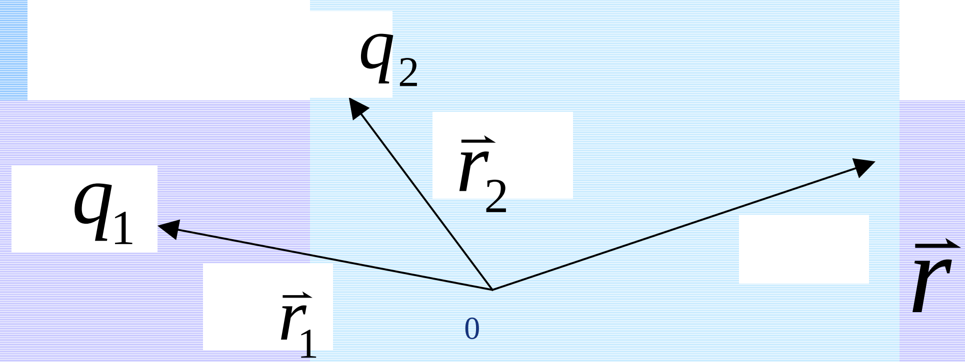
Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

FI33A ELECTROMAGNETISMO
Clase 2

- Distribuciones continuas de carga
- Ley de Gauss

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

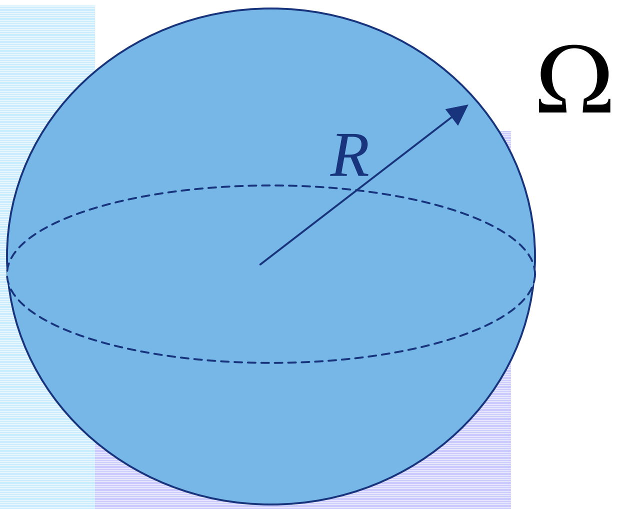
Campo Eléctrico de un Sistema de Cargas



$$\vec{E} = \sum_{k=1}^{m} \frac{q_k(\vec{r} - \vec{r}_k)}{4\pi\,\varepsilon_0 \,\|\, \vec{r} - \vec{r}_k \,\|^3}$$

Distribuciones Continuas de Carga

Carga Total distribuida en forma uniforme en la esfera de radio R es Q



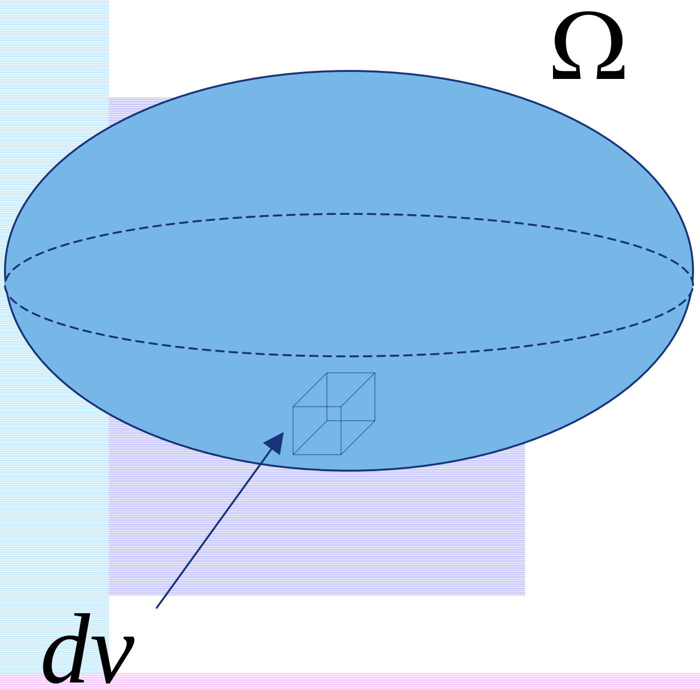
Podemos definir una densidad de carga por unidad de volumen ρ

