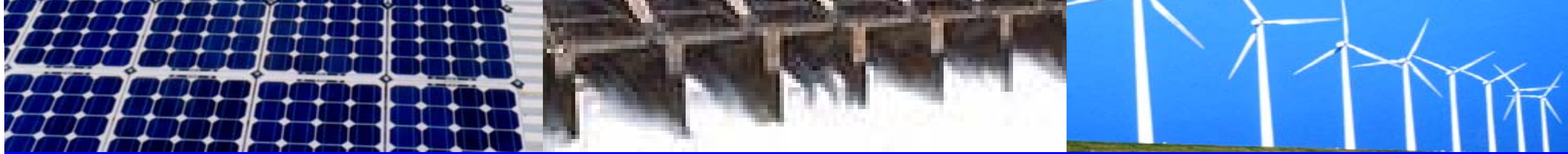
Escuela de Ingeniería Universidad de Chile



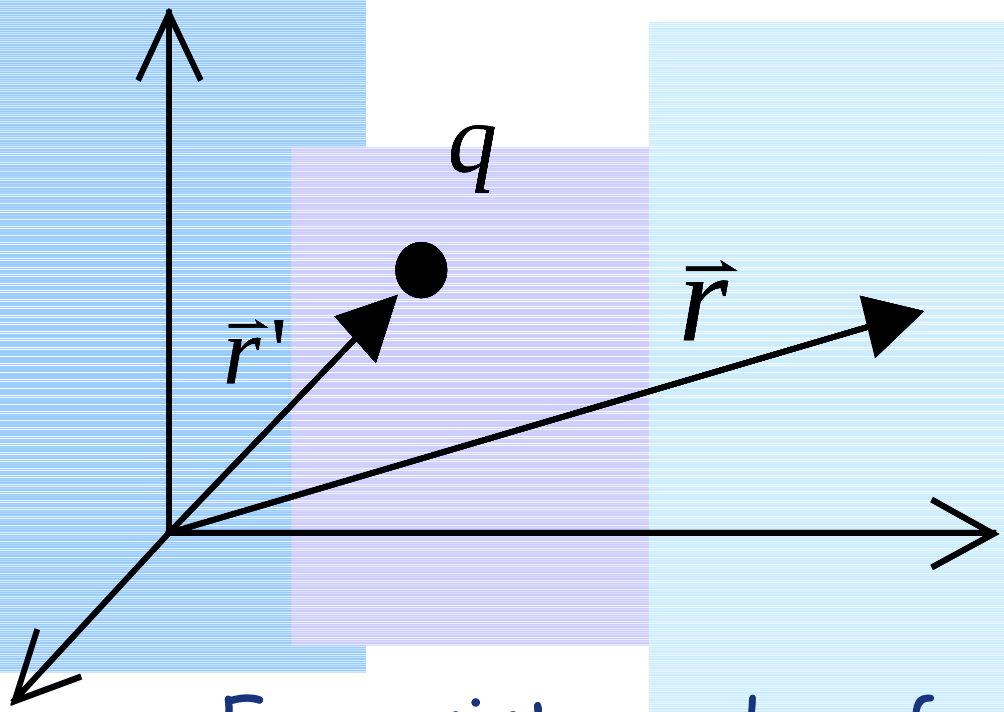
FI33A ELECTROMAGNETISMO
Clase 4

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

- Ecuación de Laplace,
- Campo Eléctrico Conservativo,

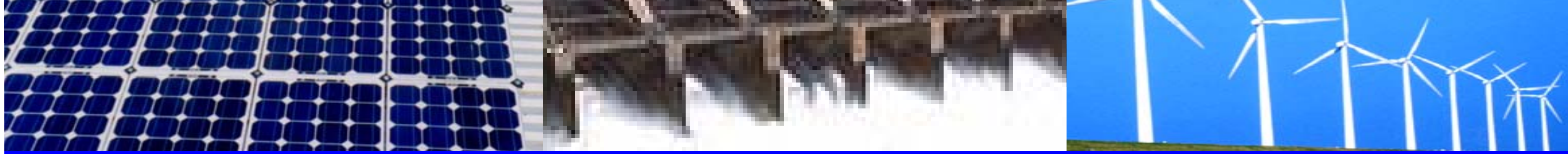
Definición de potencial



$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$

En un sistema de referencia cualquiera

V es una función lineal con la carga, luego se cumple superposición



Definición de potencial

Para sistema de cargas

$$V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 \,\|\vec{r} - \vec{r}_1\|} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 \,\|\vec{r} - \vec{r}_2\|} + \ldots + \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 \,\|\vec{r} - \vec{r}_n\|}$$

$$\Rightarrow \quad V(\vec{r}) = \sum \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 \,\|\vec{r} - \vec{r}_k\|}$$

