Capítulo 4

Magnetostática

4.1. Corrientes y campo magnético

La forma más directa de apreciar la existencia de campos magnéticos se relaciona con los imanes. Con ellos se puede atraer trozos de hierro. Una brújula es un imán de forma alargada que puede girar para alinearse con el campo magnético de la Tierra.

4.1.1. Anticipo

Es interesante observar que la ley de continuidad (3.1.6) unida a la ley de Coulomb conduce a la deducción formal que sigue. Si en (3.1.3) se reemplaza ρ por su expresión en la ley de Coulomb $\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$ se obtiene que,

$$\nabla \cdot \left[\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \right] = 0 \tag{4.1.1}$$

Pero si una función vectorial tiene divergencia nula en todas partes, puede escribirse como el rotor de una función vectorial $\vec{B}(\vec{r},t)$ como sigue

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{4.1.2}$$

Esta relación formal será más adelante justificada en base a leyes físicas y de tal forma que $\vec{B}$ podrá ser interpretado como el campo magnético que se produce tanto debido a la presencia de una densidad de corriente como a la presencia de un campo eléctrico variable.

4.1.2. Dos nuevas leyes

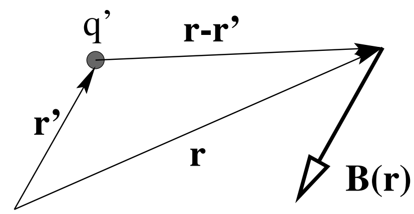

Figura 4.1: *Una carga q' produce un campo magnético $\vec{B}(\vec{r}\,)$ en todo punto $\vec{r}$*

Dos son las leyes experimentales que establecen la causa y el efecto de un campo magnético:

(a) Una carga puntual q' en posición $\vec{r}\,'$ que se mueve a velocidad $\vec{v}\,'$ produce en $\vec{r}$ un campo magnético

$$\vec{B}(\vec{r}\,) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q'\vec{v}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} \tag{4.1.3}$$

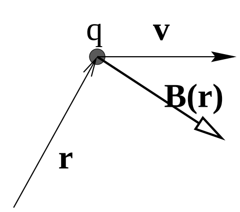

Figura 4.2: *Sobre una carga en movimiento en presencia de un campo magnético actua una fuerza magnética.*

(b) La fuerza que actúa sobre una carga puntual q ubicada en $\vec{r}$ que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en presencia de un campo magnético externo $\vec{B}(\vec{r}\,)$, es,

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}(\vec{r}\,) \tag{4.1.4}$$

la que se conoce como *fuerza de Lorentz*. Hoy día es más común llamar fuerza de Lorentz a la fuerza electromagnética total que puede actuar sobre una carga q, esto es,

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} \tag{4.1.5}$$

4.1.3. Campo magnético debido a una corriente

La ecuación (4.1.3) puede ser extendida para escribir la contribución al campo magnético que se produce en un punto $\vec{r}$ debido a la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}\,')$ que hay en un elemento de volumen $d\mathscr{V}'$ en torno al punto $\vec{r}\,'$. Resulta ser,

$$d^3\vec{B}(\vec{r}\,) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')\,d\mathscr{V}'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} \tag{4.1.6}$$

Para obtener esta expresión se reemplazó el factor $q'\vec{v}\,'$ que hay en (4.1.3) por $\rho(\vec{r}\,')\vec{v}\,'d\mathscr{V}' = \vec{J}(\vec{r}\,')d\mathscr{V}'$.

