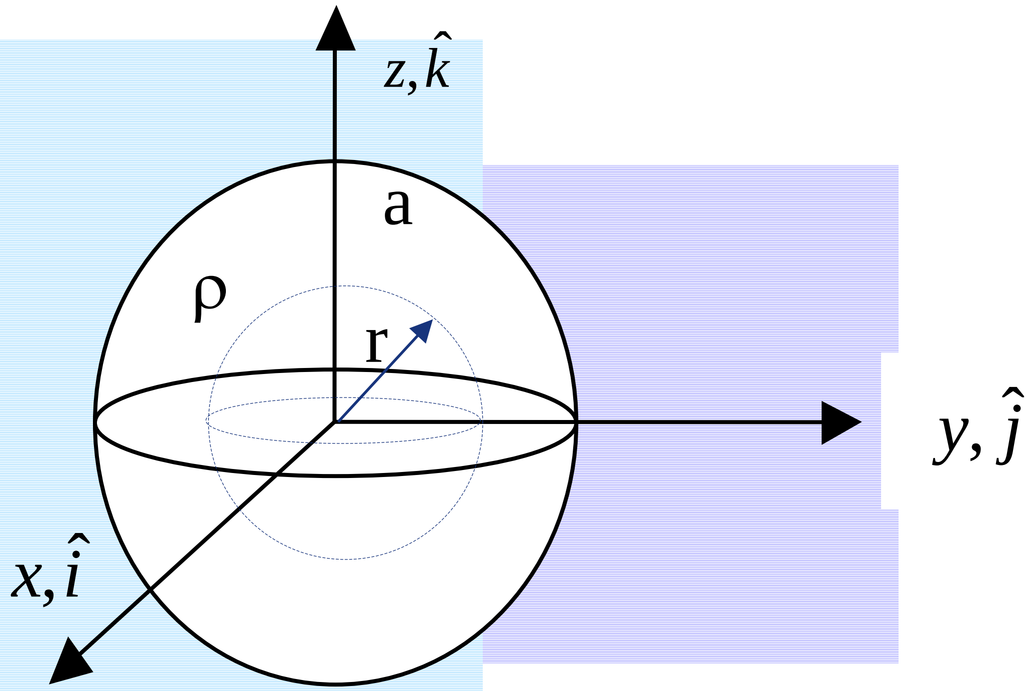
Ejemplo

Para r < a

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{total}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_0}{3} r\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon} r\hat{r}$$