Para distribuciones continuas de cargas

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{dq'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$

Relaciones entre campo eléctrico y potencial

$$V_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Tomando A como referencia y haciendo B variable

$$V(\vec{r}) = -\int_{ref}^{r} \vec{E} \bullet d\vec{l} + V_{ref}$$

Luego

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

ECUACION DE LAPLACE

Teníamos $$\nabla V(r) = -\vec{E}(r)$$

Tomando la divergencia $$\nabla \bullet (\nabla V(r)) = -\nabla \bullet \vec{E}(r)$$

Usando la 1ª ecuación de Maxwell $$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \bullet (\nabla V(r)) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

ECUACION DE LAPLACE

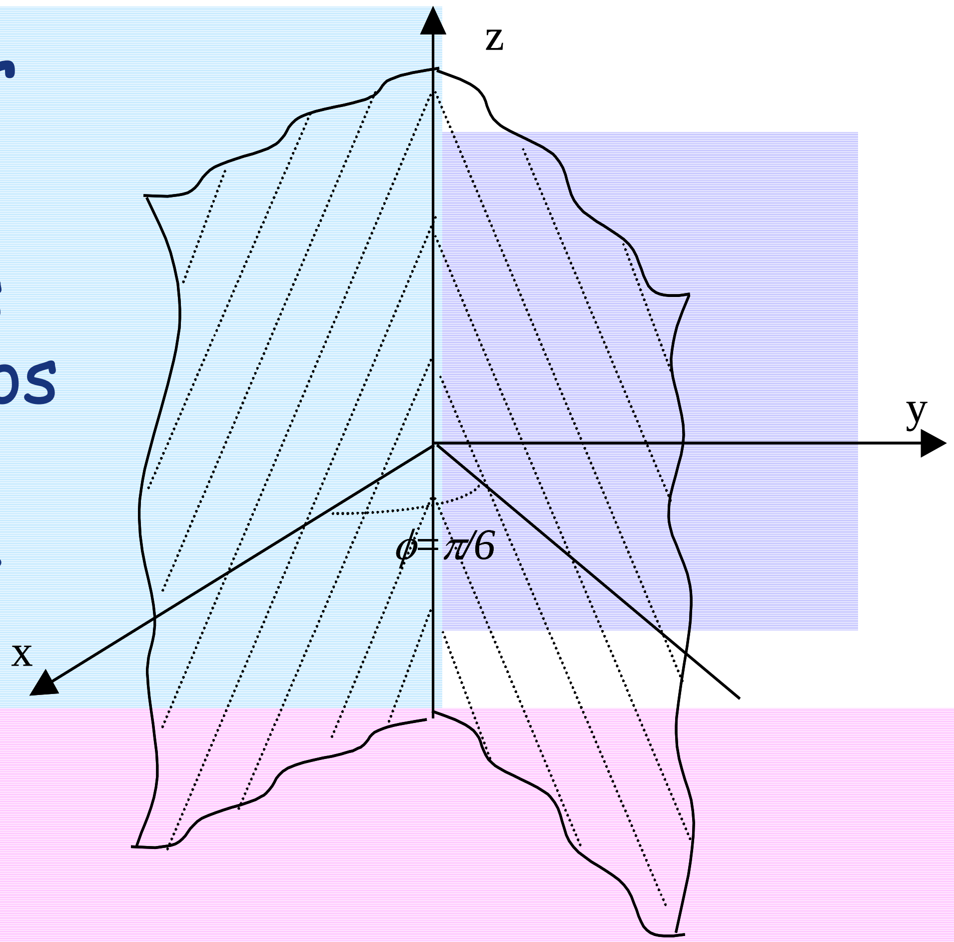
Si no hay cargas:
Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

ECUACION DE LAPLACE

EJEMPLO 12. Calcular V

Se sabe que el potencial en los planos semi-infinitos definidos por $V(\phi=0, \rho, z) = 0$ y $V(\phi=\pi/6, \rho, z) = 100$ V.



