

Por otro lado también se puede escribir

$$\begin{aligned}
 \vec{B}_{\mathcal{S}} &= \int \vec{K}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\mathcal{S}' \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{K} \times \nabla_r \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{S}' \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_r \times \int \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{S}'
 \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

que implica que la contribución al potencial vectorial de la densidades de corriente de superficie es

$$\vec{A}_{\mathcal{S}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_0 - \vec{r}'\|} \right) \vec{K}(\vec{r}') d\mathcal{S}' \tag{4.2.15}$$

### 4.2.3. Ejemplo

Dada la corriente  $I$  a lo largo de un alambre recto infinito se puede calcular  $\vec{A}$  usando (4.2.10). El elemento de camino es  $\hat{k} dz$  y se debe calcular

$$\begin{aligned}
 \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I \hat{k}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + z^2}} \right) dz \\
 &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \hat{k}
 \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

## 4.3. Ley circuital de Ampère

En lo que sigue se demostrará que en régimen permanente (es decir con  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ ),

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \tag{4.3.1}$$

Previamente es necesario hacer dos demostraciones.

- a) Se demostrará que la integral de volumen del Laplaciano de  $1/r$  calculada en cualquier volumen *que contenga al origen* vale  $-4\pi$ . Para comprender esta demostración es necesario tener claro que el Laplaciano de  $1/r$  es nulo en todas partes, excepto en el origen. Por lo tanto la integral

que se va a estudiar no depende de la forma del volumen  $\mathcal{V}$  considerado, sólo depende de si el origen está o no dentro de  $\mathcal{V}$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{V}} \nabla^2 \frac{1}{r} d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{r} \right) d\mathcal{V} \\
 &= \oint_{\partial\mathcal{V}} \nabla \frac{1}{r} \cdot d\vec{S} \\
 &= \oint_{\partial\mathcal{V}} \left( -\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot \hat{r} r^2 d\Omega \\
 &= -4\pi
 \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Arriba  $d\Omega$  es el elemento de ángulo sólido. El ángulo sólido que subtiende una superficie cerrada que no contiene al origen es cero y el de una superficie que contiene al origen es  $4\pi$ . Se usó el elemento de superficie de una esfera centrada en el origen aprovechando que el resultado no depende de la forma del volumen.

El resultado anterior se escribe

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(x) \delta(y) \delta(z) \tag{4.3.3}$$

donde la “dunci3n”  $\delta$  es nula en todas partes excepto el origen y adem3s  $\int_a^b \delta(x) dx = 1$  siempre y cuando el intervalo  $a-b$  contenga al origen.

• b) Si se toma el rotor de  $\vec{B}$  a partir de la expresi3n (4.2.2) y se tiene presenta la identidad  $\nabla \times (\nabla \times \vec{C} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - \nabla^2 \vec{C}$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{4\pi}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= \nabla \times \left( \nabla \times \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' \right) \\
 &= \nabla \left( \nabla \cdot \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' \right) - \nabla^2 \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}'
 \end{aligned}$$

De estas dos contribuciones, se puede afirmar inmediatamente que gracias a (4.3.2) arroja  $4\pi\vec{J}(\vec{r})$ . La primera contribuci3n requiere de m3s an3lisis:

parentesis en 1er t3rmino =

$$\begin{aligned}
 &= \int \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' \\
 &= - \int \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' \\
 &= - \int \nabla' \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' + \int \frac{\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}'
 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Siendo estas integrales en todo el espacio, la primera es nula porque puede convertirse en una integral de superficie a distancia infinita. La segunda es nula porque en magnetostática se cumple que  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ .

Se concluye entonces que (4.3.1) se cumple.

Un corolario sigue de inmediato. Si se integra la relación (4.3.1) sobre una sección  $S$  parcial de un conductor por el que circula la densidad  $\vec{J}(\vec{r})$ , se tiene, por el teorema de Stokes, que el lado izquierdo puede ser escrito como la integral sobre un camino cerrado  $\Gamma$  que corresponde al borde de la sección  $S$ , entonces,

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (4.3.5)$$

esto es,

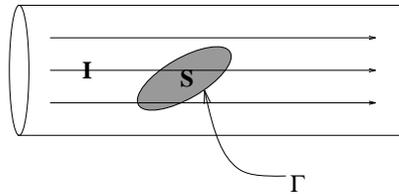


Figura 4.8: La corriente que corta superficie  $S$  puede determinarse integrando al campo magnético en  $\Gamma = \partial S$ .

$$\oint_{\Gamma=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\mathcal{S}} \quad (4.3.6)$$

que se conoce como la forma integral de la *ley circuital de Ampère*.  $I_{\Gamma}$  es la corriente que corta a *cualquier superficie*  $\mathcal{S}$  cuyo borde es  $\Gamma$ .

