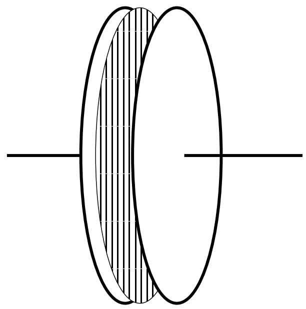


Figura 3.5: *Se integra sobre una superficie muy cercana a una de las placas del condensador plano.*

3.3. Fuerza electromotriz y efecto Joule

Una *fuente de potencial* es un dispositivo que crea entre sus contactos A, B una diferencia de potencial. Los ejemplos más típicos son las baterías y los dínamos. A estas fuentes se les asocia (a) la resistencia interna R_i y (b) la *fuerza electromotriz* o f.e.m. (que se mide en *Volts*), la que produce una discontinuidad en el campo eléctrico. La f.e.m. representa una diferencia de potencial intrínseco de la fuente y se designa con el símbolo $\mathscr{E}$.

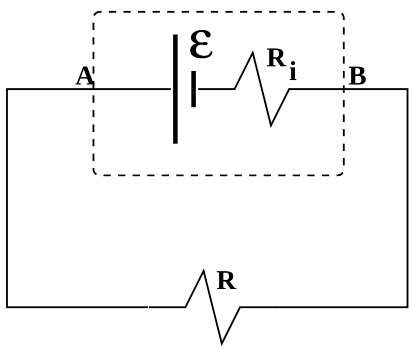


Figura 3.6: *Una batería tiene asociada una fuerza electromotriz y una resistencia interna*

Si se mide la diferencia de potencial $V = V_A - V_B$ entre los contactos de una fuente y no hay corriente circulando a través de ella, el resultado es $\mathscr{E}$. En cambio hay una corriente I si los contactos A, B se conectan a una resistencia R. La caida de potencial V en R en tal caso es

$$V = RI = V_A - V_B > 0 \tag{3.3.1}$$

Pero también puede pensarse que existe una diferencia de potencial $\mathscr{E}$ y dos resistencias en serie,

$$\mathscr{E} = (R+R_i)I \tag{3.3.2}$$

que se combina con la relación previa y da,

$$V = \mathscr{E} - R_i I \tag{3.3.3}$$

El trasporte de cargas a través de una resistencia significa trabajo y por tanto pérdida de energía del sistema batería-resistencia. Si en un lapso Δt una carga Δq va de A a B,

$$\Delta q = I\Delta t \tag{3.3.4}$$

la energía inicial asociada a Δq es $U_{\text{in}} = V_A \Delta q$ y la energía final es $U_{\text{fin}} = V_B \Delta q$.

La energía que el sistema pierde en la resistencia R por este efecto es disipada como calor. Si P es la potencia disipada en R (energía disipada por unidad de tiempo),

$$U_{\text{in}} = V_A \Delta q = V_B \Delta q + P\Delta t, \tag{3.3.5}$$

que se reduce a,

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}\left[\text{Watt=}\frac{\text{Joule}}{\text{seg}}\right] \tag{3.3.6}$$

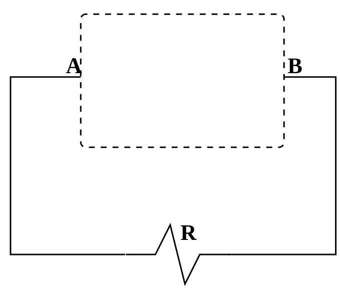


Figura 3.7: *Batería conectada a una resistencia* R

Esta producción de calor debida al paso de una corriente se denomina *efecto Joule*.

EJERCICIO 3.3-1. *Demostrar que un circuito formado por una batería y una resistencia* R *entrega el máximo de potencia a* R *cuando* $R = R_i$.

Ahora se estudiará el efecto Joule desde un punto de vista local. Se toma un elemento cúbico de volumen, $d\mathscr{V}$ con cuatro aristas paralelas a la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r})$. La diferencia de potencial entre las caras opuestas es $dV = \vec{E}\cdot d\vec{r}$, mientras que la corriente que pasa por esas caras es $dI = \vec{J}\cdot d\vec{\mathscr{S}}$. De aquí que la potencia que se disipa en $d\mathscr{V}$ es

$$dP = dV\,dI = \vec{J}\cdot d\vec{\mathscr{S}}\ \vec{E}\cdot d\vec{r} \tag{3.3.7}$$

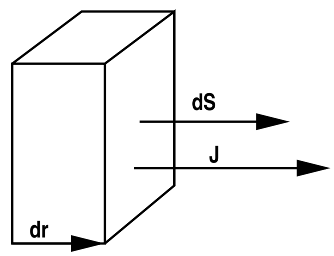


Figura 3.8: *Se escoge elementos de volumen compuestos por $d\vec{S}$ y $d\vec{r}$; el último paralelo a la densidad de coriente $\vec{J}$.*