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \; [C/m^3]$$

Distribuciones Continuas de Carga

En general se define la densidad de carga por unidad de volumen $\rho(r)$

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta v} \frac{\Delta q}{\Delta v} [C/m^3]$$



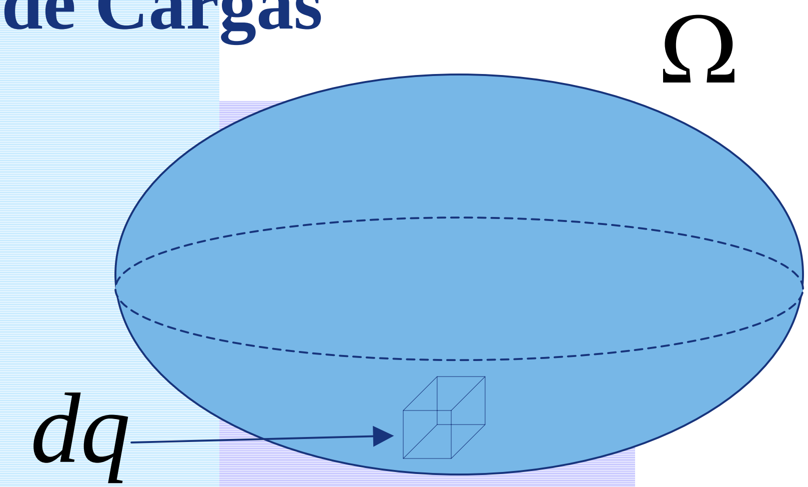
Luego si conocemos la densidad de carga ρ, la carga contenida en un elemento infinitesimal de volumen es

$$dq = \rho(\vec{r})dv \quad [C]$$

Distribuciones Continuas de Carga

Campo Eléctrico de un Sistema de Cargas

$$\vec{E} = \sum_{k=1}^{m} \frac{q_k (\vec{r} - \vec{r}_k)}{4\pi\,\varepsilon_0 \,\|\, \vec{r} - \vec{r}_k \,\|^3}$$



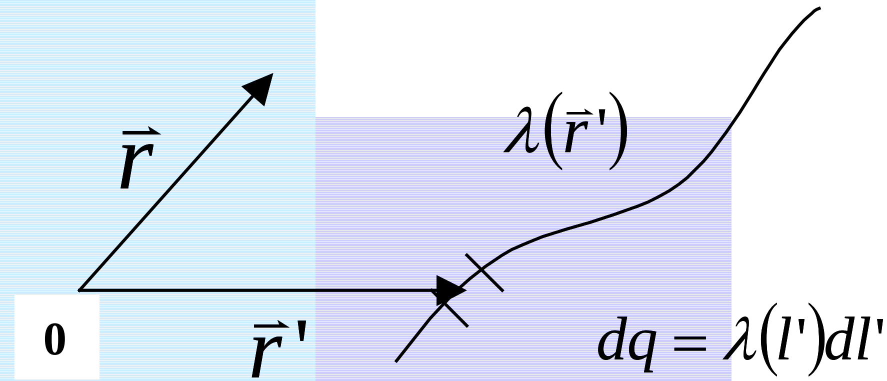
Para distribuciones contínuas de carga $\Sigma \rightarrow \int$ **y** $q \rightarrow dq$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int_{r'} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\|\, \vec{r} - \vec{r}\,' \,\|^3}\, dq \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\|\, \vec{r} - \vec{r}\,' \,\|^3}\, \rho(\vec{r}\,')\, dv$$