Lo visto en este capítulo permite calcular campos magnéticos en diversas situaciones. En casos muy simétricos es posible calcular campos magnéticos haciendo uso de la ley circuital de Ampère. En otros hay que conformarse con (4.2.7) o con un cálculo del potencial.

**EJERCICIO 4.3-1.** *Demostrar que el campo que hay en el interior de una bobina toroidal de  $N$  vueltas y corriente  $I$  en cada vuelta depende tan solo de la distancia  $\rho$  al eje del toro y del vector unitario  $\hat{\phi}$ ,*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad (4.3.7)$$

#### 4.4. Fuerza magnética

De (4.1.4) se desprende que la fuerza de Lorentz  $d^3\vec{F}$  que actúa sobre un elemento de volumen  $d^3\mathcal{V}$  de un conductor debido a un campo magnético externo  $\vec{B}(\vec{r})$  es,

$$\begin{aligned} d^3\vec{F} &= \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) d^3\mathcal{V} \\ &= d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}) \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

El segundo paso se logró haciendo uso de (3.3.10). Si se integra sobre la sección del conductor se obtiene la fuerza  $d\vec{F}$  que actúa sobre un elemento de largo  $d\vec{r}$  de un conductor debido a un campo magnético externo  $\vec{B}(\vec{r})$ ,

$$d\vec{F} = I d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (4.4.1)$$

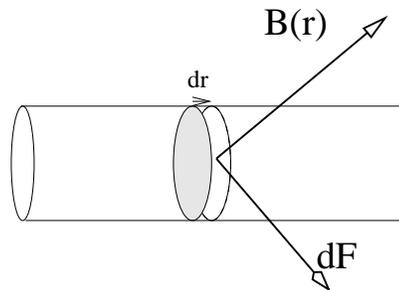


Figura 4.9: La fuerza  $d\vec{F}$  que aparece en una tajada de largo  $d\vec{r}$  de un conductor cuando está presente un campo externo  $\vec{B}$ .

Si se integra la expresión anterior sobre todo el circuito se obtiene la fuerza total

$$\vec{F} = I \oint_{\Gamma} d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (4.4.2)$$

que actúa sobre el circuito debido a la presencia de un campo magnético externo  $\vec{B}$ . Esta fuerza no está localizada, es decir, no actúa sobre un punto del circuito sino que sobre cada elemento infinitesimal del circuito actúa una pequeña fuerza y la suma total de esas fuerzas, que están actuando en diferentes puntos, dan (4.4.2).

**EJERCICIO 4.1-4.** Si se tiene un circuito cerrado por el que circula una corriente  $I$ , demostrar que la fuerza neta que actúa sobre el circuito, por efecto de la presencia de un campo magnético externo uniforme, es nula.

La fuerza por metro, entre dos alambres infinitos paralelos, separados por 1 metro, cada uno llevando una corriente de 1 Ampère, es aproximadamente de  $2 \times 10^{-7}$  newtons

Se puede reescribir esta relación tomando, en lugar de un campo externo  $\vec{B}$ , el elemento de campo magnético  $d\vec{B}$  que se obtuvo en (4.1.8). De tal manera se obtiene la fuerza  $d^2\vec{F}$  que actúa sobre el elemento  $d\vec{r}$  de un conductor debido a la parte del campo magnético que produce el elemento  $d\vec{r}'$  del conductor "prima", que lleva a la *Ley de Ampère*,

$$d^2\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I' I \frac{d\vec{r} \times (d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (4.4.3)$$

Integrando se obtiene la fuerza neta que actúa sobre el circuito  $\Gamma$  debido al circuito  $\Gamma'$ :

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} I' I \oint_{\Gamma'} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{r} \times (d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (4.4.4)$$

EJERCICIO 4.1-6. *Demostrar que la fuerza (4.4.4) obedece el principio de acción y reacción.*

Se puede aplicar (4.4.1) en forma muy sencilla para calcular el torque que actúa sobre un circuito debido a la interacción entre la corriente que circula por él y un campo magnético externo. Puesto que

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F} = I\vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) \quad (4.4.5)$$

se obtiene que el torque que actúa sobre un circuito filiforme completo es

$$\vec{\tau} = I \oint_{\Gamma} \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})) \quad (4.4.6)$$

A modo de ejemplo se encontrará una forma diferente de expresar el torque que actúa sobre un circuito debido a la presencia de un campo magnético externo uniforme  $\vec{B}_0$ . En este caso la integral (4.4.6) para el torque se reduce a

$$\vec{\tau} = I \oint (\vec{r} \cdot \vec{B}_0 d\vec{r} - \vec{r} \cdot d\vec{r} \vec{B}_0) \quad (4.4.7)$$

pero como  $\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} d(\vec{r} \cdot \vec{r})$  es una diferencial exacta, entonces no contribuye a la integral sobre un camino cerrado, de modo que la integral anterior proviene tan solo del primer término en el integrando.

