Capítulo 2

Electrostática y conductores

2.1. Conductores

Sin entrar en detalles microscópicos, un conductor es un material (dieléctrico) que posee cargas libres de moverse en su volumen. Estas cargas se desplazan (corriente eléctrica) tan pronto se aplica un campo eléctrico.

Electrostática es el estudio de cargas y campos bajo la condición que los campos no varíen en el tiempo, ni haya corrientes. En electrostática no hay movimiento de cargas, no hay corrientes. Así, bajo la presencia de un campo eléctrico, las cargas en un conductor se mueven hasta que se ubican de tal manera que el movimiento de cargas desaparece. Esto es posible sólo si el campo eléctrico en el interior del conductor se hace exactamente cero,

$$\vec{E}_{\text{interior}} = \vec{0} \tag{2.1.1}$$

El lapso durante el cual las cargas se reubican para dar campo interior nulo escapa a los marcos de lo que es la electrostática.

Dentro de cada elemento de volumen de un conductor la carga neta es nula porque de lo contrario ellas producirían campo en el interior. En situaciones electrostáticas, un conductor cargado tiene todo su exceso de cargas en la superficie. Dicho de otra manera, $\rho = 0$ ya que $\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ y si $\rho \neq 0$, el campo no podría ser nulo.

Si el campo en el interior es nulo entonces el potencial en el interior de un conductor tiene un valor único: el conductor es un *volumen equipotencial*.

En particular, *la superficie de un conductor es una superficie equipotencial*. Por lo tanto, de la superficie de un conductor cargado nace un campo que es perpendicular a esa superficie. La ley de Gauss puede aplicarse a un cilindro infinitesimal con eje perpendicular a la superfice y se demuestra que el campo en una vecindad infinitesimal al conductor tiene un valor totalmente determinado por la densidad superficial de cargas en ese punto:

$$\vec{D}(\text{infinitesimalmente cerca a la superficie conductora}) = \sigma_\ell \hat{n} \tag{2.1.2}$$

que es equivalente a decir que

$$\begin{aligned} \vec{E}(\text{muy cerca a la superficie conductora}) &= \frac{\sigma_\ell}{\varepsilon}\hat{n} \\ &= \frac{\sigma_{\text{tot}}}{\varepsilon_0}\hat{n} \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

tal como ya fue obtenido en (1.10.6).

AFIRMACIÓN 1. Si un conductor cargado (carga total Q) tiene un hueco interior totalmente rodeado de materia conductora), entonces la carga se distribuye exclusivamente en la superficie externa.

AFIRMACIÓN 2. Si un conductor carga (carga Q), pero hueco como el anterior, contiene una carga q en la cavidad interna (ver Fig. 2.1), entonces aparece una densidad de carga en la superficie interior cuya integral da exactamente $-q$ y en la superficie externa aparece otra densidad de carga, cuya integral es $Q+q$.
AFIRMACIÓN 3. Si se tiene un conductor hueco y neutro y una carga puntual q fuera del conductor, se induce una densidad de carga en la superfice externa (cuya integral es cero) pero el campo en el hueco interior es idénticamente nulo.

Este último fenómeno suele ser denominado *blindaje electrostático.*

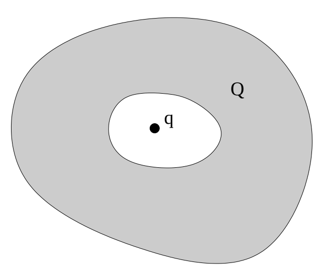

Figura 2.1: *Conductor con carga total Q que tiene un hueco que contiene una carga q*

CONTACTO A TIERRA. Se dice que un conductor finito está en *contacto a tierra* si su diferencia de potencial con infinito es nula.

