UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

EJERCICIO 1: Electromagnetismo - FI 33A

Jueves 23 de Marzo 2006

Profesor: Boris Chornik A.
P. Auxiliar: Loreto Oyarte G.
Luis Gutierrez L.

Una carga Q está distribuida con densidad uniforme en el volumen de una esfera de radio R. En el centro de la esfera hay una carga puntual $-Q$.

Calcular el trabajo necesario para llevar la carga puntual desde el centro de la distribución hasta el infinito.

SOLUCION:

Utilizamos la ley de Gauss para obtener el campo eléctrico generado por la esfera para dos casos: $0 \leq r \leq R$ y $R \leq r \leq \infty$.

Primero calculamos el campo eléctrico dentro de la esfera, para esto vemos que la densidad de carga viene dada por $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. Por lo tanto,

$$\oint \vec{E}_{dentro} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Qr^3}{R^3} \qquad \Leftrightarrow \qquad E_{dentro} 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Qr^3}{R^3}$$

$$E_{dentro} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r}{4\pi R^3} \qquad , 0 \leq r \leq R$$

Ahora repetimos el cálculo para la región fuera de la esfera:

$$\oint \vec{E}_{fuera} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \Leftrightarrow \qquad E_{fuera} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_{fuera} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi r^2} \qquad , R \leq r \leq \infty$$

Ahora calculamos el trabajo que se ejerce sobre la carga $-Q$ para moverla desde el centro de la esfera hacia el infinito. Sabemos que el trabajo está dado por: $W = \int F dx = \int qE dx$, así

$$\begin{aligned} W_{0\to\infty} &= \int_0^R -QE_{dentro} dr + \int_R^\infty -QE_{fuera} dr = -Q\left\{\int_0^R \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r}{4\pi R^3} dr + \int_R^\infty \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi r^2} dr\right\} \\ &= \frac{-Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int_0^R \frac{r}{R^3} dr + \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr\right\} = \frac{-Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left.\frac{r^2}{2R^3}\right/_0^R + \left.\frac{-1}{r}\right/_R^\infty\right\} = \frac{-Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}\right\} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{W_{0\to\infty} = \frac{-3Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$