Por otro lado notemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \oint d(\vec{r} \cdot \vec{B}_0 \vec{r}) \\ &= \oint d(\vec{r} \cdot \vec{B}_0 d\vec{r} + d\vec{r} \cdot \vec{B}_0 \vec{r}) \end{aligned}$$

por lo cual el torque ahora se puede escribir

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \frac{1}{2} I \oint \{ \vec{r} \cdot \vec{B}_0 d\vec{r} - d\vec{r} \cdot \vec{B}_0 \vec{r} \} \\ &= \frac{1}{2} I \oint (\vec{r} \times d\vec{r}) \times \vec{B}_0 \\ &= \frac{1}{2} I \vec{\mathcal{S}} \times \vec{B}_0 \\ &= \vec{m} \times \vec{B}_0 \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

El vector  $\vec{\mathcal{S}}$  tiene magnitud de superficie; en el caso que la curva  $\Gamma$  sea plana, coincide con la superficie encerrada por dicha curva. Más en general  $\vec{\mathcal{S}}$  tiene como primera componente  $\mathcal{S}_x = \mathcal{S}_{YZ}$  a la superficie encerrada por la proyección de la curva  $\Gamma$  sobre el plano  $YZ$ . En forma cíclica se definen las otras componentes. El producto

$$\vec{m} = I \vec{\mathcal{S}} \quad (4.4.9)$$

tendrá importancia más adelante. Se lo llama el *momento dipolar magnético* del circuito.

## 4.5. Una partícula en un campo magnético uniforme

Como ya se dijo en (4.1.4), una partícula cargada que se mueve en presencia de un campo magnético está sometida a la fuerza de Lorentz,

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (4.5.1)$$

Si no hay más fuerzas sobre la partícula, la ecuación de movimiento para ella es,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (4.5.2)$$

Si se multiplica a ambos lados de la ecuación escalarmente por  $\vec{v}$  se obtiene que  $m\vec{v} \cdot (d\vec{v}/dt) = 0$ , lo que equivale a afirmar que,

$$\frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \text{constante} \quad (4.5.3)$$

La energía cinética de la partícula no cambia en el tiempo. Por lo tanto la fuerza de Lorentz en este caso no efectúa trabajo. La velocidad mantiene su magnitud.

Si se multiplica la ecuación (4.5.2) punto  $\vec{B}$  se obtiene,

$$m\vec{B} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad (4.5.4)$$

Todo lo anterior vale para cualquier campo magnético externo.

Si el campo magnético no depende del tiempo entonces (4.5.4) implica inmediatamente que la derivada de  $\vec{v} \cdot \vec{B}$  es constante. Puesto que  $\|\vec{v}\|$  es constante, lo anterior implica que la proyección de  $\vec{B}$  a la dirección de la velocidad es una constante.

En particular, si  $\vec{B}$  es además uniforme, el ángulo  $\alpha$  entre la velocidad y  $\vec{B}$  permanece constante.

Se estudiará con más detalle este particularísimo caso. Conviene escoger el eje  $Z$  paralelo a  $\vec{B}$ , esto es,  $\vec{B} = B\hat{k}$ . La velocidad en la dirección de  $Z$  es constante porque no hay fuerza en esa dirección, lo que implica que  $v_1^2 + v_2^2 = \text{constante}$ . Si se denota por  $v_h^2$  a esa constante, entonces,

$$\begin{aligned} v_1 &= v_h \cos \phi \\ v_2 &= v_h \sin \phi \end{aligned}$$

Al reemplazar esta forma en la ecuación de movimiento se obtiene inmediatamente que,

$$\omega = \dot{\phi} = -\frac{qB}{m} \quad (4.5.5)$$

que implica que la velocidad angular es constante.

