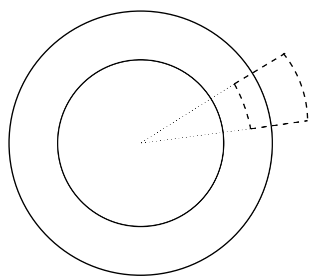
s.E6: La corriente total que sube por el cilindro de radio a se obtiene integrando la magnitod de $\vec{K}$ en una línea trasversal a la corriente. Esto da: $I_a = 2\pi a K_0$. Lo razonable es suponer que en la zona interior con $a \leq \rho \leq b$ el campo tiene la forma $\vec{B} = B(\rho)\,\hat{\phi}$. La ley circuital de Ampère lleva entonces inmediatamente a que

$$\vec{B} = \frac{aK_0}{\rho}\,\hat{\phi}$$

en el espacio interior y, como se reafirma en lo que sigue es nulo afuera.



Como se verá la misma ley circuital ayuda a ver que el campo afuera de esta "caja" es nulo. Puesto que la corriente total que sube por el cilindro interior tiene que ser igual a la que baja por el cilindro exterior, entonces la magnitud de la densidad de corriente en el cilincro externo es $K_b = aK_0/b$. Si se toma un camino cerrado formado por dos arcos de circunferencia y dos lados radiales, que forman un ángulo α, como muestra la figura, la corriente que cruza la superficie apoyada en este camino es $K_b\, b\,\alpha = aK_0\alpha$. Si se integra el campo $\vec{B}$ solo tiene que contribuir el arco interior, de radio arbitrario ρ. La integral $\int \vec{B}\cdot d\vec{r}$ sobre ese arco da $\int \frac{aK_0}{\rho}\,\rho\, d\alpha = aK_0\alpha$ de modo que se cumple la ley circuital con campo nulo afuera. La densidad de corriente en la superficie superior se obtiene de exigir que su integral en toda una circunferencia valga I_a. Resulta $\vec{K} = \frac{aK_0}{\rho}\hat{\rho}$. Se escoge un camino que es el perímetro de un trozo de manto de cilindro de radio ρ, con dos lados verticales y dos lados horizontales. Estos último uno dentro y otro sobre la "caja". Al integrar $\vec{B}$ en este perímetro vuelve a contribuir sólo el arco de circunferencia interior y da, como antes, $aK_0\alpha$. También es trivial ver que la corriente que corta este trozo de manto vale lo mismo. Esto reafirma que el campo afuera es nulo.

Para determinar el potencial conviene pensar primero que el sistema tiene altura infinita, de modo que solo hay corriente circulando en sentido vertical. En tal caso el potencial tiene que ser muy parecido al que corresponde a un alambre recto infinito con corriente I. Se sugirió en clases determinar que ese potencial es $-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho}{\rho_0}\,\hat{k}$. En nuestro caso se escoge $\rho_0 = a$ y queda

$$\begin{aligned} \vec{A}(\rho < a) &= 0\,, \quad \vec{A}(a \leq \rho \leq b) = -\mu_0 K_0 \ln\tfrac{\rho}{a}\,\hat{k}\,, \\ \vec{A}(b \leq \rho) &= -\mu_0 K_0 \ln\tfrac{b}{a}\,\hat{k} \end{aligned}$$

que es un potencial continuo en ρ lo que se necesita porque $\partial A_z/\partial\rho$ debe estar bien definida. A esto se agrega que el potencial es nulo si $z < 0$ o si $z > h$. Esto no es problema porque $\nabla\times\vec{A}$ no contiene la derivada $\partial A_z/\partial z$ que se ha hecho singular.

Para calcular la fuerza sobre el circuido de abajo (en la figura del enunciado) se usa $\vec{F} = I\oint_\Gamma d\vec{r}\times\vec{B}$. Puesto que el campo existe solo adentro esa es la única parte que contribuye, pero además el campo es horizontal por lo que tan solo se debe integrar sobre las aristas verticales. Estas aristas verticales tienen, según el enunciado, coordenadas radiales $\rho_1 = b/4 + 3a/4$ y $\rho_2 = 3b/4 + a/4$ respectivamente. Puesto que $\vec{B} \propto \hat{\phi}$ y $d\vec{r} \propto \hat{k}$, las dos contribuciones a la fuerza son proporcionales a $\hat{\phi}\times\hat{k} = \hat{\rho}$. La fuerza resulta ser

$$\vec{F} = aK_0 d_1 \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2}\right)\,\hat{\rho} = -\frac{8aK_0 d_1 (b-a)\,\hat{\rho}}{(3b-a)(3a+b)}$$

(salvo por faltas que pueda haber cometido)