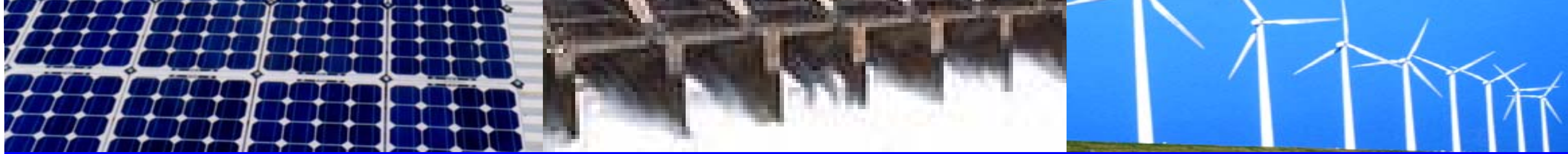
FI33A ELECTROMAGNETISMO
Clase 7
Medios Materiales II

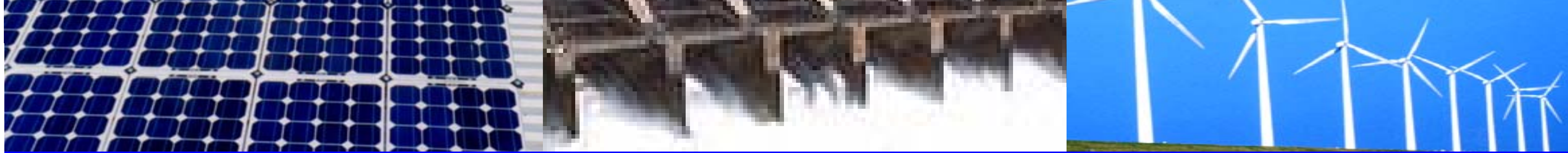
LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



INDICE

- Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell
- Constante dieléctrica
- Clasificación de materiales dieléctricos
- Ruptura dieléctrica
- Condiciones de borde para el campo eléctrico
- Ejemplo
- Refracción del campo eléctrico
- Consideraciones sobre Simetría

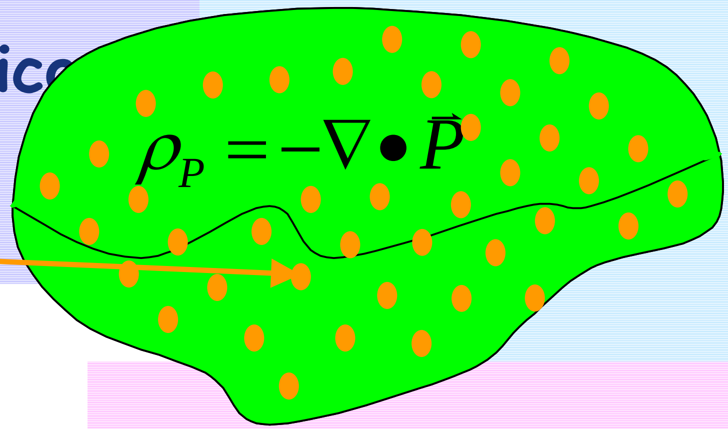
Escuela de Ingeniería Universidad de Chile



Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

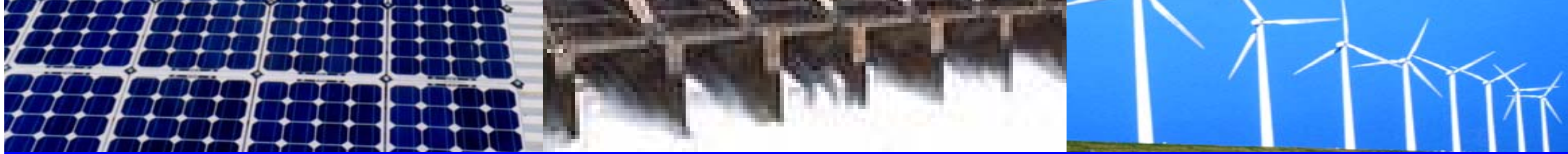
La 1ª ecuación de Maxwell indica $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_{total}}{\varepsilon_0}$

ρ_{total} corresponde a la carga total que es fuente de campo eléctrico



$\rho_{polarización}$

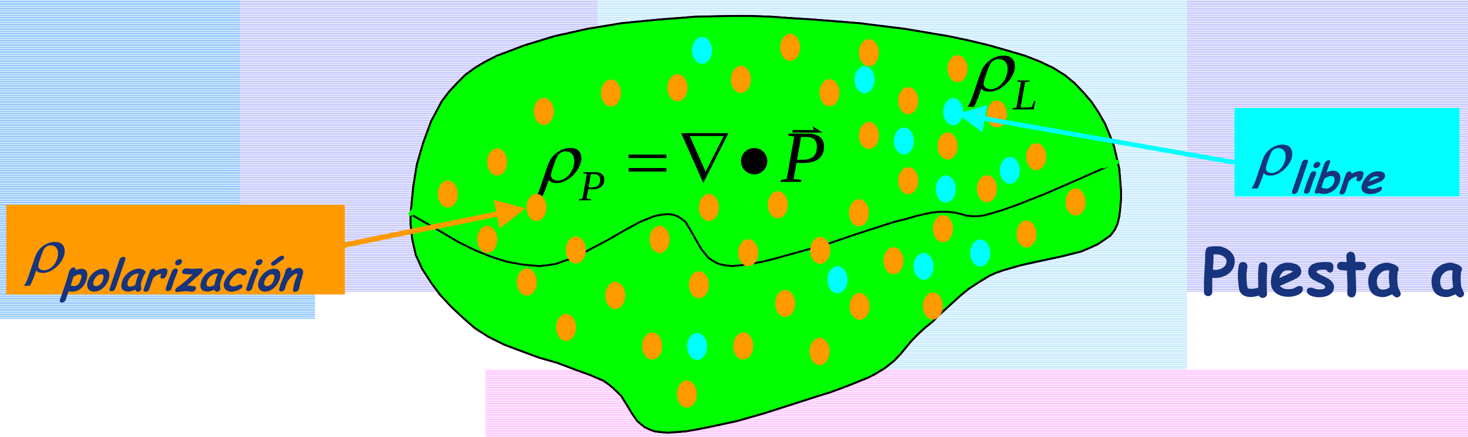
En el caso más general ρ_{total} estará compuesta de carga libre y carga de polarización



Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

La 1ª ecuación de Maxwell indica $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_{total}}{\varepsilon_0}$

$\rho_{total} = \rho_{Polarización} + \rho_{libre} \Rightarrow \quad \rho_L + \rho_P = \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E}$



Puesta a propósito

Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

$$\rho_L = \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} - \rho_P$$ pero $$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\rho_L = \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} \quad (2.18)$$

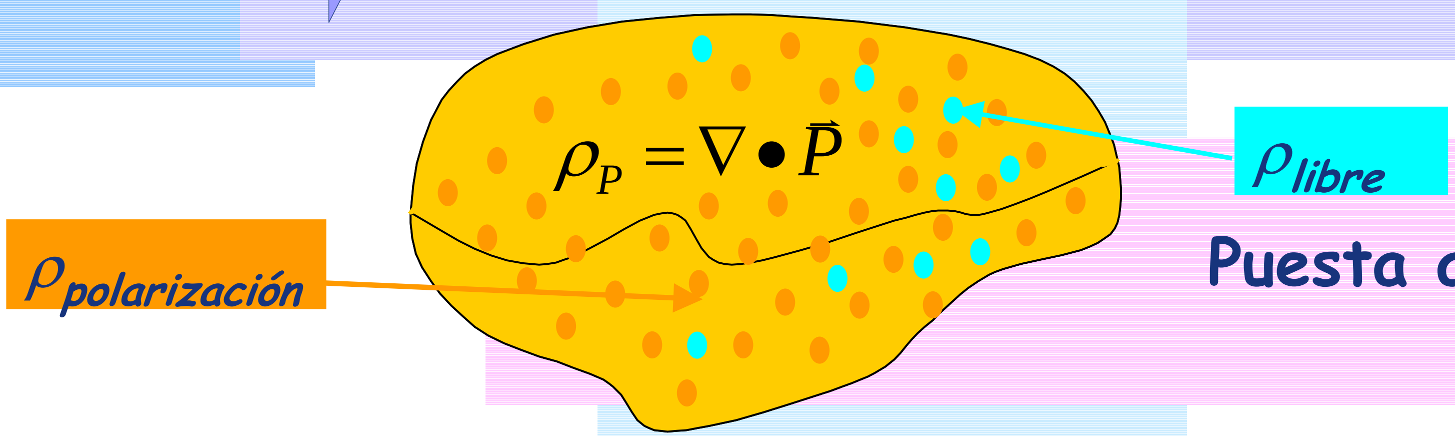
$$\rho_L = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \quad (2.19)$$