Recopilando lo ya obtenido la velocidad puede escribirse como,

$$\vec{v} = v_h[\hat{i}\cos(\omega t) + \hat{j}\sin(\omega t)] + \hat{k}v_3 \quad (4.5.6)$$

Toda la dependencia en el tiempo ha sido escrita en forma explícita. Es obvio también que si se denomina  $v_0$  a la magnitud de la velocidad, entonces,

$$\begin{aligned} v_3 &= v_0 \cos \alpha \\ v_h &= v_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

Y las ecuaciones para determinar el movimiento son,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 \sin \alpha \cos(\omega t) \\ \dot{y} &= v_0 \sin \alpha \sin(\omega t) \\ \dot{z} &= v_0 \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{v_0}{\omega} \sin \alpha \sin(\omega t) \\ y(t) &= y_0 + \frac{v_0}{\omega} \sin \alpha \cos(\omega t) \\ z(t) &= z_0 + v_0 t \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

La proyección del movimiento al plano  $XY$  es una circunferencia de radio

$$R = \frac{m}{qB} v_0 \sin \alpha \quad (4.5.9)$$



llamada aproximación *dipolar magnética*

$$\vec{A}_{\text{dipolo}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\vec{r}'' \cdot \vec{\Delta}}{\Delta^3} d\vec{r}'' \quad (4.6.4)$$

No es difícil demostrar, siguiendo pasos análogos a los que se utilizó al deducir (4.4.8), que la integral anterior puede ser transformada en

$$\vec{A}_{\text{dipolo}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{I}{2} \oint_{\Gamma} \vec{r}'' \times d\vec{r}'' \right) \times \frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3} \quad (4.6.5)$$

La cantidad encerrada entre paréntesis redondos, que tiene la forma ya conocida  $I\vec{\mathcal{S}}$ , será llamada *momento dipolar magnético*  $\vec{m}$ ,

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_{\Gamma} \vec{r}'' \times d\vec{r}'' \quad (4.6.6)$$

Entonces se obtiene finalmente que

$$\vec{A}_{\text{dipolo}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (4.6.7)$$

y se refiere al potencial vectorial en  $\vec{r}$  de un *dipolo magnético* ubicado en  $\vec{r}'$ .

El campo magnético asociado

$$\vec{B}_{\text{dipolo}}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}_{\text{dipolo}}(\vec{r}) \quad (4.6.8)$$

se puede calcular derivando y se puede demostrar que es

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{dipolo}}(\vec{r}) &= -\mu_0 \nabla \left( \frac{\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right) \\ &= -\mu_0 \nabla \varphi_{\text{dipolo}}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

donde  $\varphi(\vec{r})$  es el *potencial escalar* asociado al campo magnético lejano de un circuito,

$$\varphi_{\text{dipolo}}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (4.6.10)$$

También es posible definir formalmente un potencial escalar asociado al campo magnético de un circuito filiforme  $\Gamma$  cualquiera por el cual circula una corriente  $I$ . El circuito se *cuadrícula* en circuitos muy pequeños, es decir, una superficie que se apoya en  $\Gamma$  es parcelada en sectores infinitesimales  $d\vec{\mathcal{S}}'$ , por cuyo perímetro se supone ficticiamente que circula una

corriente  $I$ , de tal modo que la frontera entre dos de estas subdivisiones tiene corriente neta nula, entonces se puede ver que el potencial escalar magnético asociado es

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \int \frac{d\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \\ &= \frac{I}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{\mathcal{S}}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}\end{aligned}\quad (4.6.11)$$

donde se ha usado (4.4.9), es decir,  $d\vec{m} = Id\vec{\mathcal{S}}'$ .

Más en general la corriente  $I$  debiera ser reemplazada por una integral de  $\vec{J}$  y no debe perderse de vista que esta definición da el campo neto (4.6.11) sólo para aquellos puntos  $\vec{r}$  en los cuales la densidad de corriente es nula.

Este resultado cobrará especial importancia cuando se discuta magnetismo en materia.

## 4.7. Problemas

- 4.1 Calcular el campo magnético que produce un conductor cilíndrico infinito de radio  $a$  por el cual circula una densidad de corriente uniforme  $\vec{J}_0$ .
- 4.2 Calcule el potencial vectorial asociado al campo magnético debido a una corriente  $I$  que circula por un alambre recto infinito usando directamente la expresión integral para  $\vec{A}$  y demuestre que es

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \hat{k} \quad (4.7.1)$$

- 4.3 Calcule la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre un alambre recto infinito por el cual circula una corriente  $I_1$  si a distancia  $a$  de él hay un alambre recto infinito y paralelo al primero, por el cual circula una corriente  $I_2$ .
- 4.4 Una densidad de corriente  $\vec{J} = J_0 \hat{\phi}$  circula por el volumen de un cilindro metálico recto de radio externo  $b$  y radio interno  $a$ . Determine el campo magnético: para  $\rho < a$ ; para  $a \leq \rho \leq b$ ; y para  $\rho > b$ .