Distribuciones Continuas de Carga

Para distribuciones lineales de carga usamos densidades lineales

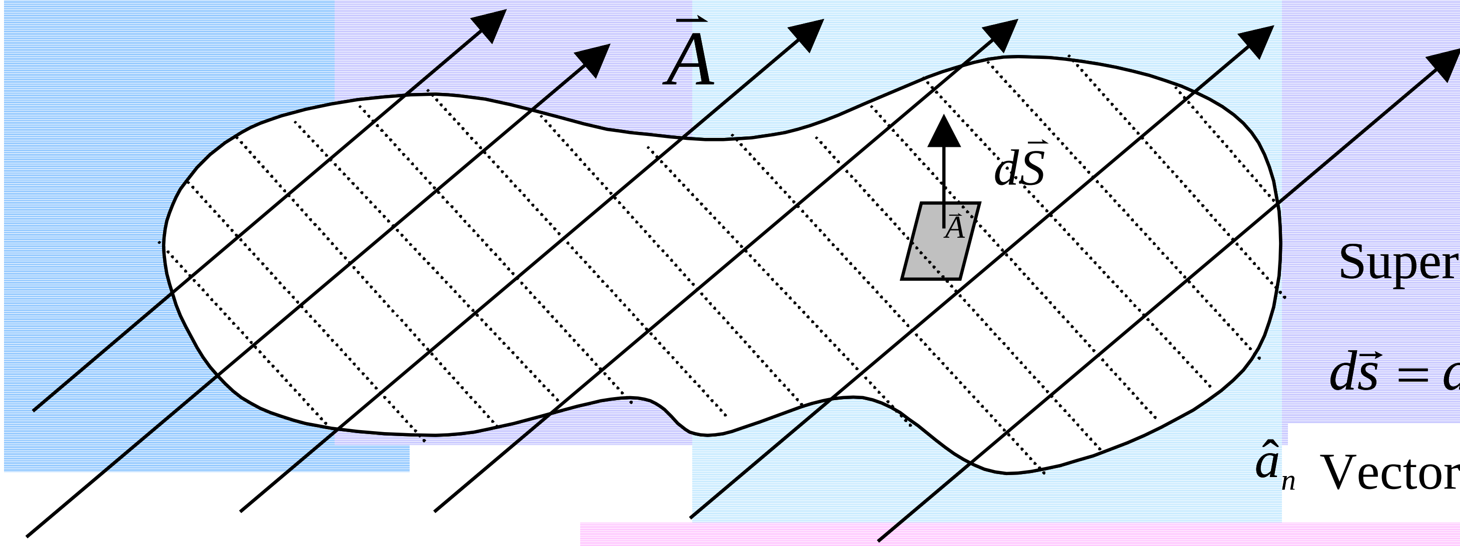
$$\lambda(\vec{r}) = \lim_{\Delta l} \frac{\Delta q}{\Delta l} [C/m]$$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int_{r'} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,\|^3}\, dq' \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int_{l_1}^{l_2} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,\|^3}\, \lambda(\vec{r}\,')dl'$$