EJEMPLO ILUSTRATIVO: *Se tiene una placa conductora de ancho δ que separa a dos medios semiinfinitos con constantes dieléctricas ε_A el de arriba y ε_B el de abajo (ver Fig. 2.2). Su superficie superior la llamamos 1 y a la inferior la llamamos 2. La placa está cargada (carga libre) pero no se sabe el valor de $\sigma_{\ell 1}$ ni de $\sigma_{\ell 2}$ sino tan solo el total*

$$\sigma_\ell = \sigma_{\ell 1} + \sigma_{\ell 2} \tag{2.1.4}$$

Gracias a (2.1.3) se sabe que el campo eléctrico en los material A y B es

$$\vec{E}_A = \frac{\sigma_{\ell 1}}{\varepsilon_A}\,\hat{k}\,, \qquad \vec{E}_B = -\frac{\sigma_{\ell 2}}{\varepsilon_B}\,\hat{k} \tag{2.1.5}$$

A partir de estos campos se puede calcular los respectivos vectores $\vec{P}$ y con ellos

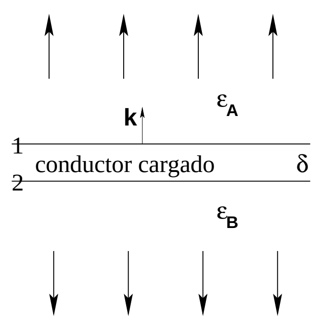

Figura 2.2: *Una placa conductora cargada que separa dos medios aislantes.*

se obtiene las densidades superficiales de polarización

$$\begin{aligned}\sigma_{P1} &= -\frac{\varepsilon_A - \varepsilon_0}{\varepsilon_A}\,\sigma_{\ell 1}\,,\\ \sigma_{P2} &= -\frac{\varepsilon_B - \varepsilon_0}{\varepsilon_B}\,\sigma_{\ell 2}\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Las densidades de carga en cada una de las dos superficies es la suma de la densidad de carga libre y de polarización. Si sumamos las expresiones que ya sabemos se obtiene

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_0\,\sigma_{\ell 1}}{\varepsilon_A}\,, \qquad \sigma_2 = \frac{\varepsilon_0\,\sigma_{\ell 2}}{\varepsilon_B} \tag{2.1.7}$$

Con estas densidades de carga total en las caras 1 y 2 de la placa se puede calcular el campo eléctrico que ellas implican en el interior del conductor. Resulta que tal campo es proporcional a $\sigma_2 - \sigma_1$, y como el campo debe ser cero (interior de un conductor) se deduce que $\sigma_1 = \sigma_2$. Usando (2.1.7) lo anterior implica

$$\varepsilon_B\,\sigma_{\ell 1} = \varepsilon_A\,\sigma_{\ell 2}$$

Combinando esta expresión con (2.1.4) se logra deducir que

$$\sigma_{\ell 1} = \frac{\varepsilon_A\,\sigma_\ell}{\varepsilon_A+\varepsilon_B}\,, \quad \sigma_{\ell 2} = \frac{\varepsilon_B\,\sigma_\ell}{\varepsilon_A+\varepsilon_B}$$

con lo que se ha logrado dar una solución en base a los datos $\varepsilon_A, \varepsilon_B, \sigma_\ell$. *Ahora es directo, por ejemplo, que el campo eléctrico a ambos lados tiene la misma magnitud pero distinto signo:*

$$\vec{E}_A = -\vec{E}_B = \frac{\sigma_\ell}{\varepsilon_A+\varepsilon_B}\,\hat{k}$$

pero si se usa la notación $\sigma = \sigma_1+\sigma_2$ *es muy fácil demostrar que*

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_\ell}{\varepsilon_A+\varepsilon_B}$$

lo que conduce a ver que se ha reobtenido (1.2.6). Nótese que σ *es toda la carga por unidad de superficie que tiene la placa, esto es,* $\sigma = \sigma_{\ell 1}+\sigma_{P1}+\sigma_{\ell 2}+\sigma_{P2}$.