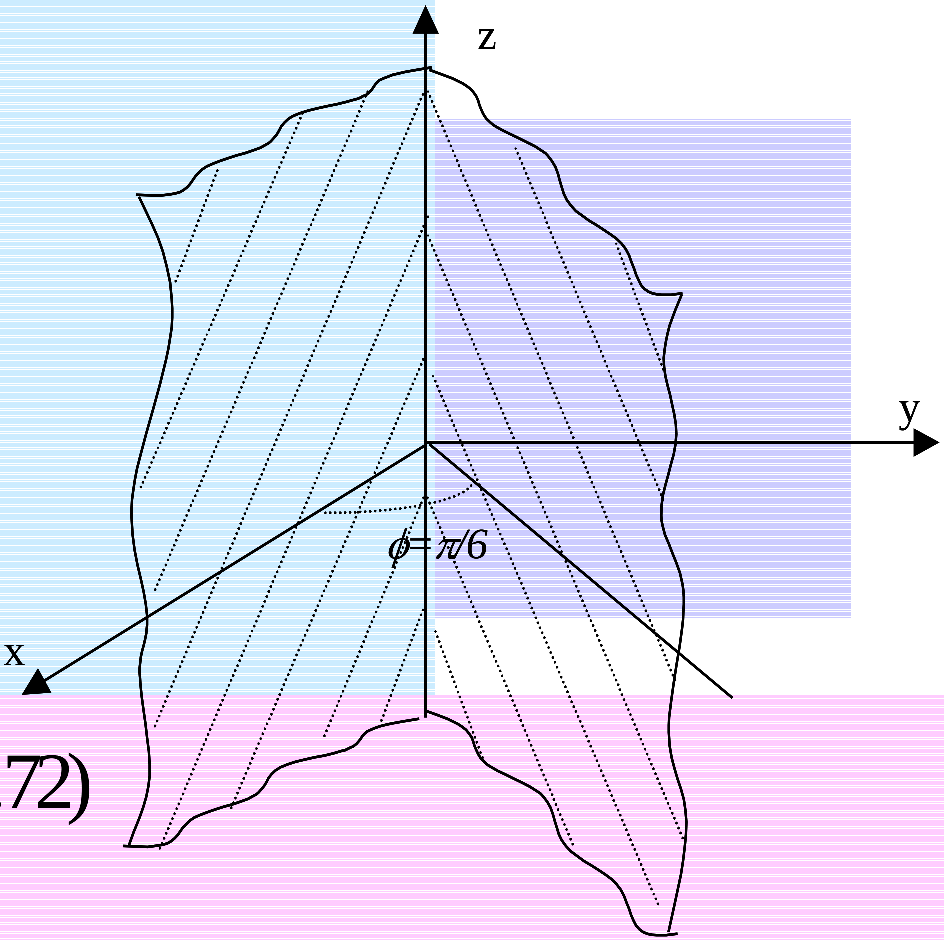
Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

ECUACION DE LAPLACE

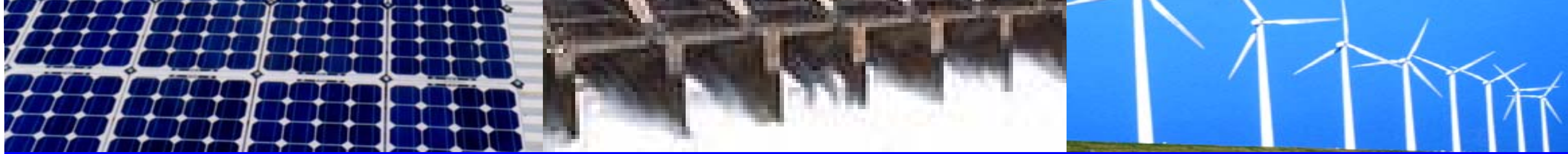
Sol^n

Hay que darse cuenta que **V** sólo dependen de ϕ

Sólo interesa una coordenada del laplaciano (ϕ)