LEY DE GAUSS: Conceptos previos

Flujo $\vec{A}$ campo vectorial definido en todo el espacio y una superficie S



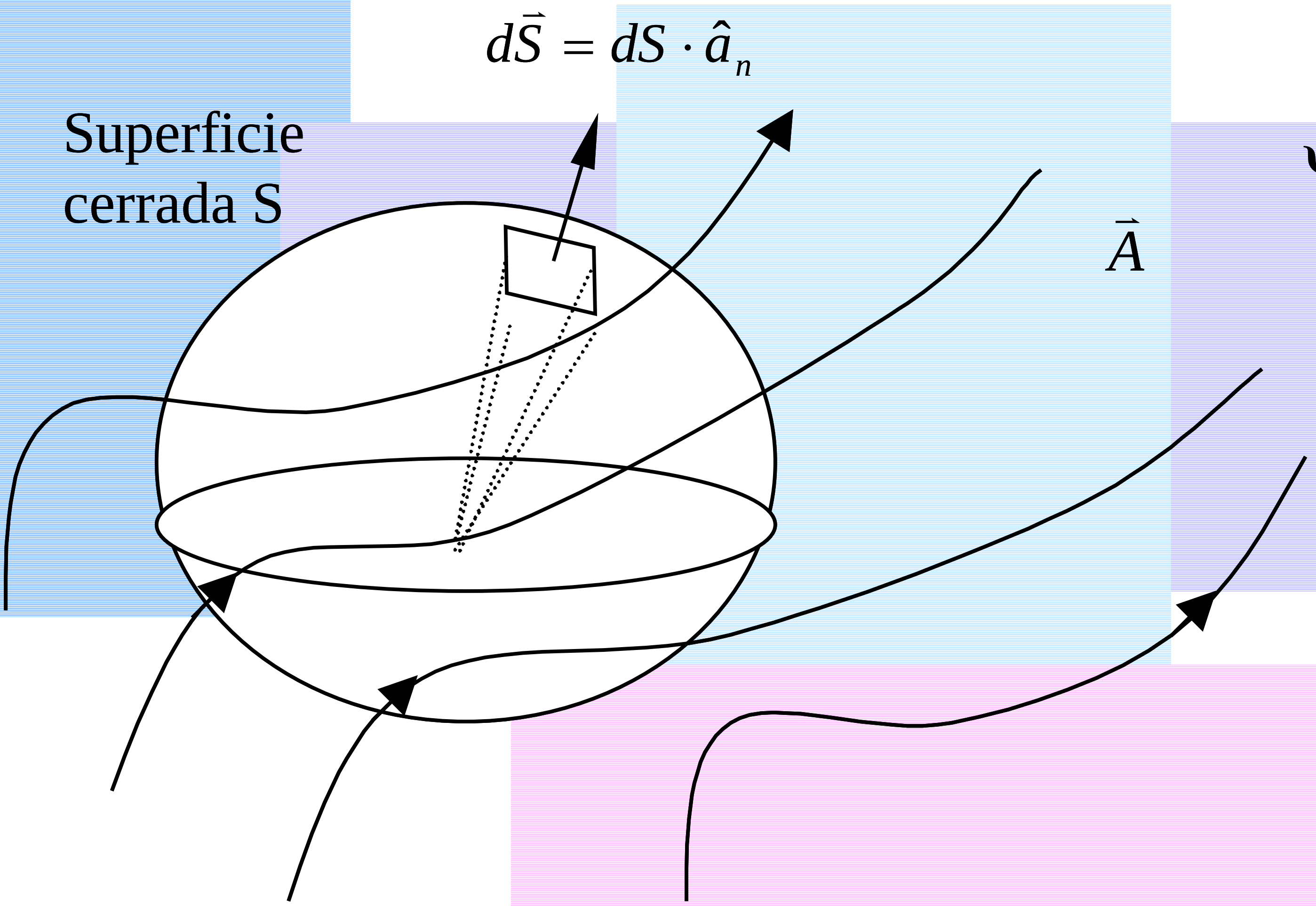
Superficie S

$$d\vec{s} = ds \cdot \hat{a}_n$$

$\hat{a}_n$ Vector unitario normal a S

$$\Psi = \iint_S \vec{A} \bullet d\vec{s}$$

flujo ψ de a través de la superficie S



$$\Psi = \oiint_S \vec{A} \bullet d\vec{S}$$

Teorema de la divergencia

$$\oiint \vec{A} \bullet d\vec{S} = \iiint_{V(s)} \nabla \bullet \vec{A} dv \qquad (1.43)$$

$$\nabla = \frac{\partial \hat{i}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{j}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{k}}{\partial z}$$

Ley de Gauss

$$\Psi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es igual a la carga total encerrada por dicha superficie (Q_T) dividida por la constante ε_0

Dado que $$Q_T = \iiint_V \rho dV$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

Luego, por el teorema de la divergencia

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \iiint_V \nabla \bullet \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

Entonces:

$$\boxed{\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

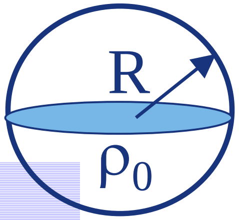
Vector Desplazamiento

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

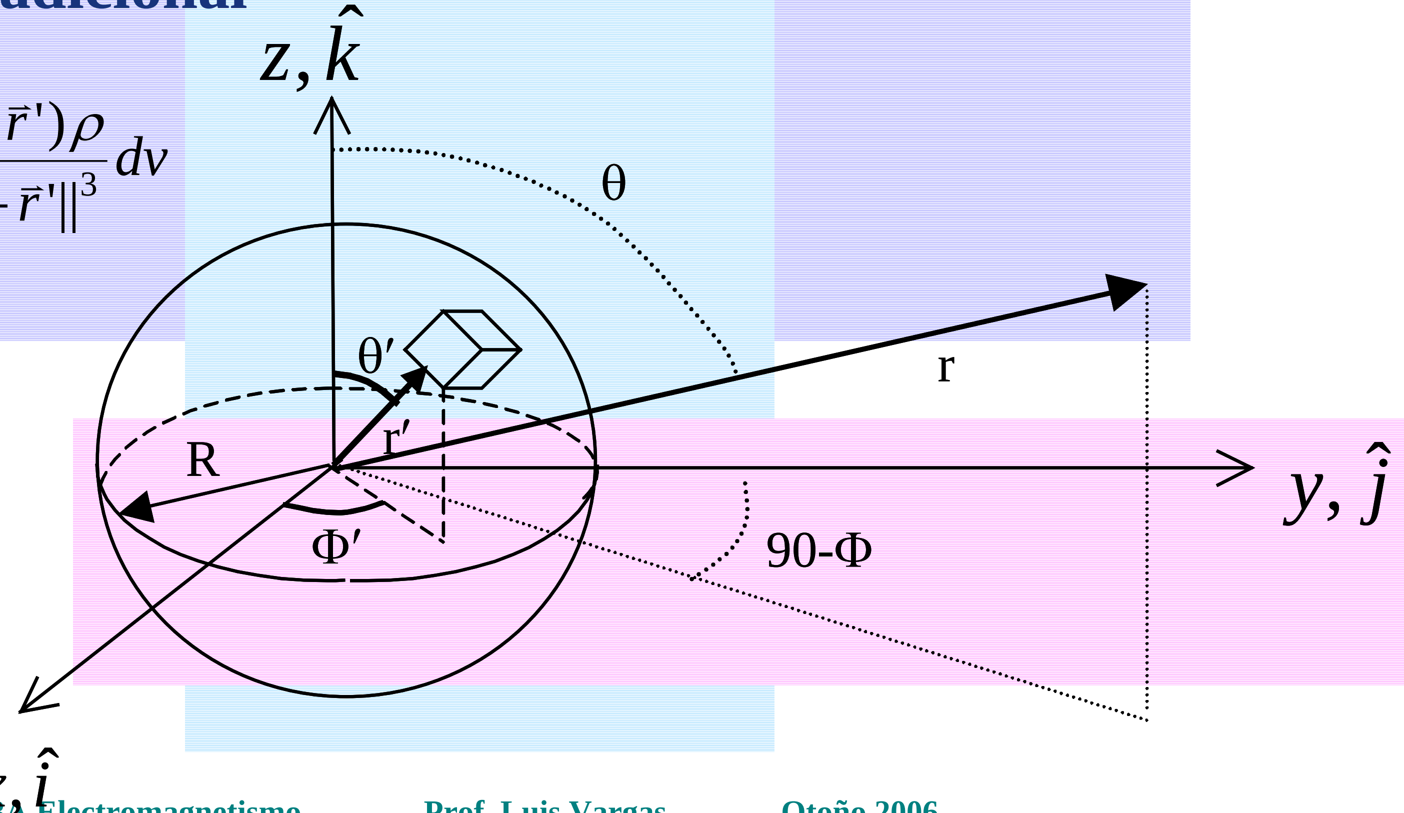
(1.48) Esta ecuación es la 1ª Ecuación de Maxwell.

Ejemplo. Calcular el campo eléctrico en todo el espacio de una distribución homogénea de carga ρ_0 dispuesta en una esfera de radio R.