definiendo $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$

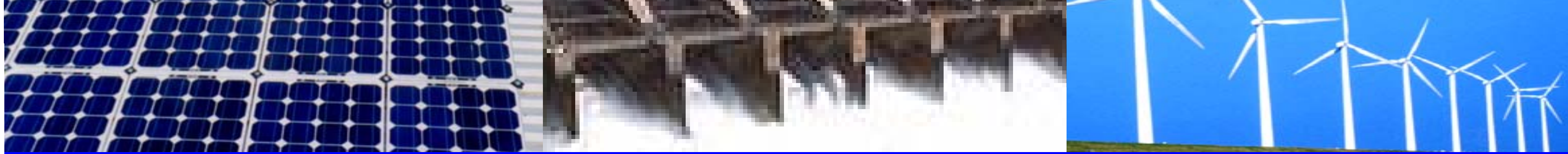
Vector de desplazamiento

$$\boxed{\rho_L = \nabla \cdot \vec{D}}$$

1ª ecuación de Maxwell



Puesta a propósito



Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

$$\rho_L = \nabla \cdot \vec{D}$$

1ª ecuación de Maxwell

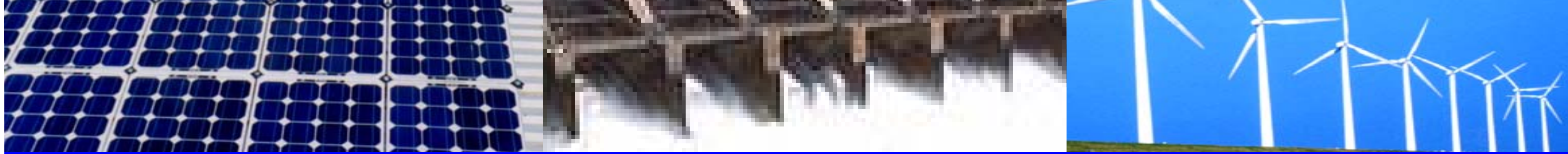
donde $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ Vector de desplazamiento

Integrando en un volumen Ω

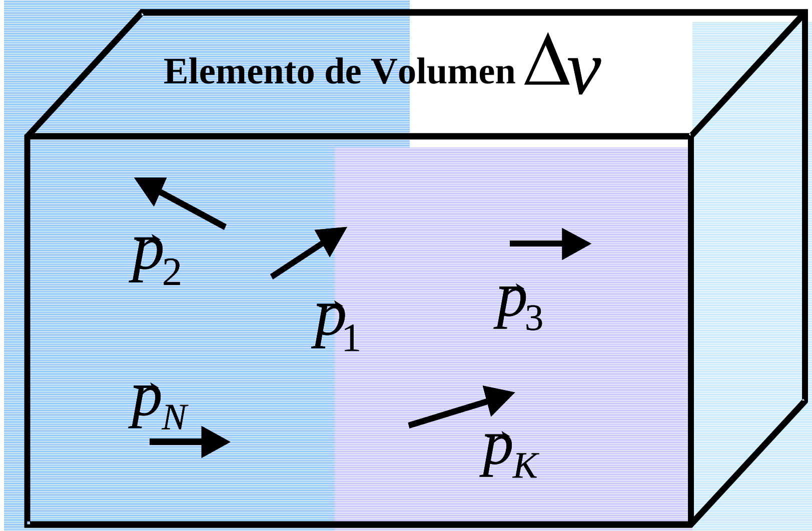
$$\underbrace{\iiint_{\Omega} \rho_L \, dv}_{Q_L} = \underbrace{\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{D} \, dv}_{\oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \bullet d\vec{s}}$$

$$Q_L = \oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \bullet d\vec{s}$$

Ley de Gauss en la materia

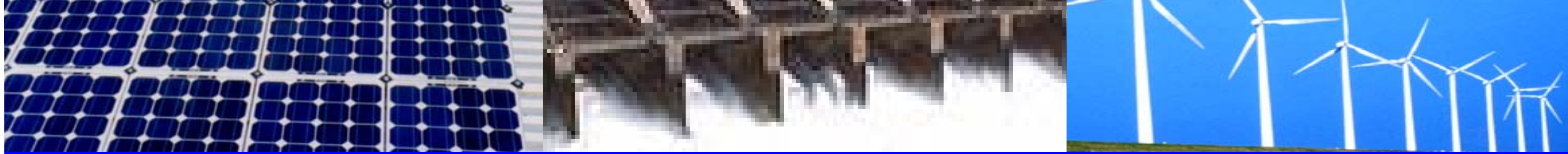


Polarización de medios materiales



$$\vec{P} = \underset{\Delta v' \longrightarrow 0}{Lim} \frac{\sum_{k=1}^{N} Q_k \vec{d}_k}{\Delta v'} = \underset{\Delta v' \to 0}{Lim} \left[\frac{\sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k}{\Delta v'} \right]$$

$\vec{P}$ La polarización en medios materiales varia con la intensidad del campo eléctrico aplicado



Polarización de medios materiales

$$\left\|\vec{P}\right\| = \alpha\left\|\vec{E}\right\| \Rightarrow$$ Materiales lineales

$$\vec{P} = \alpha(\vec{r})\vec{E} \Rightarrow$$ Materiales isótropos $\vec{P} // \vec{E}$

Si α es constante $\Rightarrow$ Material homogéneo

En general tendremos $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$

χ_e es la susceptibilidad eléctrica de un material

Constante dieléctrica

Teniamos que $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ pero $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$

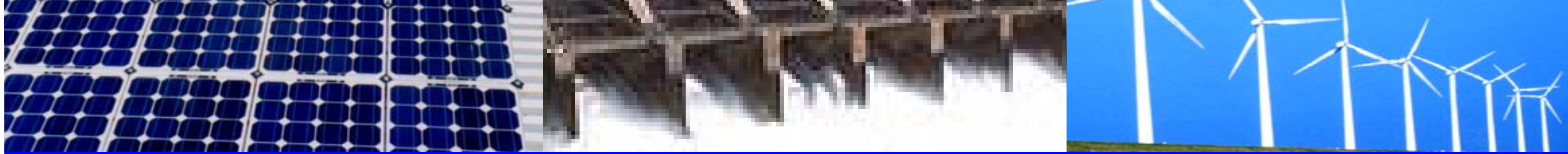
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (I + \chi_e) \vec{E}$$

$\varepsilon_r = (I + \chi_e)$ Permeabilidad dieléctrica relativa

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ Constante dieléctrica del material

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

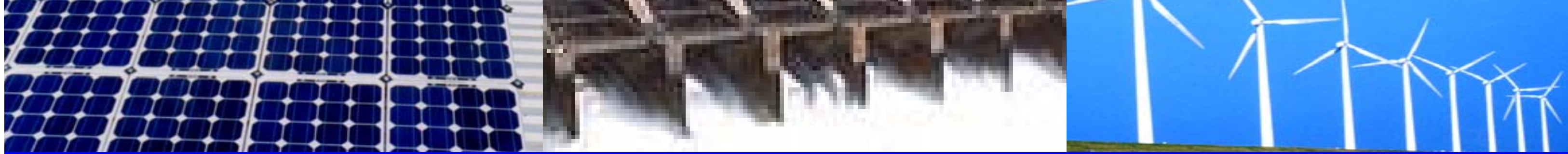


Constante dieléctrica

$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ y $\vec{D}=\varepsilon\,\vec{E}$, la expresión más general es