$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1.72)$$



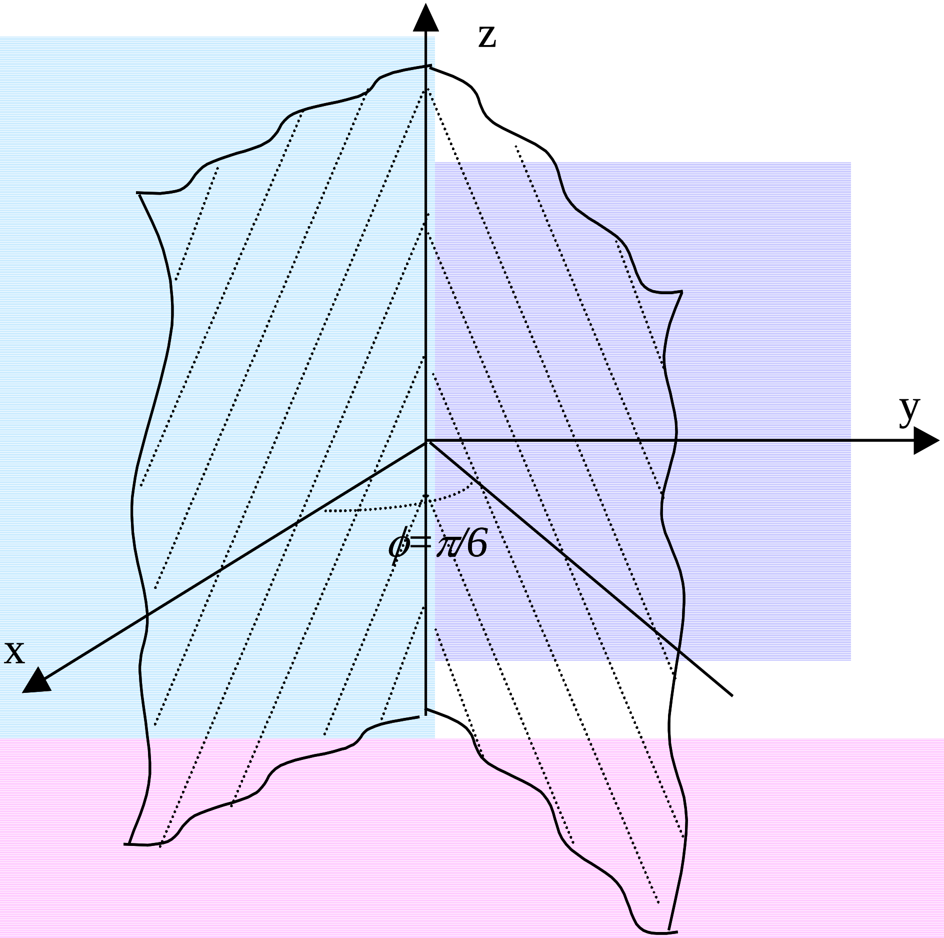
ECUACION DE LAPLACE

Luego

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1.73)$$

Cuya solución es

$$V = A\phi + B$$



ECUACION DE LAPLACE

Condiciones de borde:

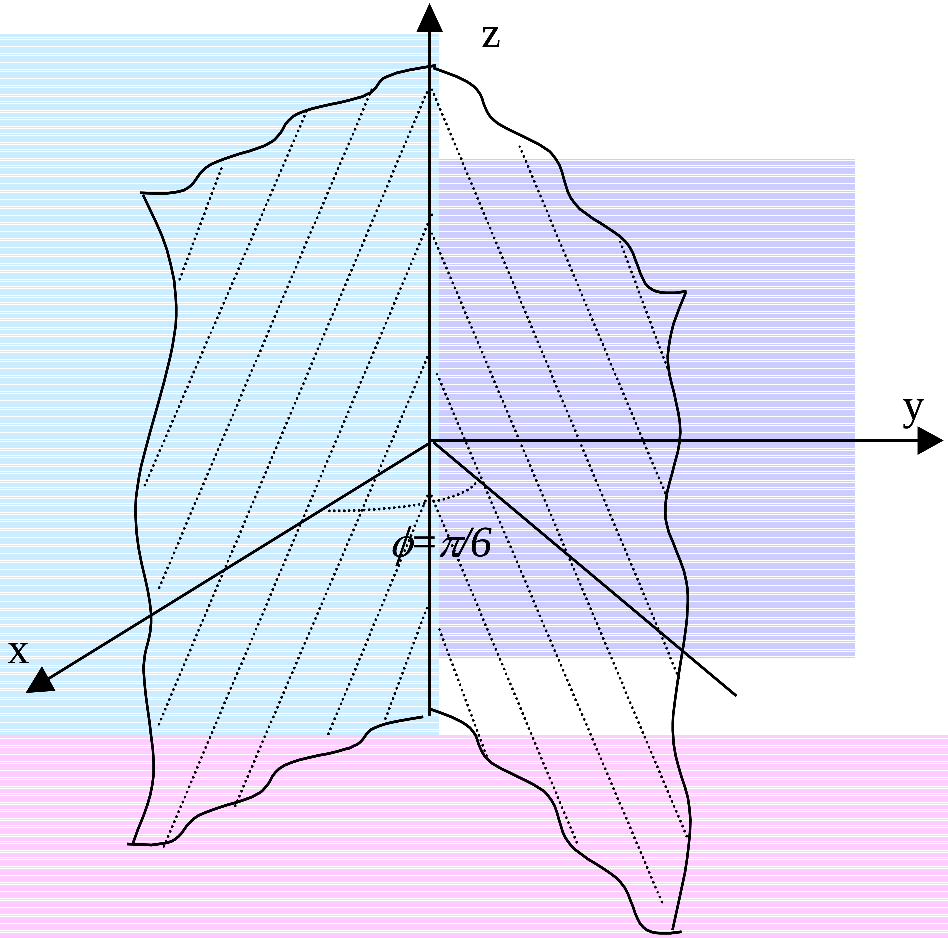
$V(\phi=0, \rho, z) = 0$

$B=0$

y $V(\phi=\pi/6, \rho, z) = 100$ V.