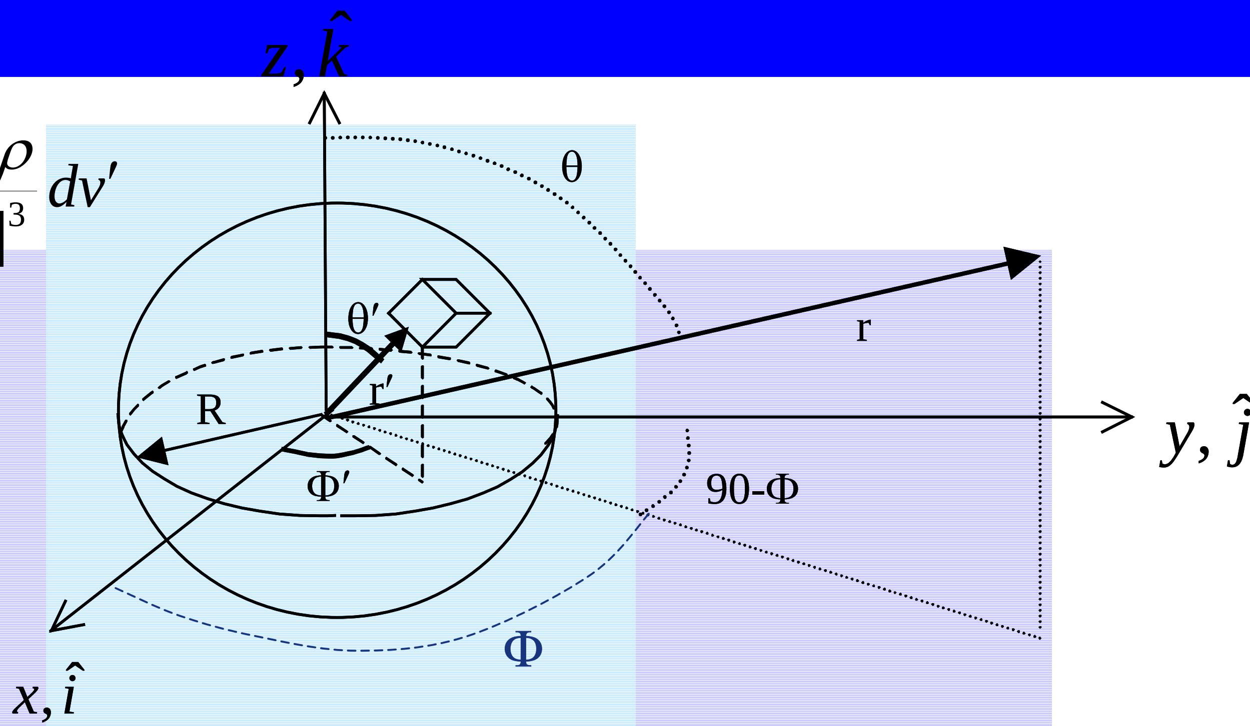


Sol^n **1. Método tradicional**

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underset{(r)}{\int_0^R} \underset{(\phi)}{\int_0^{2\pi}} \int_0^{\pi} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\rho}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} dv$$



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underset{(r)}{\int_0^R} \underset{(\phi)}{\int_0^{2\pi}} \int_0^{\pi} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\rho}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\, dv'$$



$$\vec{r}\,' = r'\sin\theta'\cos\phi'\,\hat{i} + r'\sin\theta'\sin\phi'\,\hat{j} + r'\cos\theta'\,\hat{k}$$