Fuerza Eléctrica y Energía

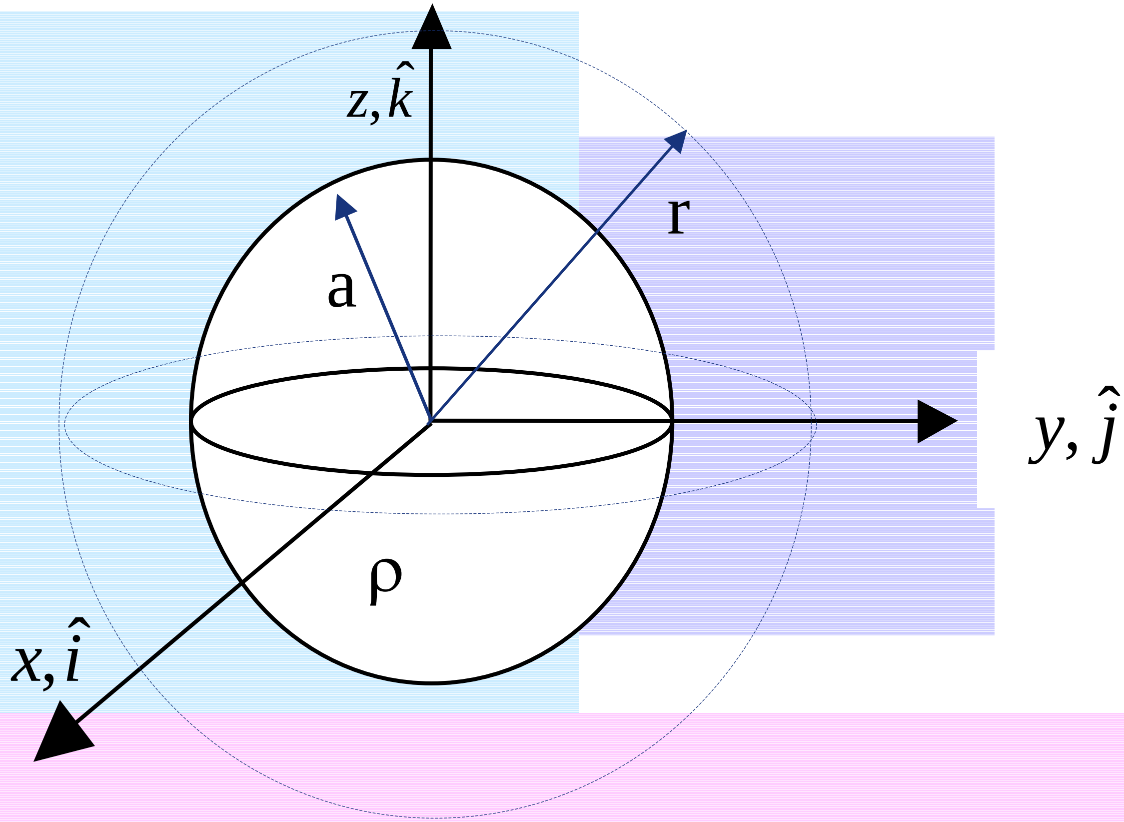
Ejemplo

Para r ≥ a

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{total}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_o}{3}\frac{a^3}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$$

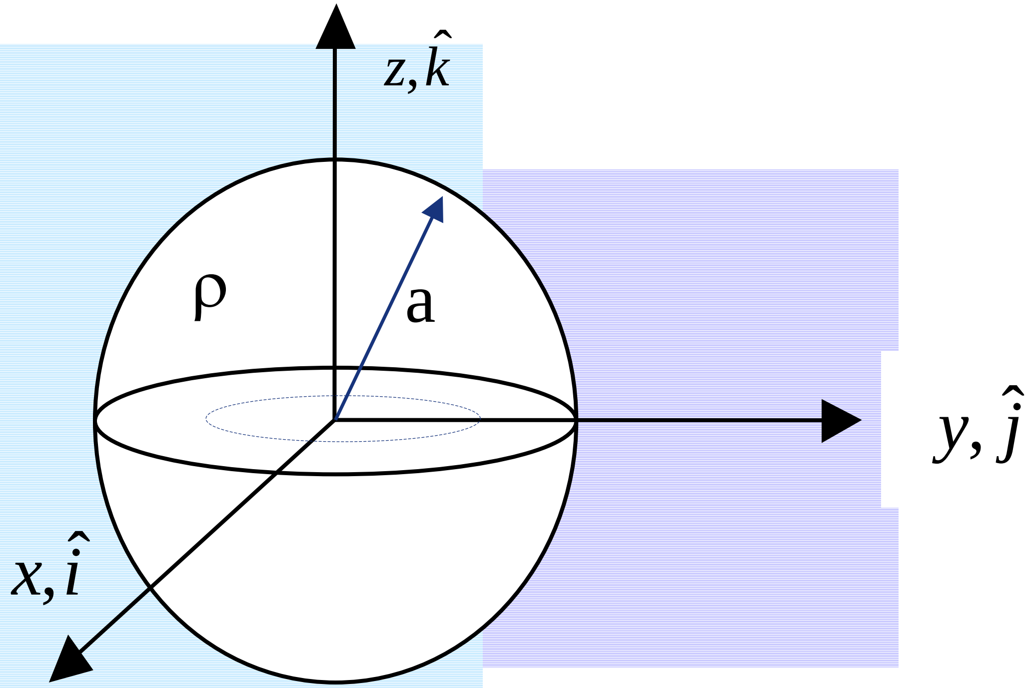


Fuerza Eléctrica y Energía

Ejemplo

Ahora aplicamos la fórmula

$$\therefore U = \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot\vec{E}dv$$