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

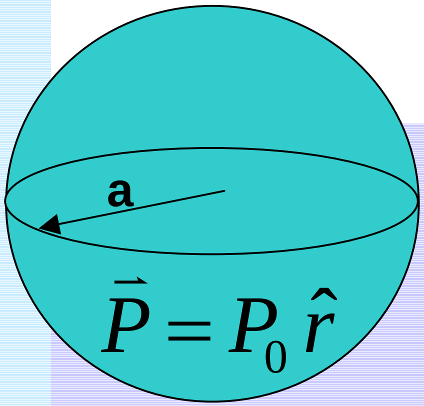
y en general $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(\vec{r})$



Ejemplo

Si esfera dieléctrica con

$$\vec{P} = P_0\,\hat{r} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$$

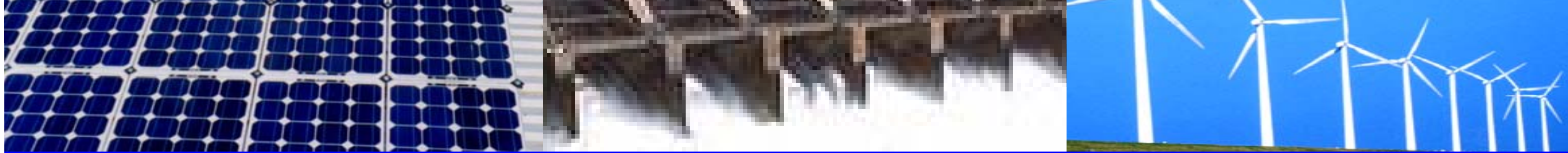


Calcular $\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}$

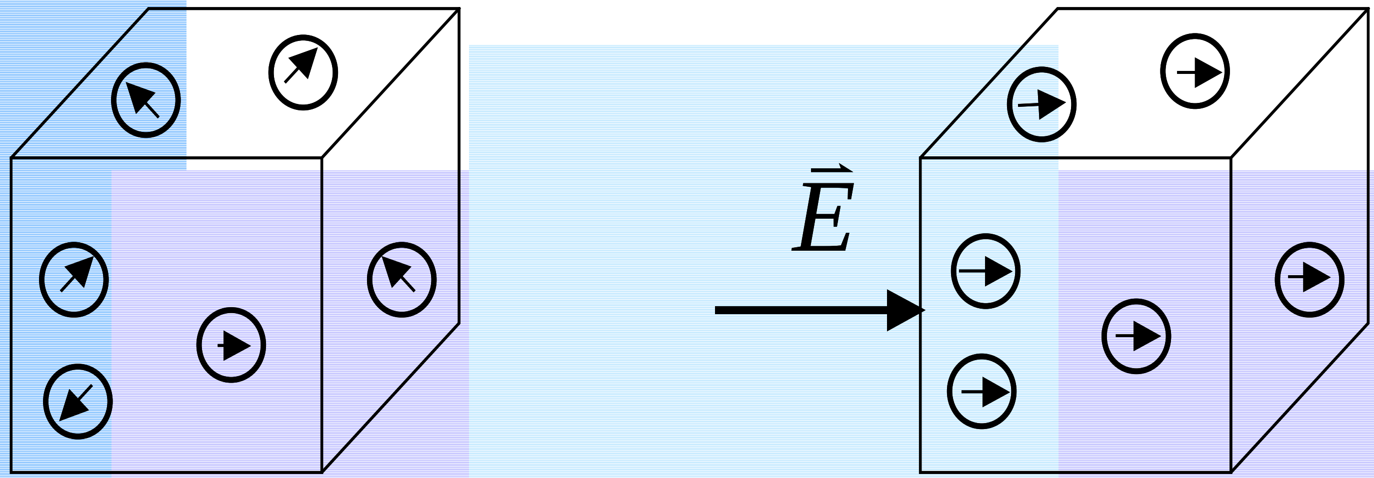
Hint

$$\nabla \bullet \vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \cdot P_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P_\phi}{\partial\phi}$$

Escuela de Ingeniería Universidad de Chile



Clasificación de materiales dieléctricos

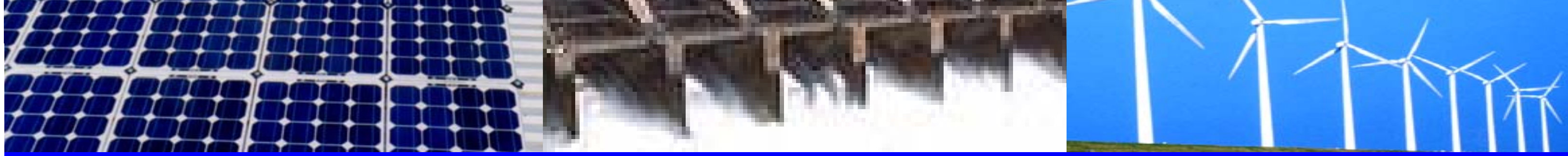


Situación sin campo aplicado

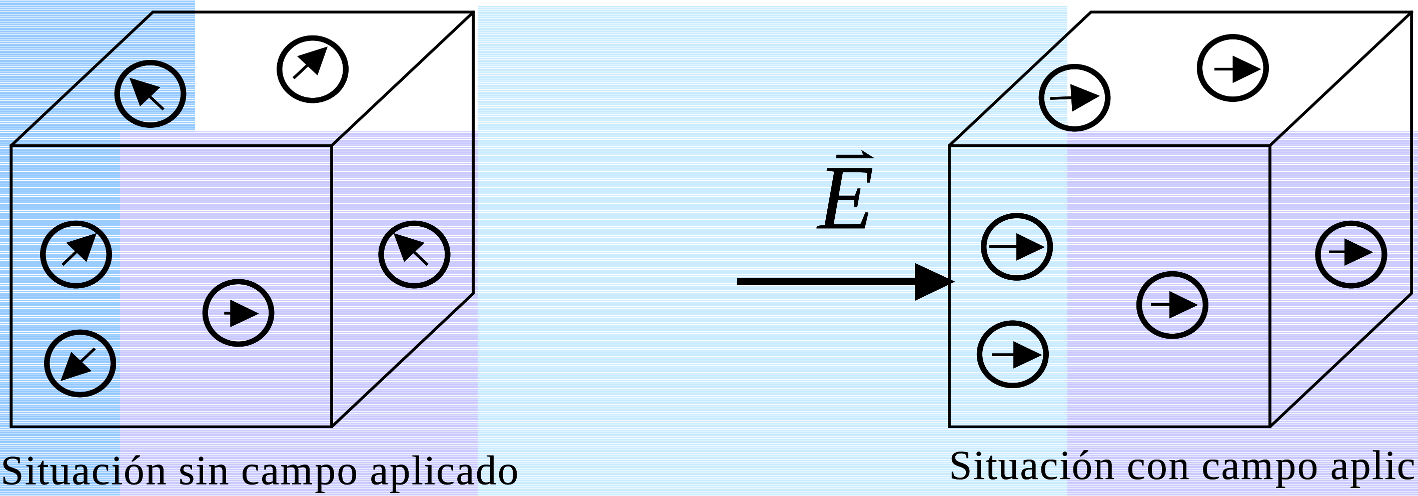
Situación con campo aplicado

i) Material lineal, isótropo y homogéneo

$\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\|$ y $\vec{D}, \vec{P}$ y $\vec{E}$ son paralelos, ε es constante