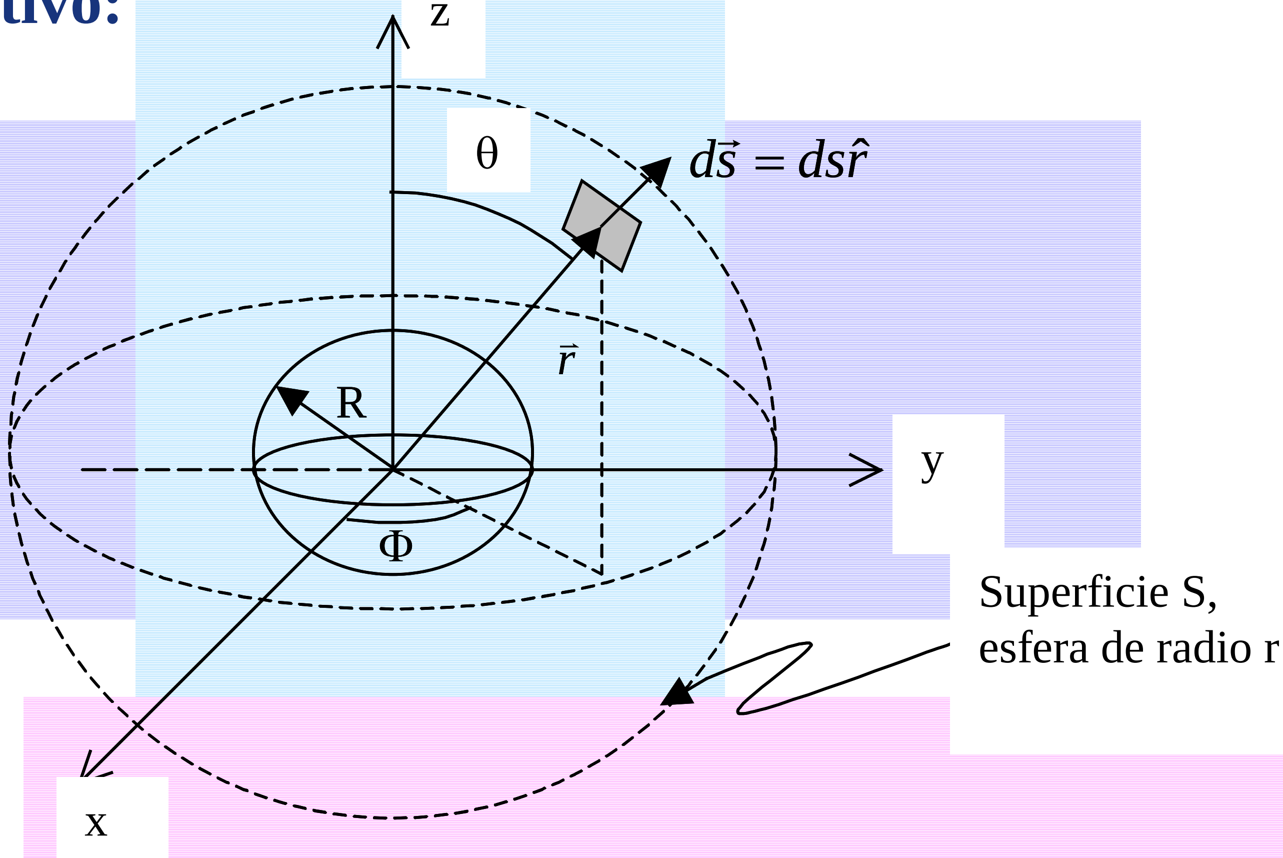
$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + r\sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + r\cos\theta\,\hat{k}$$

$$dv' = r'd\theta'\, r'\sin\theta'\, d\phi'\, dr'$$

$$dv' = r'^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\phi'\, dr'$$

2. Método alternativo:

Ley de Gauss



Para r > R

$$\oiint \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

Calculemos la carga total encerrada en S.

$$Q = \iiint \rho_0 \, dv$$

$$Q = \int_{(r)}^{R} \int_{(\phi)}^{2\pi} \int_{(\theta)}^{\pi} \rho_0 r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho_0 r^2 \underbrace{\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi}}_{1-(-1)=2} d\phi dr$$

$$Q = \int_0^R \rho_0 r^2 2 \cdot 2\pi dr$$

$$Q = \rho_0 \frac{R^3}{3} 4\pi$$

Por simetría $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{E}(\vec{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}}$

$$d\vec{S} = rd\theta \cdot r\sin\theta d\phi\hat{r} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi\hat{r}$$

$$\oiint \vec{E} \bullet d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(\vec{r})\hat{r} \bullet r^2 \sin\theta d\theta d\theta d\phi\hat{r}$$

$$\cdots = \int_0^{\pi} 2\pi E(\vec{r}) r^2 \sin\theta d\theta = 2\pi E(\vec{r}) r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta$$

$$\cdots = E(\vec{r}) 2\pi\, r^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 4\pi\, r^2 E(\vec{r})$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(\vec{r}) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$\therefore E(\vec{r}) = \frac{R^3}{3r^2}\rho\,\hat{r}$$

i) La ley de Gauss es útil cuando hay simetría,
ii) La ley de Gauss es valida para todo el espacio,
iii) Aplicarla requiere cierta destreza (la que se logra con práctica).