$$100 = A\pi/6$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{600}{\pi}$$



ECUACION DE LAPLACE

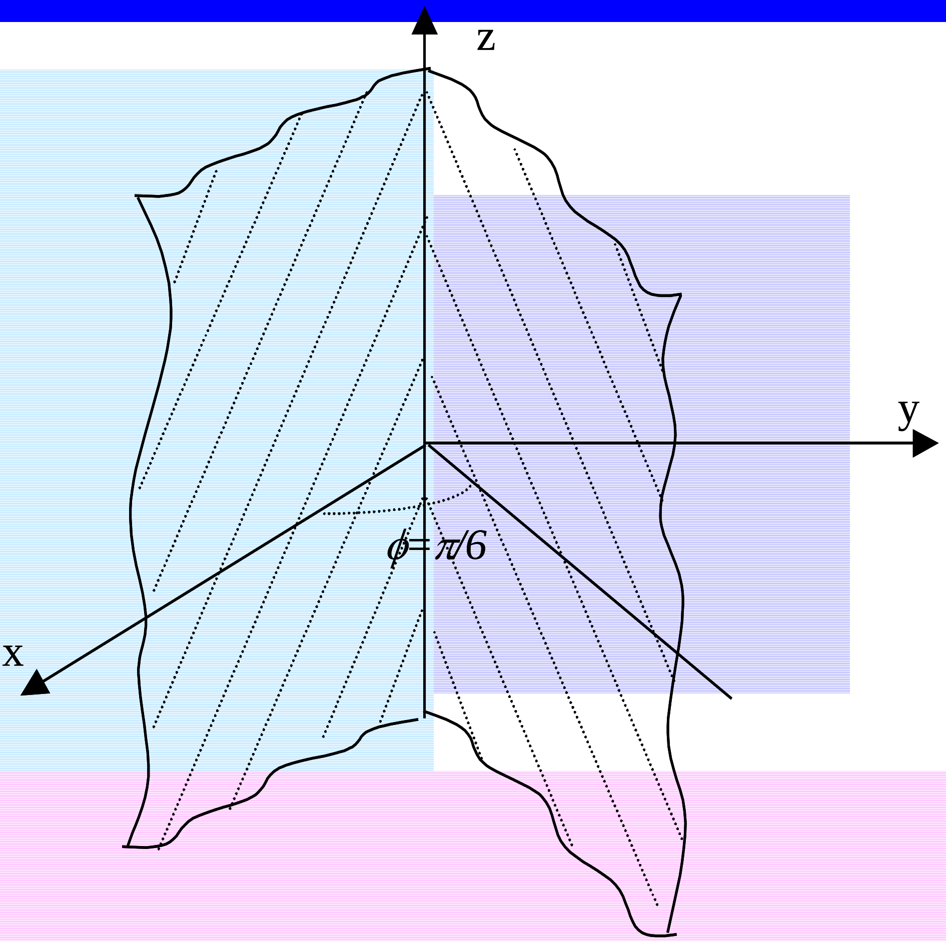
Luego el potencial es

$$V = \frac{600}{\pi}\phi$$

y el campo

$$\vec{E}(r) = -\nabla V(r) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{600}{\pi\rho}\hat{\phi}$$



Campo Eléctrico Conservativo

Previa: Si $f(\vec{r})$ Es un campo escalar, entonces

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

luego, tomando el rotor de la ecuación

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

Campo Eléctrico Conservativo

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Integrando en S

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \bullet d\vec{s} = 0$$

Aplicando el teorema de Stokes

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \bullet d\vec{s} = \oint_{C(S)} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Donde C(S) es el contorno que limita a la superficie S

Campo Eléctrico Conservativo

Luego

$$q \oint_{C(S)} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \oint_{C(S)} \vec{F} \bullet d\vec{l} = Wneto = 0$$

La fuerza proveniente de un campo electroestático es una fuerza conservativa.