Teniedo esta solución se puede comprobar que

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{\ell 1}}{\varepsilon_A}\,, \qquad \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{\ell 2}}{\varepsilon_B}$$

que ilustra, esta vez con densidades superficiales, el comentario que se hizo bajo (1.9.3).

Demuestre, con los resultados anteriores, que

$$\frac{\sigma_\ell}{\varepsilon_A+\varepsilon_B} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

donde $\sigma = \sigma_1+\sigma_2$.

OTRO EJEMPLO: *Consideremos una situación semejante a la anterior, pero esta vez se tiene dos placas conductoras infinitas paralelas con cargas de igual magnitud y signo opuesto. Las cuatro superficies las denominamos desde abajo hacia arriba 1, 2, 3 y 4. La carga por unidad de superficie es* σ *en la placa inferior y* $-\sigma$ *en la superior, es decir,*

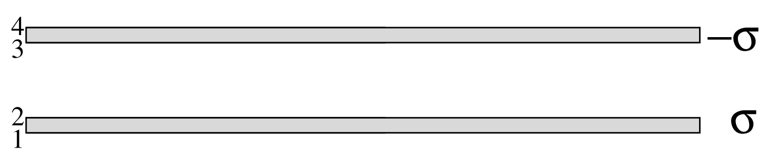

Figura 2.3: *Dos placas conductoras con cargas opuestas.*

$$\sigma_1+\sigma_2 = \sigma\,, \qquad \sigma_3+\sigma_4 = -\sigma$$

La exigencia de que el campo eléctrico sea nulo en el interior de los dos conductores lleva a dos condiciones más:

$$\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma = 0\,, \qquad \sigma + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

Estas cuatro ecuaciones dan como solución que

$$\sigma_1 = \sigma_4 = 0\,, \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = \sigma \tag{2.1.8}$$

Esto significa que la carga de estas placas se concentra únicamente en las caras enfrentadas, es decir, en la cara inferior (3) de la placa de arriba y en la cara superior (2) de la placa de abajo. Para obtener este resultado en ningún momento se necesitó el valor de las constantes dieléctricas de los distintos medios.

2.1.1. Ecuación de Poisson. Unicidad de la solución

Si se tiene un conjunto de N conductores cargados interesa poder determinar la función potencial eléctrico. Puede adivinarse que $V(\vec r\,)$ depende de las cargas Q_k de cada conductor y de la configuración geométrica del sistema. Normalmente se usará la convención $V(\infty)=0$. El problema consiste en resolver la ecuación de Poisson con condiciones de borde que correspondan al sistema en estudio, es decir,

$$\begin{aligned} \nabla^2 V(\vec r\,) &= \rho(\vec r\,)/\varepsilon \\ V(\mathscr{S}_k) &= V_k \quad (k=1...N) \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

donde $\mathscr{S}_k$ representa la superficie del $k-$ésimo conductor, y V_k es el valor del potencial en la superficie de él.

Demostraremos que la solución a este problema es *única* si se adopta alguna convención como que $V(\infty)=0$. Con el objetivo de hacer esta demostración se supone que existen dos soluciones $V_1(\vec r\,)$ y $V_2(\vec r\,)$, es decir ambas funciones satisfacen el sistema de ecuaciones (1.4.5). Se define entonces la función diferencia,