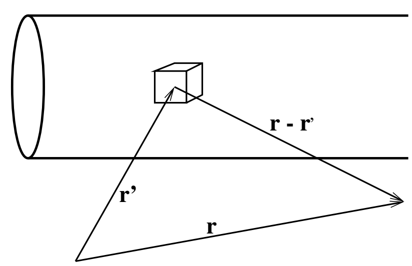

Figura 4.3: *Se considera un elemento de volumen en el conductor con corriente. Este pequeño volumen es responzable de una parte $d^3\vec{B}$ del campo total que la corriente provoca.*

De (4.1.6) es inmediato ver que

$$B(\vec{r}\,) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{r}\,')\times\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\,d\mathscr{V}' \tag{4.1.7}$$

Si la densidad de corriente $\vec{J}$ está circulando por un conductor filiforme 1 y se expresa al elemento de volumen como un producto punto entre el elemento de longitud $d\vec{r}\,'$ a lo largo del circuito 1 y el elemento de sección $d\vec{S}'$ del conductor de este mismo circuito, entonces se puede usar (3.3.10) para reemplazar en (4.1.6) los factores $\vec{J}\,d\mathscr{V}'$ por $d\vec{r}\,'\,\vec{J}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{S}'$. Después de hacer esa sustitución se puede integrar sobre toda la sección del conductor, obteniéndose, según (3.1.4), la corriente I' que circula en el conductor,

$$d\vec{B}(\vec{r}\,) = \frac{\mu_0\,I'\,d\vec{r}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} \tag{4.1.8}$$

Se hizo uso de (3.3.10) con $d\vec{r}\,'$ representando al elemento de un camino Γ que coincide con una *línea de corriente* $\vec{J}$. En la expressión (4.1.8), donde se ha integrado sobre la sección del conductor, el vector $\vec{r}\,'$ define al punto donde Γ corta a esta sección. *Para obtener* (4.1.8) *se ha supuesto que el conductor es* muy *delgado, de otro modo no se podría integrar sobre la sección en forma tan sencilla*.

De la expresión anterior se obtiene el campo magnético total $\vec{B}$ producido por un circuito cerrado Γ' ,

$$\vec{B}(\vec{r}\,) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \oint_{\Gamma'} \frac{d\vec{r}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3} \tag{4.1.9}$$

Esta expresión se conoce como la *ley de Biot-Savart*.

EJERCICO 4.1-1. *Con la expresión anterior demostrar que el campo producido por una corriente I que circula por un alambre rectilíneo infinito es,*

$$\vec{B}(\rho,\phi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\phi} \tag{4.1.10}$$

donde ρ es el radio de coordenadas cilíndricas.

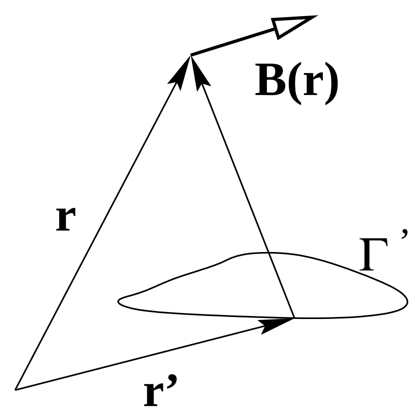

Figura 4.4: *La expreión (4.1.9) da el campo magnético producido por un circuito filiforme Γ con corriente I.*

EJERCICIO 4.1-2. *Demostrar que el campo que produce una corriente I que circula por una circunferencia de radio R, a distancia z, sobre el eje de la circunferencia, es*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k} \tag{4.1.11}$$

EJERCICIO 4.1-3. *Demostrar que el campo magnético que hay en el interior de una bobina cilíndrica, ideal, infinita con n vueltas por unidad de longitud y con corriente I en cada espira es un campo uniforme y vale*

$$\vec{B} = \mu_0 n I\hat{k} \tag{4.1.12}$$

donde $\hat{k}$ es la dirección del eje de la bobina.

4.1.4. El efecto Hall

Cuando circula una corriente por un conductor en presencia de un campo magnético externo, las cargas en movimiento (las cargas de conducción) tienden a desviarse de su trayectoria longitudinal por el conductor debido a la fuerza magnética

$$\vec{F}_{\mathsf{mag}} = q\vec{v}\times\vec{B} = -q_e\vec{v}\times\vec{B}$$

Como efecto de esto se carga más un costado del concuctor que el otro y se produce un campo electrico trasversal a $\vec{J}$ y así se establece un equilibrio. El campo eléctrico trasversal $\vec{E}_{\mathsf{tr}}$ que aparece produce una fuerza exactamente opuesta a la fuerza magnética dada más arriba:

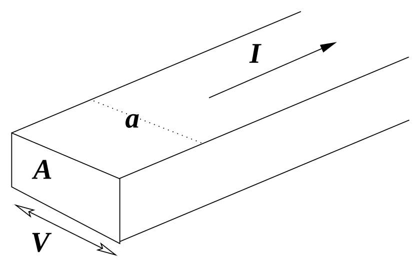

Figura 4.5: *Por un conductor de sección A y ancho a circula una corriente total I. Además hay un campo magnético externo $\vec{B}$ se produce una diferencia de potencial trasversal a la corriente y al campo magnético (en esta figura $\vec{B}$ es perpendicular a la circulación de la corriente I y es perpendicular al ancho a). La aparición de esta diferencia de potercial trasversal es el efecto Hall.*

$$q_e\vec{E}_{\mathsf{tr}} = -q_e\vec{v}\times\vec{B}$$

Suponiendo estos vectores son todos paralelos o perpendiculares se puede trabajar escalarmante

$$E_{\mathsf{tr}} = vB \qquad \Rightarrow \qquad V = aE_{\mathsf{tr}} = vBa$$

donde la velocidad v de las cargas es proporcional a J que es $v = \beta J$ donde β es una constante que tiene que ver con la conductovidad del material. Pero $J = I/A$ con lo cual

$$V = \beta\frac{IBa}{A}$$

es decir, aparece una diferencia de potencial V.

4.2. Potencial vectorial

4.2.1. Definición usando $\vec{J}$

La expresión (4.1.6) puede ser escrita

$$\begin{aligned} d^3B(\vec{r}\,) &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{J}(\vec{r}\,')\times\nabla\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\,d\mathscr{V}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\,d\mathscr{V}' \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

porque ∇ se refiere a las corrdenadas sin prima. De aquí resulta que $\vec{B}$ se puede escribir como un rotor

$$B(\vec{r}\,) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\,d\mathscr{V}' \tag{4.2.2}$$

Lo cual quiere decir que siempre el campo magnético puede ser escrito como el rotor de una función vectorial que será denominada *potencial vectorial*: $\vec{A}(\vec{r}\,)$, es decir,

$$B(\vec{r}\,) = \nabla\times\vec{A}(\vec{r}\,) \tag{4.2.3}$$

donde

$$A(\vec{r}\,) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}-\frac{1}{\|\vec{r}_0-\vec{r}\,'\|}\right)\vec{J}(\vec{r}\,')\,d\mathscr{V}'+\nabla\Lambda(\vec{r}\,) \tag{4.2.4}$$

El vector $\vec{r}_0$ es un punto arbitrario donde se escoge que $\vec{A}$ se anule y la función $\Lambda(\vec{r}\,)$ también es arbitraria.

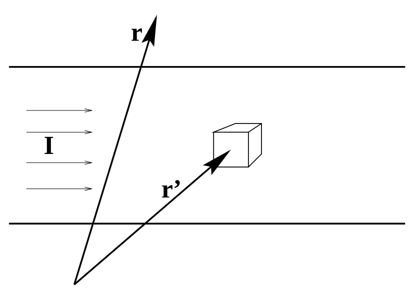

Figura 4.6:

El volumen de integración sería en principio todo el espacio, pero en la práctica es el volumen de la zona en la cual la densidad de corriente es no nula, esto es, $\mathscr{V}$ es el volumen del conductor por el cual circula la corriente.

De (4.2.3) se desprende que,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{4.2.5}$$

La libertad para escoger $\vec{A}$ de entre una familia infinita de funciones conectadas por distintas funciones $\Lambda(\vec{r})$ se llama *libertad de gauge*. Tal libertad (que no tiene significado físico directo) es usada, especialmente en magnetostática, para que el potencial vectorial satisfaga,

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{4.2.6}$$

que se conoce como *gauge de Coulomb*.