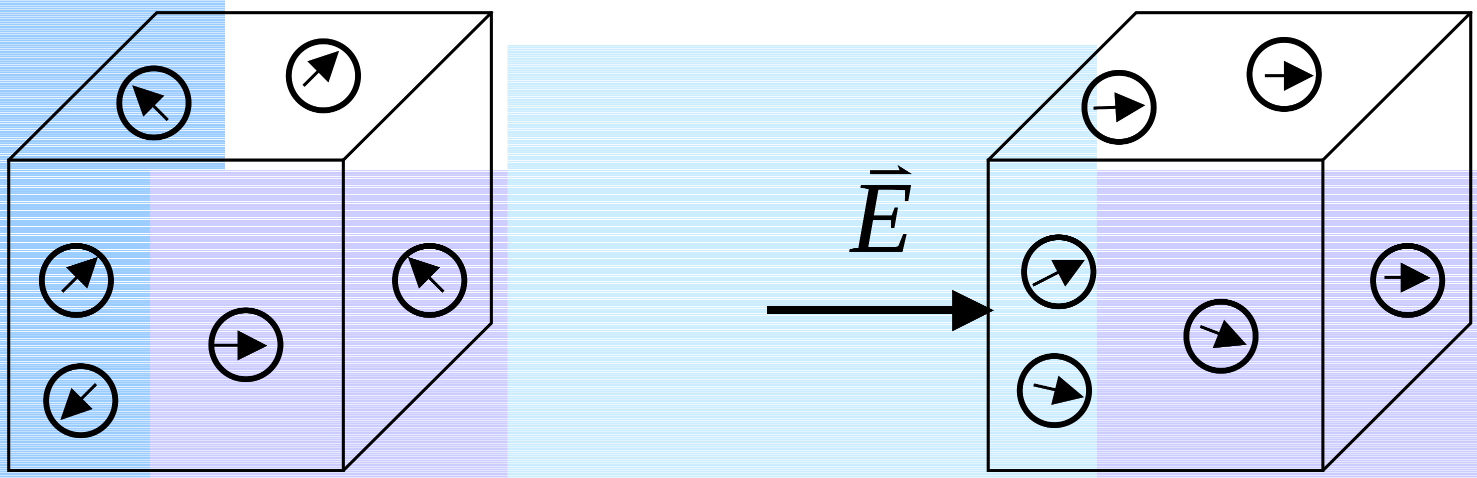
Clasificación de materiales dieléctricos



ii) Material lineal, isótropo y no homogéneo

$\left\|\vec{P}\right\| = \alpha \left\|\vec{E}\right\|$ y $\vec{D}, \vec{P}$ y $\vec{E}$ son paralelos, $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$ no es constante

Clasificación de materiales dieléctricos



Situación sin campo aplicado

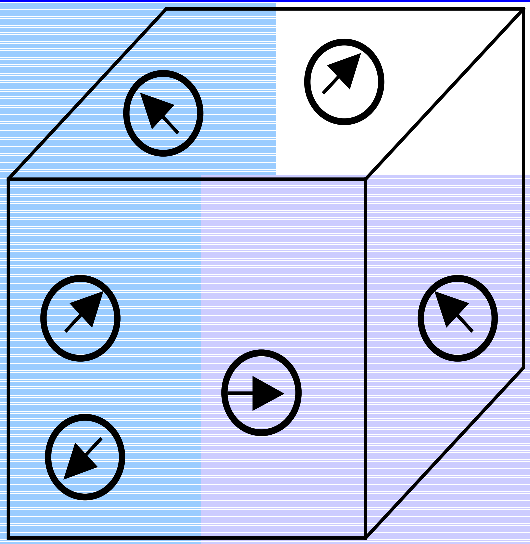
Situación con campo aplicado

iii) Material lineal, anisótropo y no homogéneo

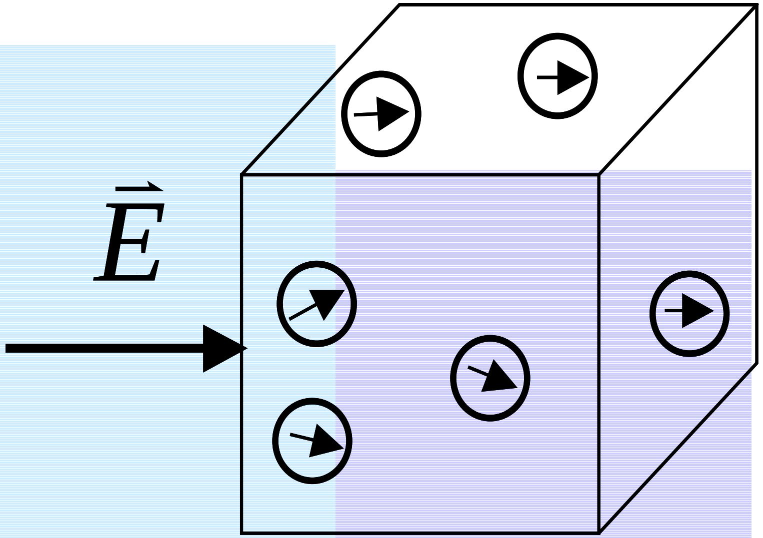
$\left\|\vec{P}\right\| = \alpha\left\|\vec{E}\right\|$ y $\vec{D}, \vec{P}$ y $\vec{E}$ No son paralelos.

$\vec{D} = [\varepsilon]\vec{E}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\vec{r})$

Clasificación de materiales dieléctricos



Situación sin campo aplicado



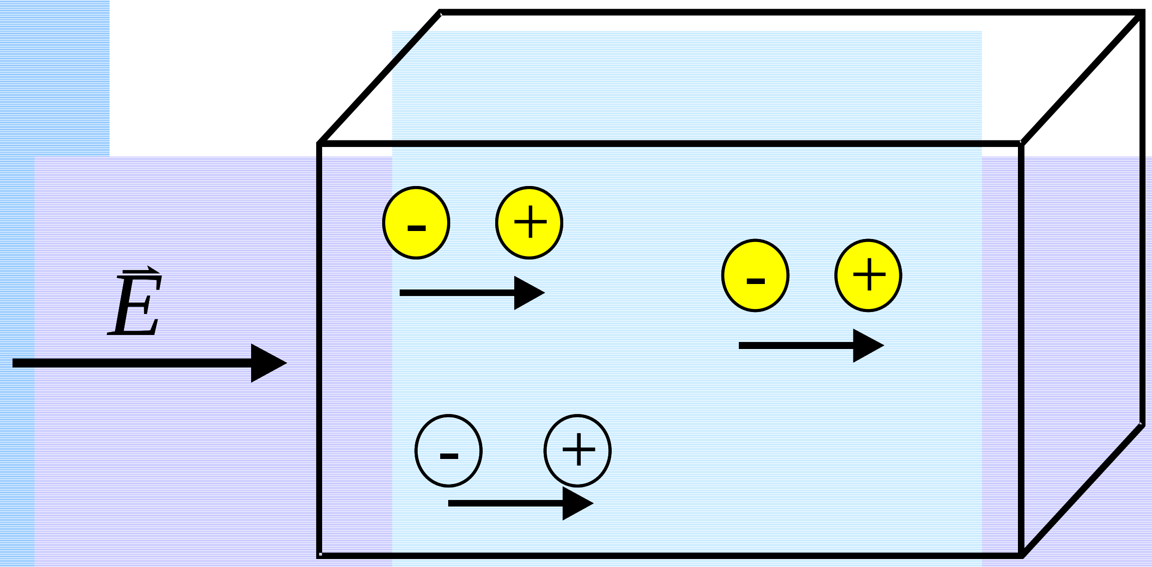
Situación con campo aplicado

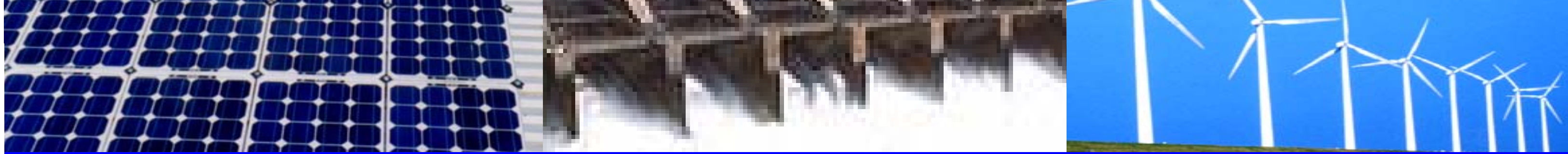
iv) Material no lineal, anisótropo y no homogéneo

$\left\|\vec{P}\right\| \neq \alpha\left\|\vec{E}\right\|$ y $\vec{D},\vec{P}$ y $\vec{E}$ No son paralelos.

