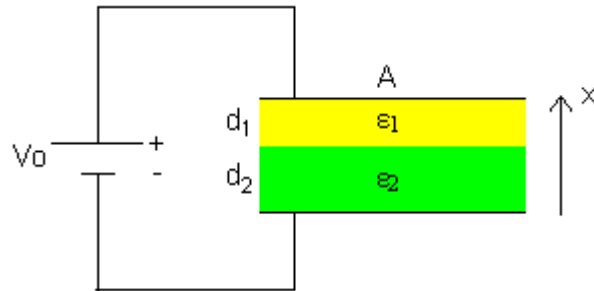


Pauta P2

a) Como tenemos dos medios, necesitamos dos potenciales, dos campos, etc. Para el material con ϵ_1 tendremos un potencial V_1 , mientras que para el material con ϵ_2 , potencial V_2 .



Usamos la relacion de Laplace $\nabla^2 V_1 = 0$

suponemos que $V_1 = V_1(x)$, por lo que nos queda

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = 0, \text{ de donde obtenemos que } V_1(x) = Bx + R.$$

De manera análoga, obtenemos que $V_2(x) = Fx + G$

y además, tenemos que $\vec{E} = -\nabla V$, de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= -B \hat{x} \text{ en la zona 1 y} \\ \vec{E}_2 &= -F \hat{x} \text{ en la zona 2.} \end{aligned}$$

Ahora, debemos calcular las constantes del campo. Para esto, necesitamos dos ecuaciones.

1° - Condicion de Borde: como el campo es normal a la interfaz dieléctrica, entonces podemos usar que

$$D_{2N} - D_{1N} = \sigma_{\text{libre}}$$

como los campos son normales y asumimos que son dieléctricos perfectos, nos queda que

$$\begin{aligned} D_2 - D_1 &= 0 \\ \epsilon_2 E_2 &= \epsilon_1 E_1 \\ E_2 &= \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 \\ F &= \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} B \\ (*) \end{aligned}$$

2º condicion: $\Delta V = V_0$, entre las placas (por enunciado).

$$\Delta V = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_0$$

como tenemos dos regiones, separamos la integral

$$- \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^{d_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + - \int_{d_1}^d \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$$

lo que nos da como resultado

$$- \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = B d_1 + F(d - d_1) = B d_1 + F d_2$$

Y como esta integral es igual a V_0 obtenemos la siguiente relación

$$V_0 = B d_1 + F d_2 \quad (**)$$

reemplazamos (*) en (**), obteniendo

$$V_0 = B d_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} B d_2 = B \left(d_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} d_2 \right)$$

$$B = \frac{\epsilon_2 V_0}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}$$

y, de esta manera, tenemos que

$$F = \frac{\epsilon_1 V_0}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}$$

Ahora, determinemos la densidad de carga en la placa superior

$$\vec{E}_1(S^+) = B(-\hat{x}) = \frac{\sigma}{\epsilon_1} \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_1} (-\hat{x}) \Rightarrow \sigma = B \epsilon_1$$

Ahora, la carga acumulada en esta placa es

$$Q = \int_A \sigma dS = \sigma A = B A \epsilon_1$$

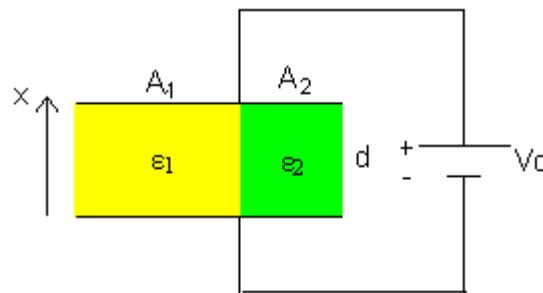
reemplazamos el valor de B y obtenemos

$$Q = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 V_0 A}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}$$

de donde obtenemos, usando que la capacidad es $C = \frac{Q}{\Delta V}$, el valor deseado

$$C = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 A}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}$$

b) Ahora, nuestra configuración es la siguiente



Nuevamente tenemos dos zonas, y ocupando el mismo argumento que en la parte a), podemos escribir

$$V_1(x) = Bx + R$$

$$V_2(x) = Fx + G$$

y, por lo tanto,

$$\vec{E}_1 = -B \hat{x} \quad \text{en la zona 1 y}$$

$$\vec{E}_2 = -F \hat{x} \quad \text{en la zona 2.}$$

donde las constantes nuevamente deben ser determinadas.

1º – condición de borde: Como el campo es paralelo (tangencial) a la interfaz dieléctrica, la condición de borde que nos sirve es la siguiente

$$E_{1T} = E_{2T}$$

$$E_1 = E_2$$

$$B = F$$

$$(***)$$

2º Potencial: Conocemos la diferencia de potencial, y como las constantes son iguales y no hay cambio de medio en el recorrido del campo, las constantes valen

$$B = F = \frac{V_0}{d}$$

La densidad de carga de la placa superior del condensador de la zona 1 vale

$$\vec{E}_1(S^+) = B(-\hat{x}) = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1} \hat{n} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1}(-\hat{x}) \Rightarrow \sigma_1 = B \epsilon_1$$

de manera análoga, obtenemos que $\sigma_2 = F \epsilon_2$

Entonces, la carga total en la placa superior vale

$$Q = \int_{A_1} \sigma_1 dS + \int_{A_2} \sigma_2 dS = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 = B A_1 \epsilon_1 + F A_2 \epsilon_2$$

reemplazando el valor de B y F, nos queda que

$$Q = \frac{V_0}{d} (A_1 \epsilon_1 + A_2 \epsilon_2)$$

y, la capacitancia vale

$$C = \frac{A_1 \epsilon_1 + A_2 \epsilon_2}{d}$$

c) Arreglando un poco el orden en el primer condensador, nos queda que

$$C = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 A}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} = \frac{A}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} = \frac{1}{\frac{d_1}{A \epsilon_1} + \frac{d_2}{A \epsilon_2}} = \frac{1}{\left(\frac{A \epsilon_1}{d_1}\right)^{-1} + \left(\frac{A \epsilon_2}{d_2}\right)^{-1}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$

lo que corresponde a la conexión en serie de dos condensadores, que es exactamente lo que tenemos en este problema. Por otro lado, para el segundo condensador

$$C' = \frac{A_1 \epsilon_1 + A_2 \epsilon_2}{d} = \frac{A_1 \epsilon_1}{d} + \frac{A_2 \epsilon_2}{d} = C'_1 + C'_2$$

Que corresponde a la conexión en paralelo de dos condensadores.

Además, es directo que ambas capacitancias convergen a la capacitancia típica de un condensador de placas planas cuando los dieléctricos son iguales: $C = C' = \frac{A \epsilon_0}{d}$

Asignación de puntaje:

a) y b) tienen 2.5 puntos cada una, asignados de la manera que sigue:

Buen uso de Laplace y V lineal: 0.5

E constante: 0.25

Condición de borde bien aplicada: 0.25

Condición para el potencial bien aplicada: 0.25

determinar constantes: 0.5

determinar carga: 0.25

capacidad: 0.5

En la parte b) no era necesario usar la condición de borde. De no haberla usado, ese puntaje se aplica para la determinación de la capacidad.

c)

Mostrar que en a) la conexión es en serie: 0.25

Mostrar que en b) la conexión es en paralelo: 0.25

Resolver para $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ 0.5

Errores de arrastre tienen como máximo la mitad del puntaje asignado a partir del error.