$$\phi(\vec r\,) = V_1(\vec r\,) - V_2(\vec r\,)$$

y la idea es demostrar que ϕ es idénticamente nula. Para ello conviene notar que ϕ satisface un sistema semejante a (1.4.5) pero con lados derechos nulos,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\vec r\,) &= 0 \\ \phi(\mathscr{S}_k) &= 0 \quad (k=1...N) \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Si se define ahora, $\vec{F}(\vec{r}) = \phi(\vec{r})\vec{\nabla}\phi$ se observa que $\nabla\cdot\vec{F} = (\vec{\nabla}\phi)^2$, es decir, la divergencia de $\vec{F}$ es no negativa. Si se hace la integral de la divergencia de $\vec{F}$ en un volumen $\mathscr{V}$, el teorema de Gauss permite convertir la integral en una integral de superficie de $\vec{F}$ mismo. Si el volumen $\mathscr{V}$ se toma arbitrariamente grande, de modo que su superficie se aleje indefinidamente, la integral de superficie es nula porque $\vec{F}$ decrece cerca de infinito al menos como r^{-3}. En efecto, todo potencial de una fuente finita decrece cerca de infinito como $1/r$ (ver (1.5.9)), lo que implica que $\vec{F}$ decrece como ya se ha dicho.

Pero si la integral es nula, y lo que se está integrando es el cuadrado de la divergencia de ϕ, necesariamente se tiene que cumplir que $\nabla\phi = 0$ en todas partes, lo que implica que ϕ es constante. Y como se sabe que ϕ es cero sobre la superfice de cada uno de los conductores, entonces ϕ es una función idénticamente nula, es decir, (1.4.5) tiene una sola solución.

2.2. Energía electrostática

2.2.1. Energía como función de cargas y potenciales

La energía potencial asociada a un par de partículas cargadas q_1 y q_2 es,

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r_{12}} \tag{2.2.1}$$

Similarmente, la energía asociada a tres partículas es,

$$U_{123} = U_{12} + U_{23} + U_{31} \tag{2.2.2}$$

donde al lado derecho aparecen funciones como la que se escribió en (2.2.1) para cada uno de los tres pares que se pueden formar. En ambos casos se ha considerado el cero de energía potencial a distancia infinita.

Si se trata de un sistema de N partículas cargadas, el resultado es,

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j(\neq i)=1}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon r_{ij}} \tag{2.2.3}$$

El factor 1/2 es necesario porque la doble suma está contando dos veces cada pareja y la condición $j \neq i$ en la suma interior evita que se considere la energía potencial de una partícula debido a su propio campo (lo que daría un infinito ya que $r_{ii} = 0$).

De (1.4.7), puede verse que el potencial de todas las N partículas, excepto por la i-ésima, evaluado en la posición de la i-ésima partícula es

$$V_i = \sum_{j(\neq i)=1}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon r_{ij}} \tag{2.2.4}$$

(se ha tomado con $\vec{r}_0$ en infinito) lo que implica que

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i \tag{2.2.5}$$

Esta es la energía de un conjunto discreto de N cargas puntuales. El resultado puede ser generalizado a distribuciones continuas reemplazando la suma por una integral sobre la distribución y reemplazando q_i por un elemento de carga dq,

$$U = \frac{1}{2}\int V(\vec{r}\,')\; dq(\vec{r}\,'), \tag{2.2.6}$$

ver (1.2.3)

Naturalmente que en general una fuente puede ser una mezcla de un conjunto discreto de cargas puntuales y de distribuciones continuas, por lo que la energía electrostática debe ser escrita como una suma de las expresiones (2.2.5) y (2.2.6).

Si, en particular, se tiene un sistema que solo consta de N conductores cargados, su energía es la semisuma de integrales de productos $V_k\,\sigma_k$, donde k es el índice que se usa para numerar los conductores. Puesto que en la superficie de cada conductor el potencial es constante (no depende del punto de la superficie), los factores V_k pueden ser escritos fuera de cada una de las N integrales, lo que finalmente da que,

$$U = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} V_k Q_k\ . \tag{2.2.7}$$

2.2.2. Energía como función de los campos

Consideremos ahora el caso en que se tiene una fuente que consta de un volumen finito $\mathscr{V}$ dentro en el cual hay una distribución de carga libre $\rho(\vec{r})$, y un conductor con superficie $\mathscr{S}_c$ (volumen $\mathscr{V}_c$) con densidad de carga libre $\sigma(\vec{r})$. La energía de este sistema es

$$U = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathscr{V}} \rho(\vec{r}\,')V(\vec{r}\,')d\mathscr{V}' + \int_{\mathscr{S}_c} \sigma(\vec{r}\,')V(\vec{r}\,')d\mathscr{S}'\right). \tag{2.2.8}$$