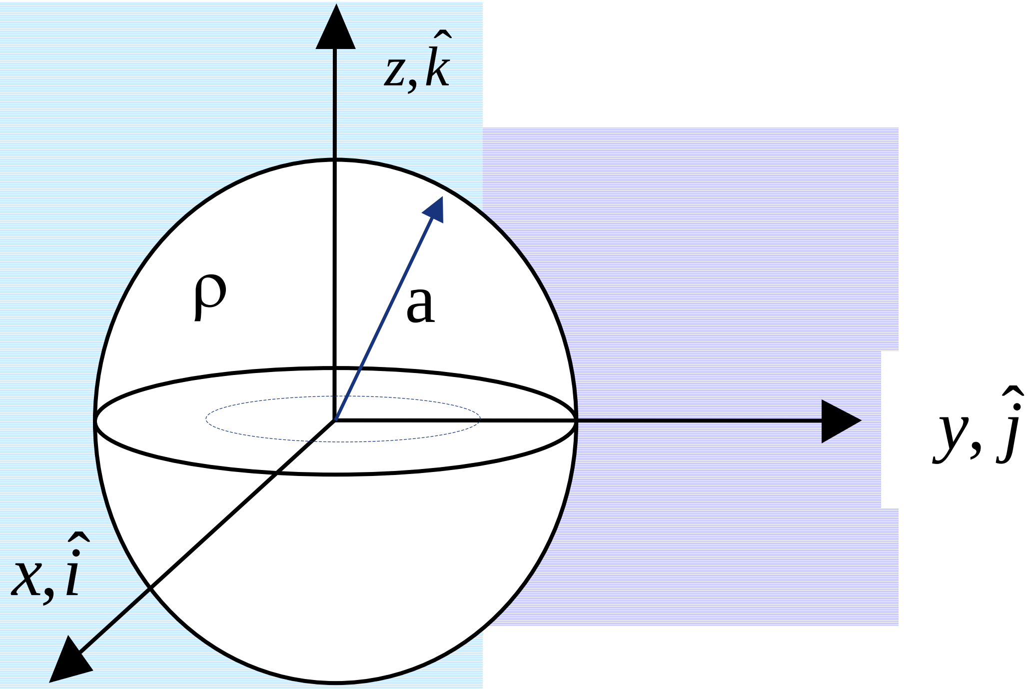


$$U = \frac{1}{2}\iiint_{esfera} \vec{D}\cdot\vec{E}dV + \frac{1}{2}\iiint_{resto} \vec{D}\cdot\vec{E}dV$$

Fuerza Eléctrica y Energía

Ejemplo

$$\therefore U = \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot\vec{E}dv$$



Obtenemos

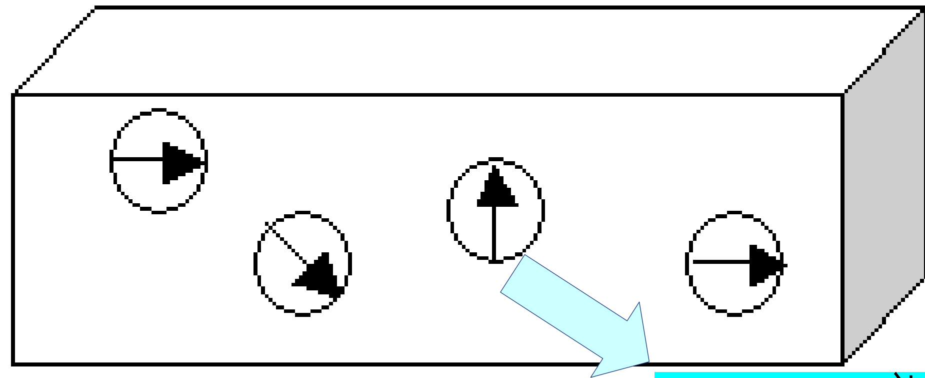
$$\Rightarrow U = \frac{2\pi\rho_0^2 a^5}{45\varepsilon} + \frac{10\pi\rho_0^2 a^5}{45\varepsilon_0}[J]$$

Medios materiales en electrostática

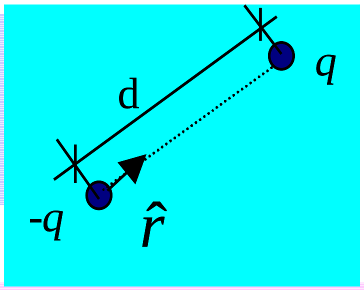
Dieléctricos

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$



$$\vec{p} = q d \hat{r}$$



Los medios se componen de dipolos que pueden girar en torno a su posición de equilibrio, pero no se desplazan.

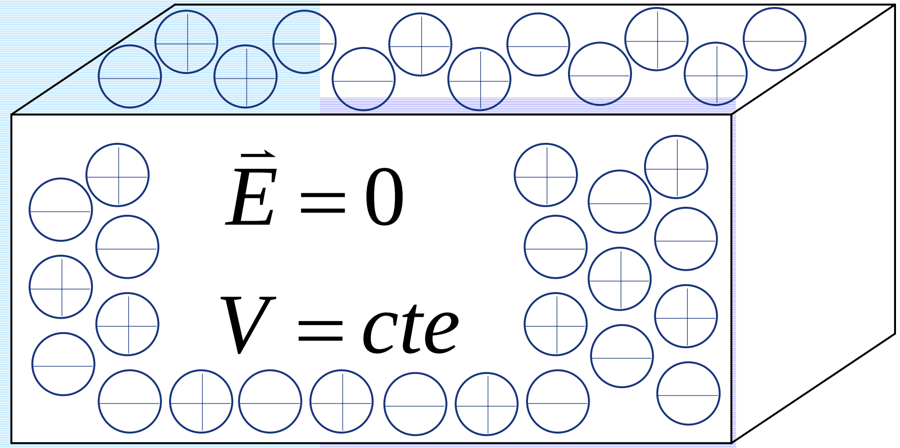
Medios materiales en electrostática

Conductores

- Sólo tiene distribución superficial
- no hay polarización.

$$\vec{E} = 0$$

$$V = cte$$



Los conductores poseen abundantes cargas (positivas y negativas) que pueden moverse libremente en presencia de un campo eléctrico