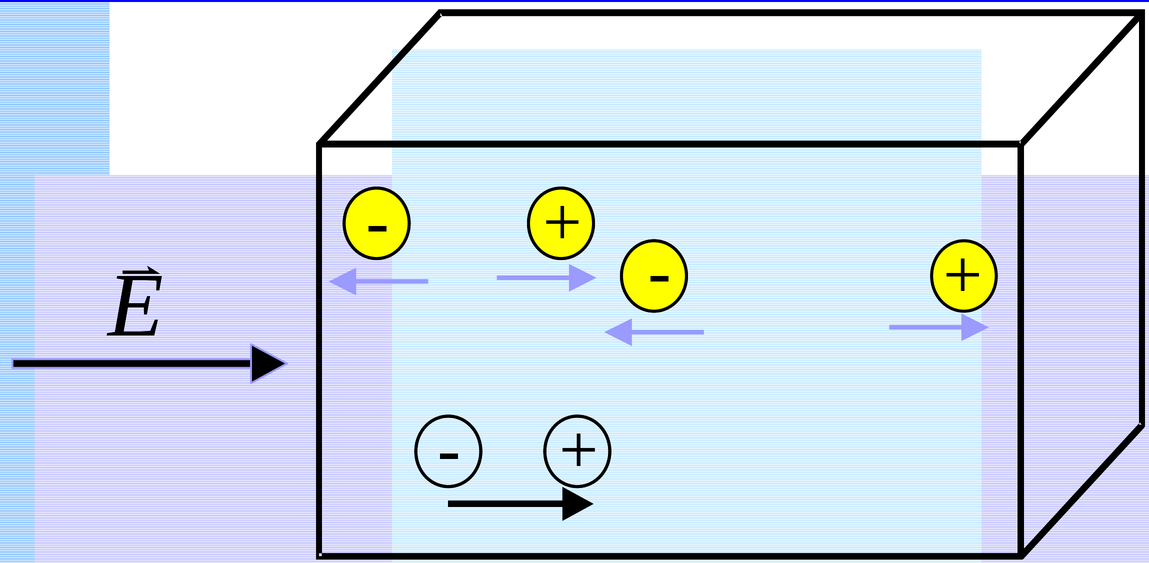
$$\vec{D} = [\varepsilon]\vec{E},\quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{i\,j}(\vec{r})$$

Ruptura dieléctrica





Ruptura dieléctrica



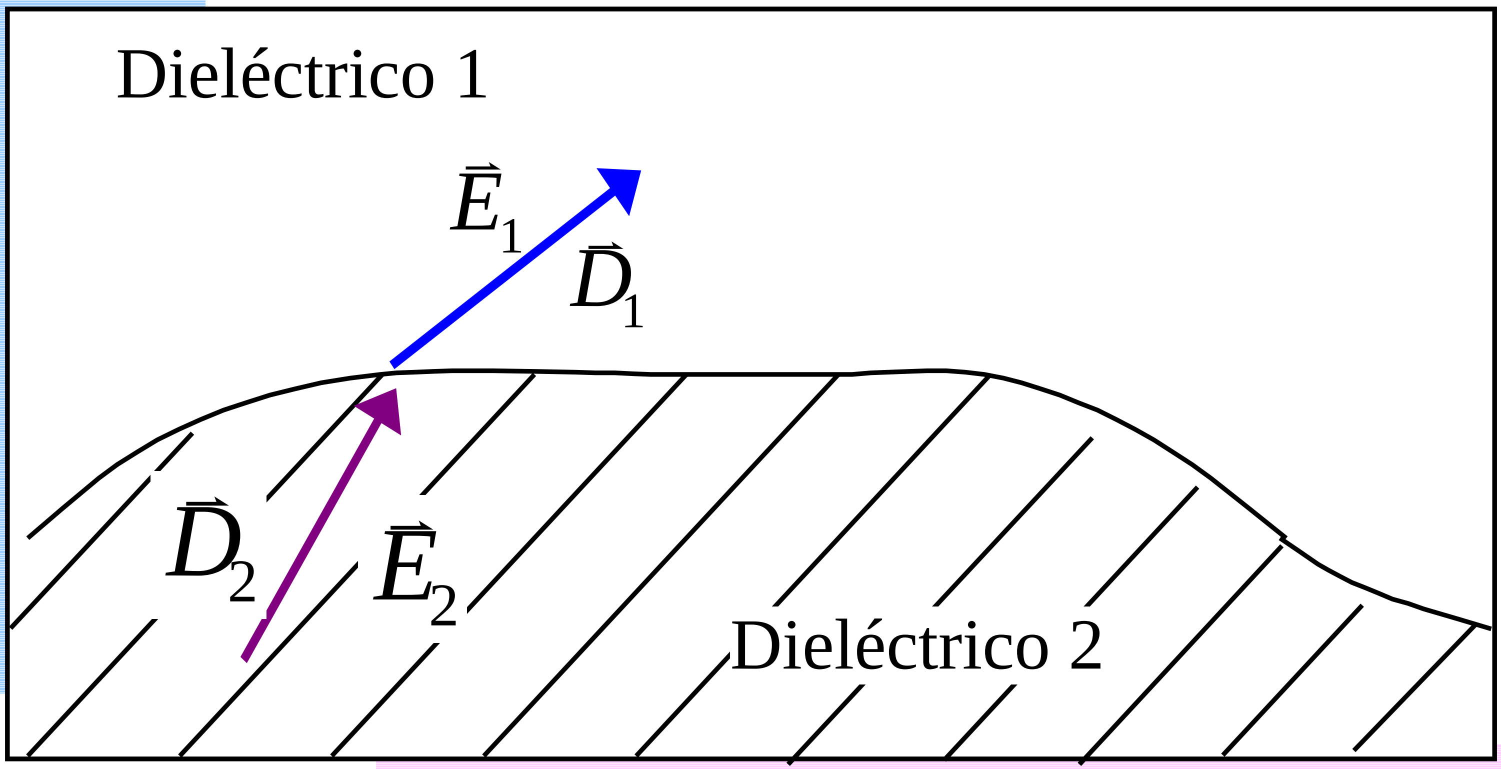
El mínimo valor del campo eléctrico para el cual se produce la ruptura se denomina "fuerza dieléctrica"

Constante dieléctrica y fuerza dieléctrica

Material	Constante Dieléctrica ε_r (adimensional)	Fuerza dieléctrica E (V/m)
Titanato de Bario	1200	7.5×10^6
Agua (mar)	80	
Agua destilada	81	
Nylon	8	
Papel	7	12×10^6
Vidrio	5 -10	35×10^6
Mica	6	70×10^6
Porcelana	6	
Bakelita	5	20×10^6
Cuarzo (fusionado)	5	30×10^6
Goma (dura)	3.1	25×10^6
Madera	2.5 – 8.0	
Polyestyreno	2.55	
Polypropyleno	2.25	
Parafina	2.2	30×10^6
Petroleo	2.1	12×10^6
Aire (a 1 atmósfera)	1	3×10^6