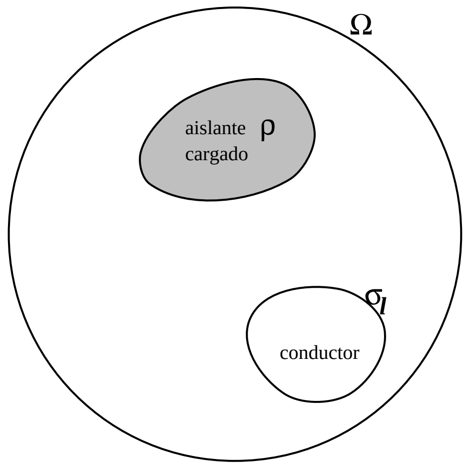

Figura 2.4: Ω *es una enorme esfera que encierra a un aislante cargado y a un conductor cargado.*

La primera de estas dos integrales, que se denotará I_1, puede hacerse sobre una región arbitraria que contenga al volumen $\mathcal{V}$—y que no contenga al conductor cargado—ya que la densidad de carga volumétrica es nula fuera de $\mathcal{V}$. Conviene integrar I_1 sobre una región $\Omega - \mathcal{V}_c$: una región esférica Ω con un hueco que corresponde al volumen del conductor. El centro de esa esfera está en un punto arbitrario de $\mathcal{V}$ y con radio R que se hará finalmente tender a infinito.

Más precisamente el hueco dentro de esta esfera—que no forma parte de Ω—está definido por una superficie $\overline{\mathcal{S}}_C$ que rodea al conductor infinitesimalmente cerca sin llegar a tocarlo. Es decir el borde de Ω está formado por dos superficies cerradas disjuntas.

Para trabajar el integrando de I_1 se reemplaza la densidad ρ por la divergencia del campo del desplazamiento eléctrico, usando (1.8.6). De modo que ahora el integrando tiene el producto $V(\vec{r}\,')\,\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(\vec{r}\,')$. Se hace uso de la identidad,

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(V\vec{D}) &= \vec{D}\cdot\nabla V + V\nabla\cdot D \\ &= -\vec{E}\cdot\vec{D} + V\nabla\cdot D \end{aligned}$$

Para obtener la última igualdad se hizo uso de (1.4.4). De modo que ahora I_1 se puede escribir como,

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{\Omega-\overline{\mathcal{V}}_c}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \nabla\cdot(V\vec{D})\right)\, d\mathcal{V}' \tag{2.2.9}$$

La primera integral se va a convertir, en el límite final, en una integral sobre todo el espacio, incluido si se quiere, el interior de $\mathscr{S}_c$, ya que ahí el campo eléctrico es nulo. La segunda integral es una integral de volumen de una divergencia, lo que permite usar el teorema de Gauss para reducirla a una integral de superficie. Pero la superficie de $\Omega-\overline{\mathscr{V}}_v$ es claramente separable en dos porciones: la superficie esférica exterior $\partial\Omega$ y la superficie interior que podemos identificar con la superficie del conductor, $\mathscr{S}_c$. La integral sobre $\partial\Omega$ se hace cero en el límite (el integrando decrece como r^{-3}). La integral sobre $\mathscr{S}_c$ es muy sencilla porque $V(\vec{r}\,')$ sobre $\mathscr{S}_c$ tiene un valor fijo, lo que permite tomar este valor fuera de la integral, quedando por calcular una integral del tipo $\int \vec{D}\cdot d\vec{\mathscr{S}}$, que es una integral de flujo. El $d\vec{\mathscr{S}}$, sin embargo, apunta hacia afuera de la región $\Omega-\mathscr{V}_c$, es decir, hacia adentro del conductor, lo que da finalmente un signo menos y así, esa última integral da, debido a la ley de Gauss (1.8.5), la carga total del conductor Q_c,