Pero como el elemento de camino $d\vec{r}$ es paralelo a $\vec{J}$, por elección del elemento de volumen, el lugar de estos dos vectores puede ser intercambiado en la expresión anterior,

$$dP = \vec{E}\cdot\vec{J}\ d\vec{r}\cdot d\vec{\mathscr{S}} \tag{3.3.8}$$

pero $d\vec{r}\cdot d\vec{\mathscr{S}}$ es el elemento de volumen $d\mathscr{V}$ sobre el cual se integra, obteniéndose,

$$P = \int_{\mathscr{V}} \vec{J}\cdot\vec{E}\,d\mathscr{V} \tag{3.3.9}$$

Esta es la expresión general de la potencia disipada. La expresión (3.3.6) en cambio, tiene sentido solo en los casos particulares cuando existe una única diferencia de potencial en el problema.

En la deducción anterior se hizo el intercambio de posición de dos vectores:

$$d\vec{r} \longleftrightarrow \vec{J} \tag{3.3.10}$$

3.4. Problemas

3.1 Dos trozos de material conductores imperfectos (ε_1, g_1 y ε_2, g_2) de igual geometría (paralelepípedo rectangular) están unidos por una de sus caras (de área A_0). Las respectivas caras opuestas a las caras de contacto son mantenidas con una diferencia de potencial V_0 y la arista perpendicular a estas caras es de largo b en cada material. Determine la carga libre en la superficie de contacto.

3.2 Se tiene dos mantos cilíndricos concéntricos de la misma altura h, de radios a y b que son conductores "perfectos". El espacio entre ellos está lleno con dos materiales caracterizados por sus constantes diléctricas y conductividades: (ε_1, g_1) y (ε_2, g_2) respectivamente. Si se mantiene una diferencia de potencial V_0 entre los conductores determine (a) el campo eléctrico en cada punto en la zona entre los dos conductores perfectos y (b) la resistencia R del sistema y la potencia P que se disipa entre los dos cilindros. Desprecie los efectos de los bordes.

3.3 Un conductor esférico de radio a está rodeado por un conductor concéntrico de radio $b > a$. El espacio entrelos conductores está lleno con un medio cuya conductividad varía con el radio: $g = \frac{c}{r}$. Si la esfera exterior se mantiene a un potencial V_0 y una corriente total I fluye radialmente entre los conductores determine: • el potencial eléctrico a una distancia $r > a$ desde el centro y • la potencia disipada en el medio.

3.4 Se sabe que la atmósfera tiene una conductividad (causada principalmente por los rayos cósmicos) que depende de la alturade la siguiente manera:

$$g(z) = (3 + 0.5z^2)\, 10^{-14} \quad [\Omega m]^{-1} \tag{3.4.1}$$

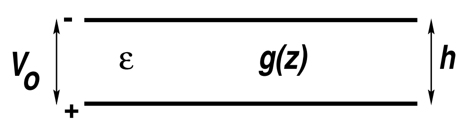
donde z es la distancia vertical sobre el suelo. Se ha encontrado además un campo eléctrico vertical, dirigido hacia el suelo, que en la superficie de la Tierra vale:

$$\vec{E} = -100\hat{k} \quad [\text{V/m}] \tag{3.4.2}$$

Suponga el siguiente modelo de la atmósfera: Una capa conductora paralela a la superficie, situada a una distancia de $15[\text{Km}]$ sobre el suelo; entre esta capa y el suelo se encuentra la atmósfera, con la conductividad y el campo eléctrico indicados más arriba. El radio de la Tierra es $R_T = 6400[\mathrm{Km}]$. (a) Calcule el campo eléctrico y el potencial en la atmósfera, en función de la altura z. (b) Calcule la corriente total que fluye entre la capa superior conductora y el suelo. (c) Calcule la densidad de carga superficial en la superficie de la Tierra y la densidad de carga en la atmósfera. Sugerencia: aproveche la condición: $z \ll R_T$ con lo cual se pueden considerar que las superficies son planas.

3.5 Entre dos placas paralelas separadas por una distancia h y mantenidas a una diferencia de potencial V_0 hay un medio líquido con una solución inhomogénea.

Como efecto de esto el medio entre las placas tiene una constante dieléctrica uniforme y una conductividad $g(z)$ que tan solo depende de la distancia z a la placa inferior:



$$g(z) = \frac{g_0}{1+(z/h)^2}$$

Obtenga la densidad de corriente, el campo eléctrico y el desplazamiento. Obtenga también la densidad de carga libre en el líquido.

3.6 Se tiene N baterías, cada una con la misma fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ y la misma resistencia interna R_i. Ellas pueden ser conectadas todas en serie o bien todas en paralelo y, en ambos casos, el circuito es cerrando con una resistencia R. Determine las potencias P_1 y P_2 que se disipan en R en cada uno de los dos casos. Encuentre el valor R_1 de R que permite obtener el mayor valor para P_1 y encuentre el valor R_2 de R que permite obtener el mayor valor para P_2. Determine en cuál de los dos casos la potencia disipada en R es mayor.