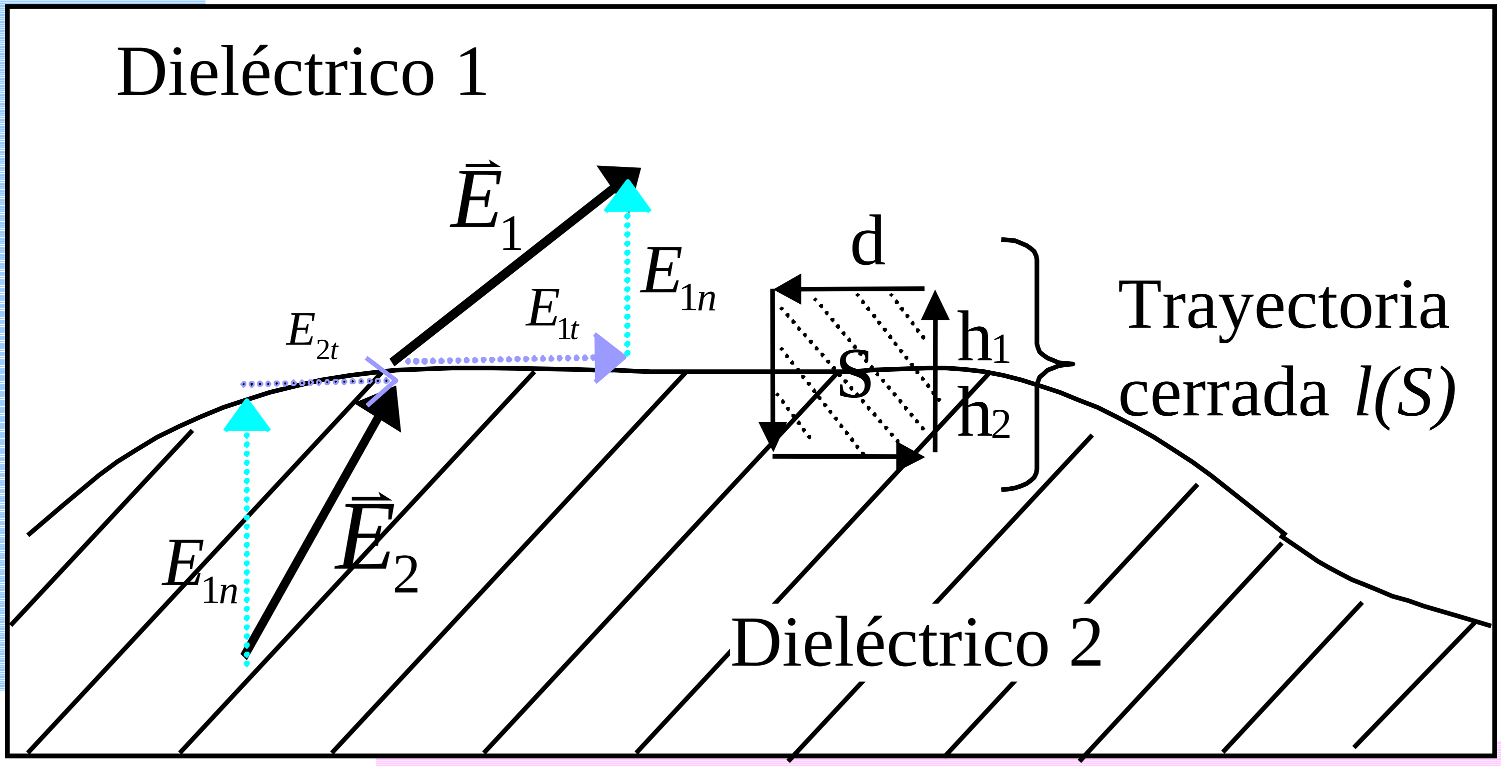
(*) Estos valores pueden variar en otras Tablas ya que hay muchas variedades y aleaciones de cada material y la permitividad es además sensible a la temperatura, impurezas, etc.

Condiciones de borde



Usaremos dos ecuaciones $\nabla \times \vec{E} = 0$ y $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

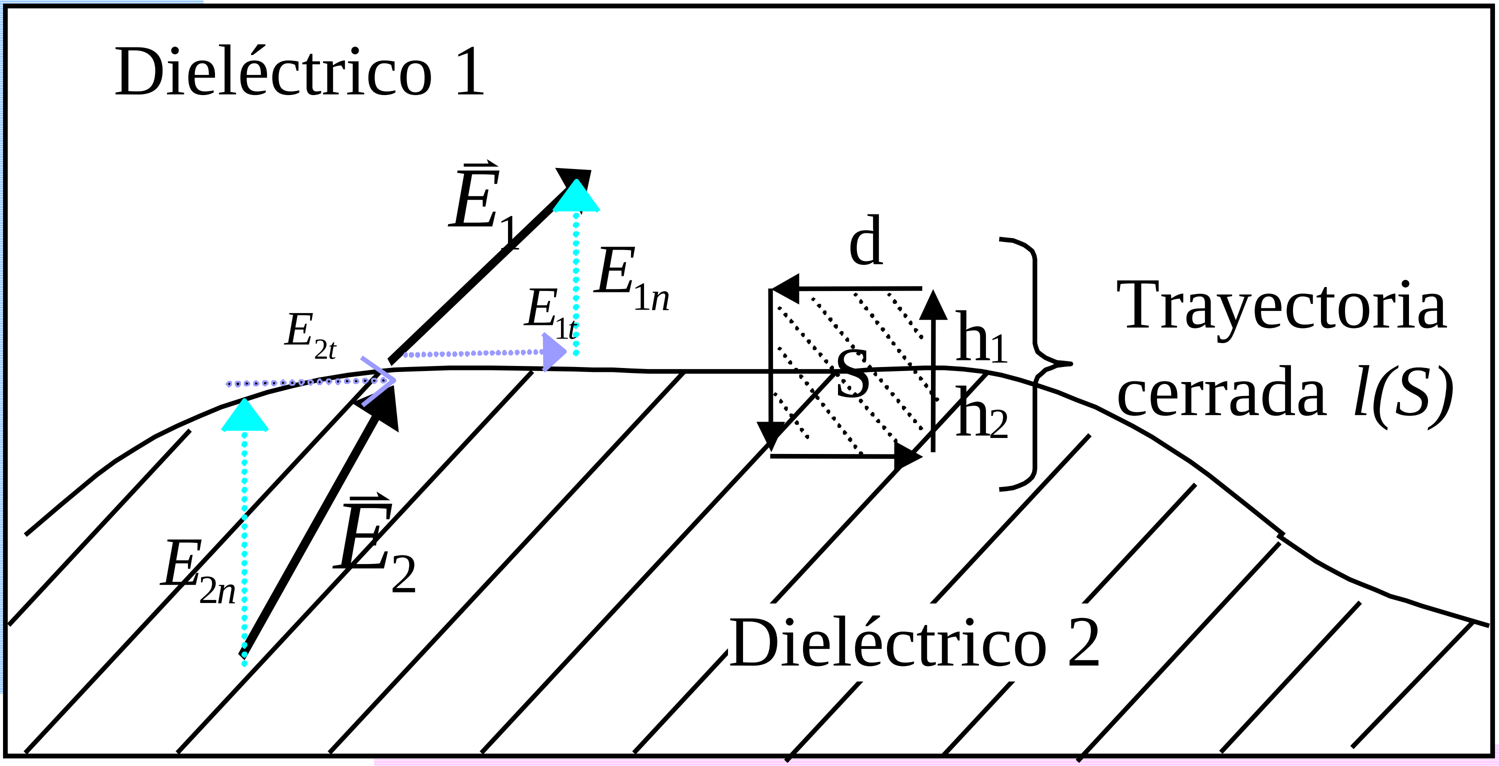
Condiciones de borde para el campo eléctrico



$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \oint_{l(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Condiciones de borde para el campo eléctrico



$$\oint_{l(S)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow -E_{1t}d - E_{1n}h_1 - E_{2n}h_2 + E_{2t}d + E_{2n}h_2 + E_{1n}h_1 = 0$$

