sP1: Si la densidad total de carga por unidad de largo en la superficie interior es λ y la densidad de carga total en la interfaz es nula entonces el campo para $\rho > a$ siempre vale

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\rho}}{\rho} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 V}{\ln\frac{b}{a}}$$

La densidad de carga de polarización en la interfaz tiene dos contribuciones, σ_{P1} y σ_{P2} las que valen

$$\sigma_{P1} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\, E(\rho = b)\,, \quad \sigma_{P2} = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\, E(\rho = b) \quad \Longrightarrow \quad \sigma_P = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{b}\,\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}$$

Esto implica que la densidad de carga libre en la interfaz es

$$\sigma_\ell = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{b}\,\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\frac{V}{b\ln\frac{b}{a}}$$

---

sP2: En una configuración esférica el campo en cada zona depende tan solo de la carga total encerrada

$$\vec{E}(b < r < c - d) = \frac{Q + Q_x}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\,, \qquad \vec{E}(\text{exterior}) = \frac{2Q + Q_x}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

donde Q_x es la carga del conductor intermedio. La integral del campo eléctrico desde $r = b$ hasta infinito (con $d = 0$) debe ser cero y da

$$V = \frac{Q + Q_x}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2b}\right) + \frac{2Q + Q_x}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2b} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_x = -\frac{3}{2}Q$$

Puesto que caras enfrentadas deben tener cargas opuestas (para que el campo en el interior de los conductores sea cero), la cara interior de la superficie de radio b es $-Q$ y la exterior de ese cascarón es $-\frac{1}{2}Q$ (para que sumen $-3Q/2$). A su vez esto significa que el tercer cascarón tiene carga $\frac{1}{2}Q$ en su cara interior y carga $\frac{1}{2}Q$ en la cara exterior (para que sumen Q).

Con todo lo anterior en campo eléctrico en cada una de las tres zonas no triviales es

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\,, \qquad -\frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\,, \qquad \frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

El campo para $r < a$ es nulo y por tanto el potencial es una constante y los potenciales en las tres zonas que siguen pueden ser escritos, salvo por una constante

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} + c_1\,, \qquad -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r} + c_2\,, \qquad \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r}$$

El último tiene constante nula porque debe anularse en infinito. Exigiendo que el potencial es una función continua se obtiene las constantes c_1 y c_2 y resulta:

$$V(a \le r \le b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)\,, \qquad V(b \le r \le c) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{2b}\right)\,, \qquad V(c \le r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r}$$

Se ve que se cumple continuidad en $r = b$ y en $r = 2b$ y que en $r = b$ es nulo. Para $r < a$ el potencial, por continuidad, es la constante

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

---

sP3: Los campos de desplazamiento son radiales y por tanto normales a la interfaz de radio b, lo que implica que $\vec{D}_1 = \vec{D}_2$ y que $\vec{D}_3 = \vec{D}_4$

$$\vec{D}_1 = D_1 \hat{\rho}\,, \qquad \vec{D}_2 = D_2 \hat{\rho}$$

Suponiendo que la carga del cilindro de radio a es Q, la integral de $\vec{D}$ en una superficie de Gauss cilíndrica de radio ρ, ($a < \rho < c$) se tiene que

$$h \left[\int_0^{\pi} D_1 \rho \, d\phi + \int_0^{\pi} D_2 \rho \, d\phi \right] = Q$$

que arroja

$$D_1 + D_2 = \frac{Q}{\pi h \rho}$$

Puesto que la componente tangencial del campo eléctrico es continua se cumple que

$$\frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{D_2}{\varepsilon_2}$$

lo que implica que el campo eléctrico tiene una sola expresión

$$\vec{E} = \frac{Q}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\pi \, h} \frac{\hat{\rho}}{\rho}$$

que implica que la direrencia de potencial es

$$V = \frac{Q}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\pi \, h} \ln \frac{b}{a}$$

y de aquí la capacidad del condensador es

$$C = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\pi \, h}{\ln \frac{b}{a}}$$