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\int \vec{E}\cdot\vec{D}\,d\mathscr{V}' - V_c Q_c\right) \tag{2.2.10}$$

La otra contribución a la energía que hay en (2.2.8) es una integral sobre la superficie $\mathscr{S}$, en la cual el potencial vale siempre V_c, por lo que puede ser escrito fuera de la integral, quedando por hacer una integral de la densidad de carga σ en toda la superficie, lo que da Q_c. Así, entonces, se ve que la última integral de (2.2.8) se cancela con el último término de I_1. En resumen, se ha obtenido que,

$$U = \frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}\,d\mathscr{V}, \tag{2.2.11}$$

integral que se hace sobre todo el espacio. La densidad de energía electrostática entonces es

$$u = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \tag{2.2.12}$$

2.3. Condensadores

Se entiende por condensador un sistema de dos conductores A y B con cargas $Q_A = +Q$ y $Q_B = -Q$. La característica más interesante de un condensador es su *capacidad*, definida por

$$C = \frac{Q}{V} \tag{2.3.1}$$

donde V es la diferencia de potencial que existe entre ellos:

$$V = V_{AB} = V_A - V_B > 0 \tag{2.3.2}$$

La carga que aparece en la definición de C es la carga que hay propiamente en el conductor, es decir, es carga libre.

De lo anterior, la energía de un condensador es,

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 \tag{2.3.3}$$

Por definición C es una cantidad positiva. Lo usual es construir los condensadores con conductores que enfrentan una gran área separada por una distancia muy pequeña. Esto garantiza que prácticamente toda la densidad de carga esté en las caras enfrentadas y por lo tanto, que casi todo el campo eléctrico esté concentrado en el volúmen que queda entre esas dos caras cargadas. Así, la densidad de energía de un condensador está principalmente en ese volumen.

A continuación se demostrará que la capacidad efectivamente es una cantidad que no depende de la carga Q del condensador. Con este propósito se estudiará la forma como varía la energía de un condensador cuando la carga de éste es aumentada: $Q \to Q + dQ$. Puesto que al aumentar la carga la magnitud del campo eléctrico aumenta, entonces (ver (2.2.11)), la energía aumenta: $dU > 0$.

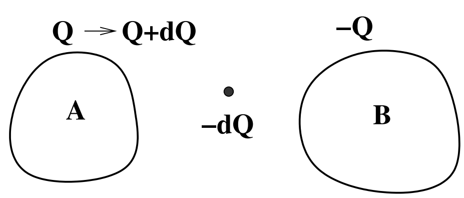

Figura 2.5: *Al sacar carga $-dQ$ del conductor A este pasa de tener carga Q a tener carga $Q + dQ$.*

Para aumentar la carga se quita al conductor A una carga $-dQ$, esto es $Q_A = Q \to Q - (-dQ)$. Esa carga, sobre la que hay una fuerza eléctrica de atracción hacia A, es llevada por un agente externo (por ejemplo, una batería) hacia el conductor B. El trabajo del agente externo se efectúa por medio de una fuerza externa $\vec{F}_{\text{ext}}$ que en todo momento se opone a la fuerza electrostática $\vec{F}_e = dQ\vec{E}$, es decir, $\vec{F}_{\text{ext}} = -dQ\vec{E}$. El trabajo dW es el cambio de energía $dU = dW$,

$$\begin{aligned} dU &= +\int_A^B dQ\,\vec{E}\cdot d\vec{r} \\ &= V\,dQ \qquad\qquad \text{que se reescribe:} \\ &= \left(2\frac{dQ}{Q}\right)\left(\frac{1}{2}QV\right) \\ &= (2\frac{dQ}{Q})U \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Esto es,