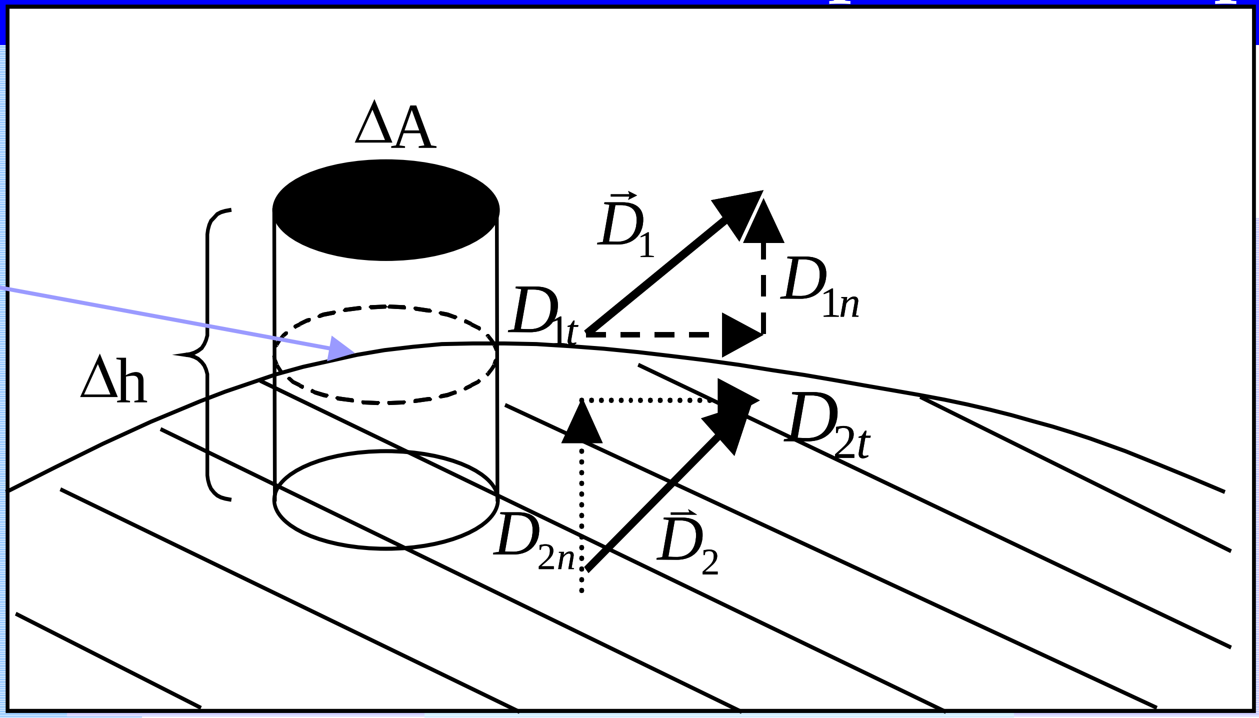
$$h_1 \to 0, \quad h_2 \to 0 \Rightarrow -E_{1t}d + E_{2t}d = 0$$

$$\therefore E_{1t} = E_{2t}$$

$$\therefore \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

Condiciones de borde para el campo eléctrico

σ_l

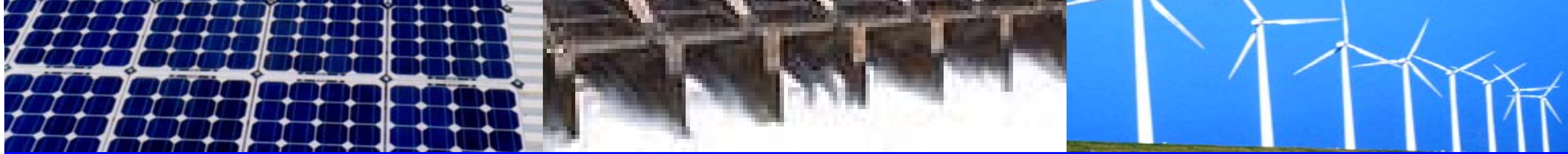


$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libre}$$, **y** $$Q_{libre} = \sigma_l \Delta A \Rightarrow D_{1n}\Delta A - D_{2n}\Delta A + \iint_{manto} \vec{D}\cdot dS = \sigma_l \Delta A$$

$$\Delta h \to 0 \Rightarrow \iint_{manto} \vec{D}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \boxed{D_{1n} - D_{2n} = \sigma_l}$$

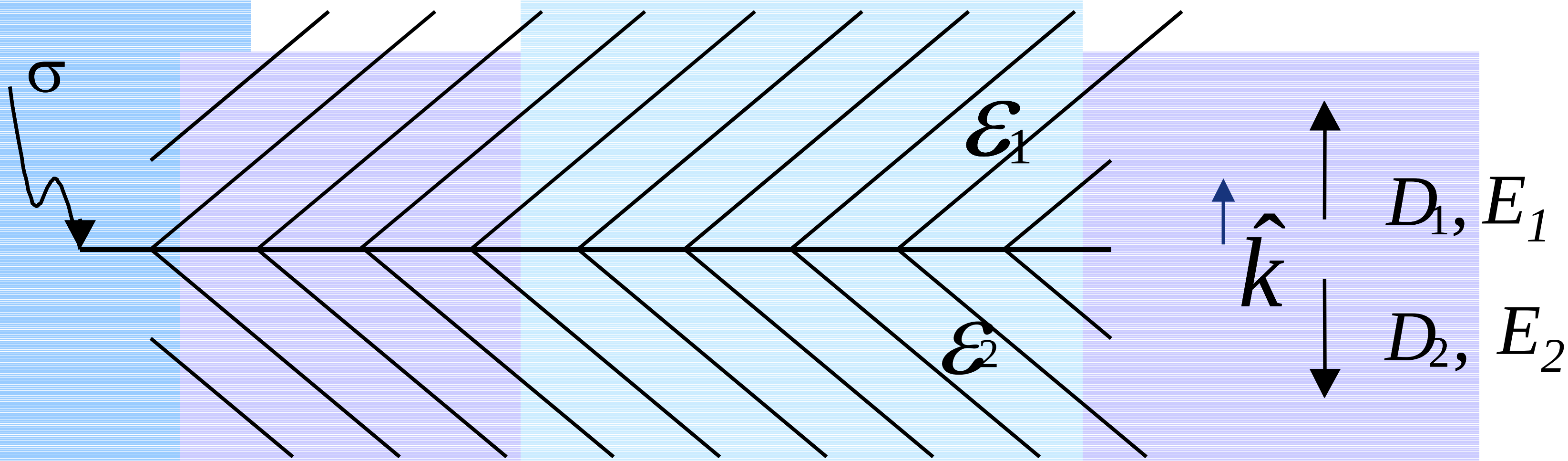
$$\boxed{\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma_l}$$

si $\sigma_l = 0$ $\begin{cases} D_{1n} = D_{2n} \\ \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \end{cases}$



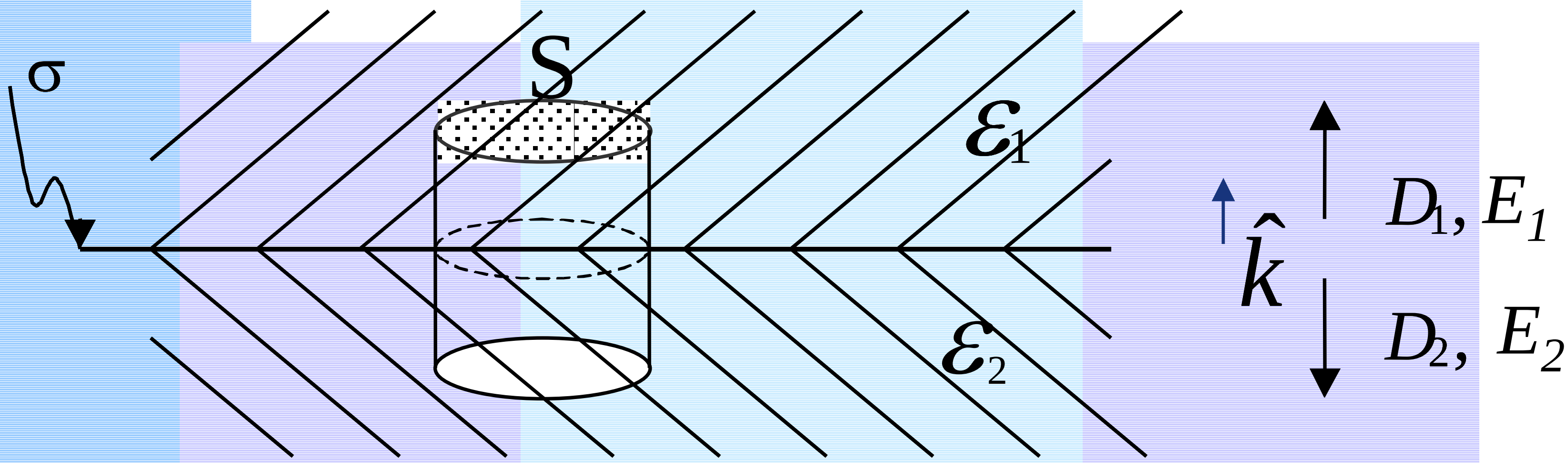
Condiciones de borde para el campo eléctrico

