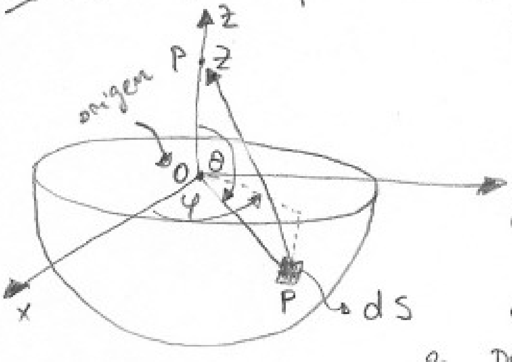
P] Calcular campo eléctrico para la sgte. configuración:

Casquete semiesférico de radio R, densidad de carga superficial σ, calcular $\vec{E}$ en el centro del casquete.



Sol: z es un punto cualquiera en eje z, P un punto cualquiera sobre el casquete.

Sea θ el $\measuredangle$ entre $\vec{OP}$ y $\vec{OZ}$

Calculamos el potencial en el eje z y luego el campo a partir de él.

$$\Rightarrow dV(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq(P)}{|\vec{PZ}|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma\, ds(P)}{|\vec{PZ}|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{z^2+R^2-2zR\cos\theta}} \; *$$

*(Aquí usamos el teorema del coseno para calcular la norma del vector $\vec{PZ}$).

$\Rightarrow$ Casquete en coordenadas esféricas $\Rightarrow$

$$r = R$$
$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\Rightarrow V(z) = \frac{\sigma R^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{z^2+R^2-2zR\cos\theta}} = \frac{2\pi\sigma R^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\sqrt{z^2+R^2-2zR\cos\theta}} =$$

$$\frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{2}{-2zR}\sqrt{z^2+R^2-2zR\cos\theta}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Rightarrow \boxed{V(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left[z+R-\sqrt{z^2+R^2}\right]}$$

Como $\vec{E} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{E}(z) = -\hat{k}\frac{dV}{dz} = \frac{\sigma R^2\hat{k}}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1-\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}}{z^2}}$$

Piden el campo en $\vec{E}(z=0)$, aplicando l'Hopital
(no podemos evaluar directamente $z=0$ en la fórmula del campo)

$$\Rightarrow \vec{E}(0) = \lim_{z\to 0} \vec{E}(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\sigma R^2\hat{k}}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{\frac{d}{dz}\left(1-\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)}{\frac{d}{dz}(z^2)}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\sigma R^2\hat{k}}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{(-R)(-1/2)(R^2+z^2)^{3/2}(2z)}{(2z)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(0) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\hat{k}$$

(Traten de hacerlo sumando de a pares).

el otro problema era el sgte:

P] Se tiene una distribución de carga simetrica esférica, caracterizada por los radios a y b ($a < b$). Para $r < a$, la densidad de carga es cte. e igual a ρ_0. Para $a < r < b$, no se conoce la expresion, pero se sabe que el potencial vale:

$$V(r) = -\frac{K}{6} r^2 \quad \text{(es un seis, no una b)}$$

Además se sabe que sobre la cascara esférica de radio a, hay una densidad superficial de carga σ_1 y en $r = b$ otra de valor σ_2 ("desconocidos")

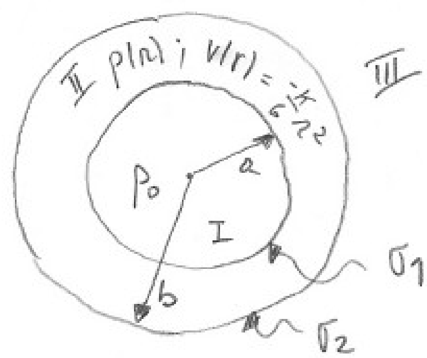
Sabiendo que hay distribucion de carga y que $V(r \to \infty) = 0$, determinar:

i) campo E en todo el espacio

ii) potencial en todo el espacio

iii) valores de σ_1, σ_2, $\rho(r)$ en $a < r < b$

Esquema:



Sol:

i) Usando la ecuacion de Poisson

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r})$$

En esféricos.

Nota: Aveces hago la "erre" como r y otras $\mathfrak{r}$, pero es la misma "erre"

I) $r < a$ $\quad \nabla^2 \phi_I = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \phi_I(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{A}{r} + B$$

Como el potencial no diverge, imponemos $A = 0$

$$\Rightarrow \phi_I(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + B$$

Por continuidad el potencial en $r = a$

$$-\frac{\rho_0 a^2}{6\varepsilon_0} + B = -\frac{K}{6} a^2 \Rightarrow B = \frac{a^2}{6}\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} - K\right)$$

$$\Rightarrow \phi_I(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{a^2}{6}\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} - K\right)$$

Ahora bien, el campo $E_I(r) = -\nabla\phi_I(r) \Rightarrow \vec{E}_I(r) = \frac{\rho_0 r}{6\varepsilon_0}\hat{r}$

$$\Rightarrow \boxed{E_{II}(r) = \frac{K}{3} r \hat{r}}$$

Para $r > b$ usamos Laplace ; $\nabla^2 \phi_{III} = 0 \Rightarrow \phi_{III}(r) = -\frac{c}{r} + D$

$\phi_{III}(r \to \infty) = 0 \Rightarrow D = 0$

por continuidad del potencial se cumple

$$\underbrace{-\frac{k}{6} b^2}_{\phi_{II}(b)} = \underbrace{-\frac{c}{b}}_{\phi_{III}(b)} \Rightarrow \boxed{c = \frac{k}{6} b^3}$$

$$\Rightarrow \phi_{III}(r) = -\frac{k}{6}\frac{b^3}{r} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{III}(r) = \frac{-kb^3}{6r^2}\hat{r}}$$

iii) Para calcular σ_1, σ_2 y $\rho(r)$ usamos ley de Gauss.
(Ya tenemos calculados los campos en las tres regiones)

$$\Rightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_v \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{k}{3} r\hat{r} \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r} = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{3} r^3 \, 2\pi \, (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 k = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$$

$$k\varepsilon_0 = \frac{Q(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow \boxed{\rho(r) = cte = k\varepsilon_0}$$

De la misma manera se calcula σ_1 y σ_2, se los dejo propuesto!

bueno, eso sería, espero les sirva ... disculpen por la letra aveces y la confusión de los "erre".

Atentamente ; Germán