$$\frac{dU}{U} = 2\frac{dQ}{Q} \tag{2.3.5}$$

Al integrar se obtiene $\ln(U) = 2\ln(Q) + \ln(\lambda)$, donde $\ln(\lambda)$ es el nombre que se le da a la *constante* de integración. Puesto que es constante, no depende de la variable de integración Q, y así, se ha demostrado que $U = \lambda Q^2$, donde λ es independiente de Q. Al comparar esto con (2.3.3) se reconoce que $\lambda = 1/2C$, lo que muestra que la capacidad de un condensador no depende de la carga Q sino que es una propiedad intrínseca del condensador, esto es, depende de su geometría y la constante dieléctrica, ε.

EJERCICIO 2.3-1. *Calcule la capacidad de un condensador de caras planas paralelas de área enfrentada A y a distancia d, suponiendo que los efectos de borde son despreciables, esto es, el campo eléctrico entre las placas se supone uniforme. Demuestre que ésta es,*

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \tag{2.3.6}$$

EJERCICIO 2.3-2. *Calcule la capacidad de un condensador que consta de dos conductores cilíndricos concéntricos de radios a y b y de altura h despreciando los efectos de borde. Demuestre que,*

$$C = \frac{2\pi\varepsilon h}{\ln(b/a)} \tag{2.3.7}$$

EJERCICIO 2.3-3. *Calcule la capacidad de un condensador que consiste en dos esferas concéntricas de radios a y b ($b > a$) y demuestre que,*

$$C = \frac{4\pi\varepsilon ab}{b-a} \tag{2.3.8}$$

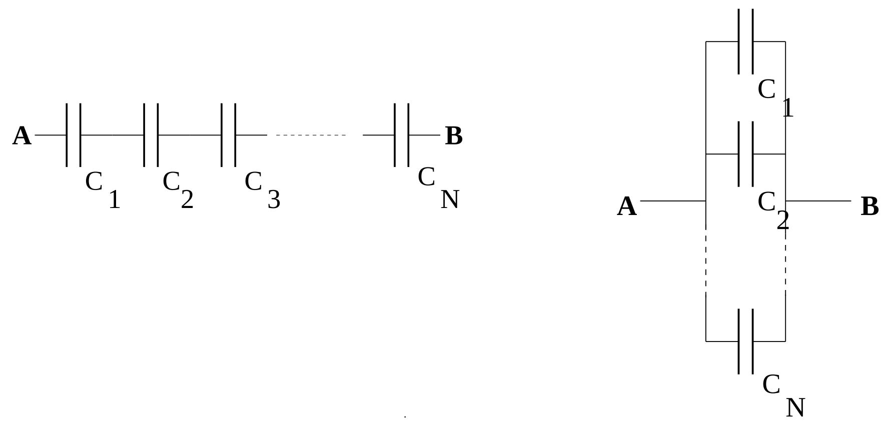

Figura 2.6: *Condensadores en serie y en paralelo respectivamente.*

Nótese que las capacidades siempre resultan proporcionales a ε y a un factor con dimensiones de longitud.

EJERCICIO 2.3-4. *Demuestre que las expresiones para las capacidades equivalentes de una serie de condensadores conectados en serie o en paralelo (ver figura) son*

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{C_{\rm eq}} &= \tfrac{1}{C_1} + \ldots + \tfrac{1}{C_N} && \textit{conectados en serie} \\
C_{\rm eq} &= C_1 + \ldots + C_N && \textit{conectados en paralelo}
\end{aligned}
$$

2.4. Energía y fuerzas entre conductores cargados

La energía de un conjunto de N conductores cargados (se usa que $V(\infty) = 0$) es,

$$U = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_k V_k \tag{2.4.1}$$

donde V_k es el valor del potencial sobre el $k-$ésimo conductor. La energía del sistema cambia si varían las cargas, o los potenciales o ambos,

$$dU = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(V_k dQ_k + Q_k dV_k) \tag{2.4.2}$$