Ejemplo

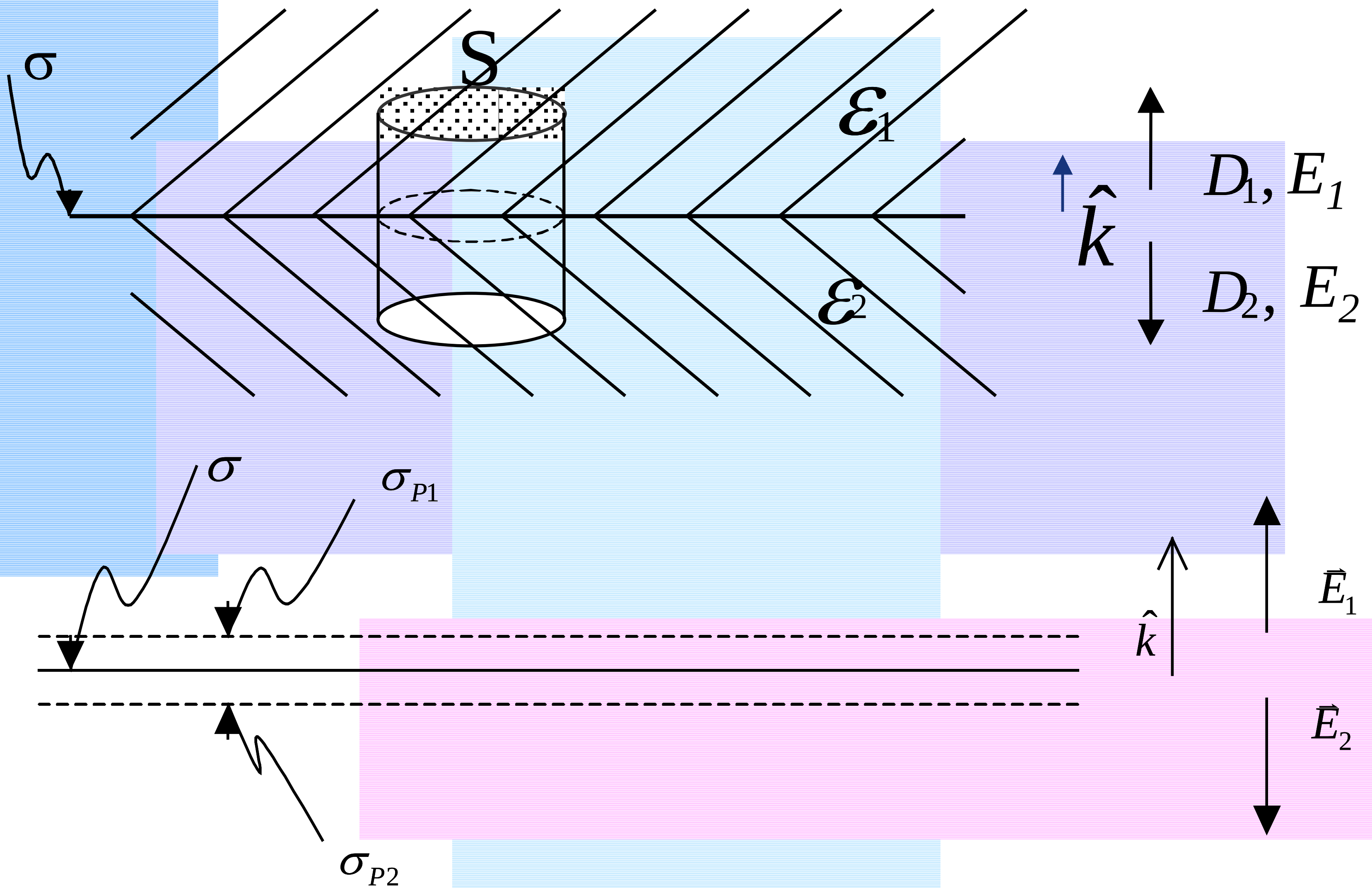


Condiciones de borde para el campo eléctrico

Ejemplo

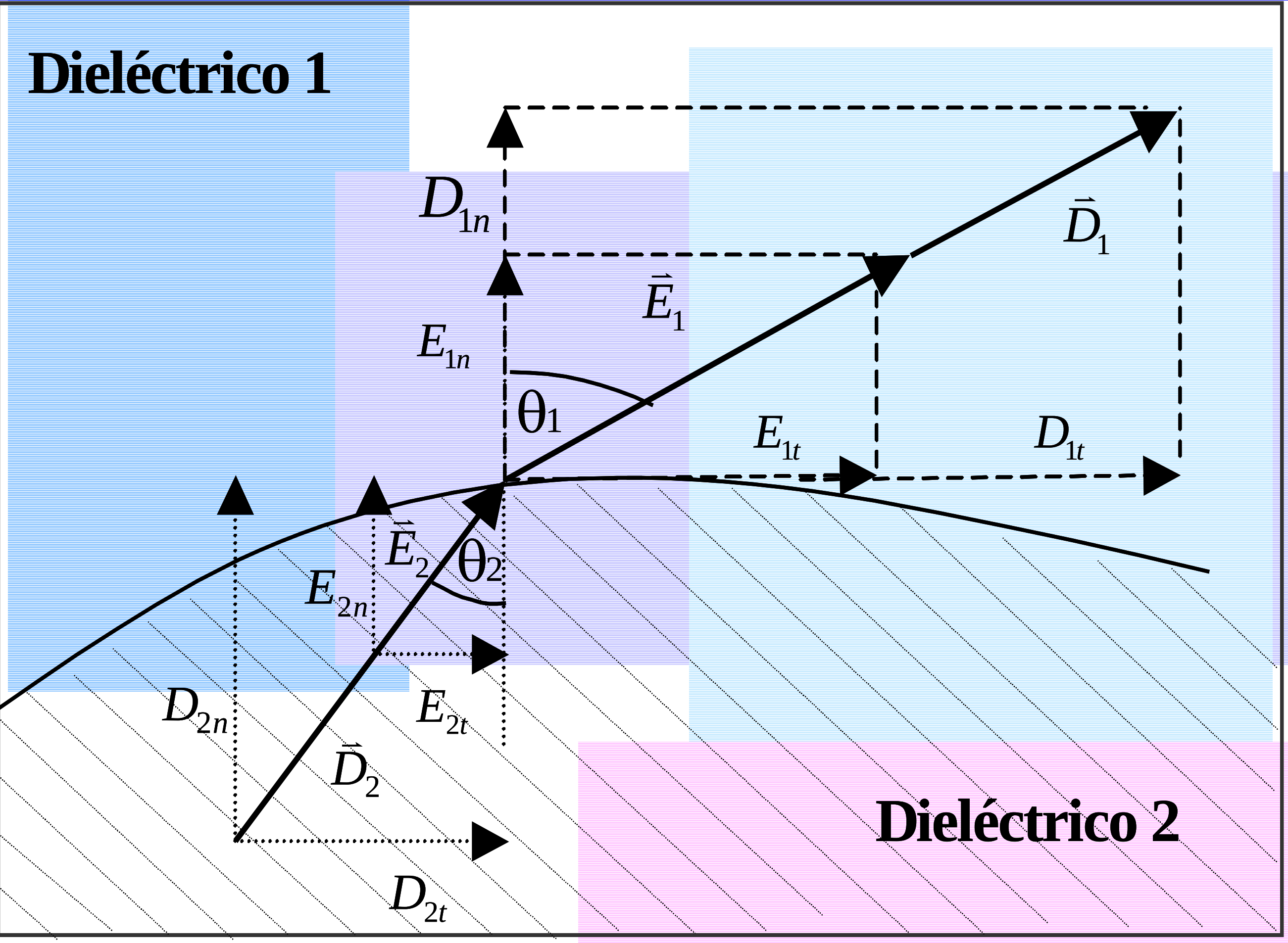


Ejemplo



σ
S
ε_1
ε_2
$\hat{k}$
D_1, E_1
D_2, E_2
σ
σ_{P1}
σ_{P2}
$\hat{k}$
$\vec{E}_1$
$\vec{E}_2$

Refracción del campo eléctrico



$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$$

$$\sigma_l = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

$$\varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2$$

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\operatorname{tg}\theta_2}{\varepsilon_2}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$