Si además hubiese una densidad de corriente de superficie $\vec{K}(\vec{r}\,')$ la expresión (4.2.4) tiene un término extra.

En (4.1.9) se estableció que el campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ debido a un circuito Γ por el que circula una corriente I es,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_\Gamma \frac{d\vec{r}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3} \tag{4.2.7}$$

donde $\vec{r}\,'$ es el vector que recorre la fuente, es decir el circuito Γ. La expresión anterior es equivalente a

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_\Gamma d\vec{r}\,' \times \nabla_r \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} \tag{4.2.8}$$

que es

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla_r \times \oint_\Gamma \frac{d\vec{r}\,'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} \tag{4.2.9}$$

Nuevamente se ve que el campo magnético, esta vez debido a un circuito, puede escribirse como el rotor de un *potencial vectorial* $\vec{A}$,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_\Gamma \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_0 - \vec{r}\,'\|} \right) d\vec{r}\,' + \nabla \Lambda(\vec{r}) \tag{4.2.10}$$

Para circuitos ideales *infinitos* $\vec{r}_0$ no puede ser tomado de magnitud infinita.

Más adelante se verá que la noción de *flujo magnético* Φ a través de una superficie $\mathscr{S}$ es físicamente interesante,

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_{\mathscr{S}} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\mathscr{S} \\
&= \int_{\mathscr{S}} \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\mathscr{S} \\
&= \oint_{\Gamma = \partial\mathscr{S}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Es muy fácil demostrar que el flujo magnético no depende de $\Lambda(\vec{r}\,)$, es decir, se obtiene el mismo Φ con $\vec{A}$ y con $\vec{A}'$ ya que $\oint \nabla\Lambda\cdot d\vec{r}\equiv 0$.

Al tomar el rotor de (4.2.4) se obtiene (4.1.7).

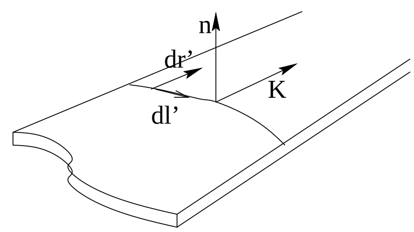

Figura 4.7:

4.2.2. Potencial vectorial a partir de $\vec{K}$

Veamos el efecto de una densidad de corriente superficial. En tal caso existe una contribución al campo magnético análoga a (4.1.6) y que es (usando $\vec{\Delta}\equiv\vec{r}-\vec{r}\,'$)

$$
\begin{aligned}
d^2\vec{B}(\vec{r}\,) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sigma' d\mathscr{S}'\vec{v}\,'\times\vec{\Delta}}{\Delta^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{K}(\vec{r}\,')\times\vec{\Delta}(d\vec{\ell}\,'\times d\vec{r}\,')\cdot\hat{n}}{\Delta^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\vec{r}\,'\times\vec{\Delta}[d\vec{\ell}\,'\times\vec{K}\cdot\hat{n}]}{\Delta^3}
\end{aligned}
\tag{4.2.12}
$$

donde se obtuvo la segunda línea identificando $\sigma'\vec{v}\,'$ con $\vec{K}$ y el elemento escalar de superficie con $(d\vec{\ell}\,'\times d\vec{r}\,')\cdot\hat{n}$. Aquí $d\vec{\ell}\,'$ es el elemento de camino trasversal tal como el que se usó en (3.1.9). La tercera línea surge de intercambiar las ubicaciones de $\vec{K}$ con el elemento de camino $d\vec{r}\,'$. Finalmente, integrando sobre el camino trasversal se obtiene la corriente total de superficie e integrando a lo largo del camino de corriente se obtiene el campo total debido a la corriente superficial:

$$
\vec{B}_{\mathscr{S}} = \frac{\mu_0}{4\pi}I_{\mathscr{S}}\oint\frac{d\vec{r}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} \tag{4.2.13}
$$

Por otro lado también se puede escribir

$$
\vec{B}_{\mathscr{S}} = \int\vec{K}(\vec{r}\,')\times\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}d\mathscr{S}'
$$