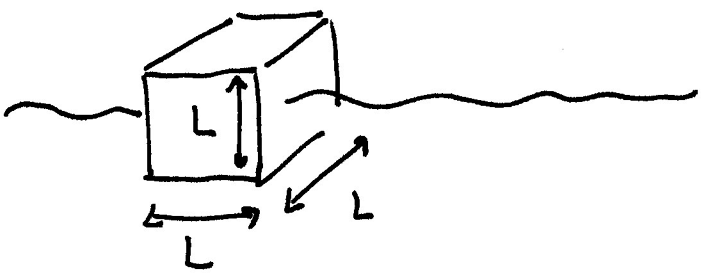
Resonancia

Consideremos un corcho flotando en el mar. El corcho es un cubo de lado L y densidad ρ. Asumir marea o mov. del mar como una señal de la forma:

$$y_{mar}(t) = A\cdot\cos(\Omega\cdot t) \Rightarrow \ddot{y}_{mar} = -A\Omega^2\cos(\Omega\cdot t)$$

Encontrar ec. de mov. del corcho.

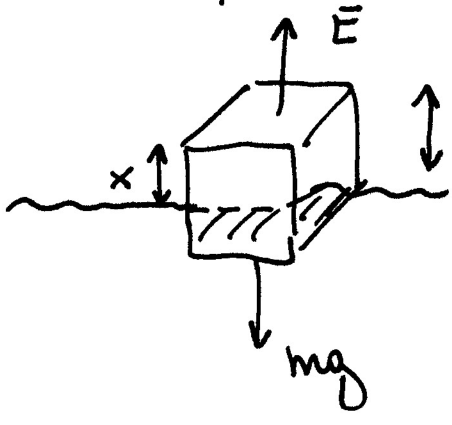


Sabemos que la fuerza de empuje que un fluído ejerce sobre un cuerpo es:

$$E = \underset{\text{desplazado}}{Vol}\cdot \rho_{\text{fluído}}\cdot g$$

g → aceleración de gravedad

Entonces para el corcho:



fuerza de la marea.

Sea x la dist. que no está hundida del corcho $\Rightarrow E = L\cdot L\cdot \underbrace{(L-x)}_{\text{lo que está bajo el agua}}\cdot \underbrace{\rho_0}_{\text{dens agua de mar}}\cdot g.$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -mg + L^2(L-x)\rho_0 g - A\Omega^2\cos(\Omega\cdot t)$$

→ asumo A con las buenas unidades.

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -mg + L^3\rho_0 g - L^2\rho_0 g x - A\Omega^2\cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -L^2\rho_0 g x - mg + L^3\rho_0 g - A\Omega^2\cos(\Omega t)$$

Sea c.v: $\quad x = \tilde{x} - \frac{(mg - L^3\rho_0 g)}{L^2\rho_0 g}$

$$\Rightarrow m\ddot{\tilde{x}} = -L^2\rho_0 g\,\tilde{x} - A\Omega^2\cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\tilde{x}} = -\omega^2\tilde{x} - \tilde{A}\Omega^2\cos(\Omega t)} \quad \text{con} \quad \omega^2 = \frac{L^2\rho_0 g}{m}$$

Ec. Oscilador armónico + un forzaje externo. $\quad \tilde{A} = \frac{A}{m}$

Solución homogénea:

$$\tilde{x}_h(t) = B\sin(\omega t + \phi)$$

solución particular:

se busca de la forma: $C\cos(\Omega t) = \tilde{x}_p(t)$

$$\Rightarrow -C\Omega^2\cancel{\cos(\Omega t)} = -\omega^2 C\cancel{\cos(\Omega t)} - \tilde{A}\Omega^2\cancel{\cos(\Omega t)}$$

$$\Rightarrow C = -\frac{\tilde{A}\Omega^2}{(\omega^2-\Omega^2)}$$

solución gral:

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{x}(t) = B\sin(\omega t+\phi) - \frac{\tilde{A}\Omega^2}{(\omega^2-\Omega^2)}\cos(\Omega t)}$$

si $\Omega = \omega \Rightarrow$ resonancia ya que amplitud onda $\to \infty$.

Circuito Resonante

① Condensador
② Inductancia
③ Resistencia
~ Fuente Voltaje

$V = V_0 \cdot \sin(\Omega t)$

Veamos porqué su nombre:

En un circuito se tiene que la dif. de Voltaje inducido por las fuentes debe ser igual a la suma de caídas de voltaje en cada comp.

ie :

$$V = V_{①} + V_{②} + V_{③}$$

$V_{①}$ ↓ caída en condensador

$V_{②}$ ↓ caída en inductancia

$V_{③}$ ↘ caída en resistencia.

Deberíamos recordar que:

$$V_{①} = \frac{Q}{C}$$

$$V_{②} = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$V_{③} = R \cdot i$$

Q: carga
C: capacitancia
L: inductancia
i: corriente $= \dfrac{dQ}{dt}$
R: resistencia

$$\Rightarrow V_0 \cdot \sin(\Omega t) = \frac{Q}{C} + L\frac{di}{dt} + R \cdot i$$

$$= \frac{Q}{C} + L \cdot \frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt}$$

$$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = V_0 \cdot \sin(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{Q}{CL} = \tilde{V}_0 \sin(\Omega t)$$

$$\boxed{\ddot{Q} + 2\gamma\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \tilde{V}_0 \sin(\Omega t)}$$

con $\gamma = \frac{R}{2L}$

$\omega_0^2 = \frac{1}{CL}$

$\tilde{V}_0 = \frac{V_0}{L}$

2.1 Oscilador armónico simple

El oscilador armónico simple es el caso más sencillo, donde únicamente se considera la fuerza recuperadora. Teniendo en cuenta que $F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$, la ecuación (1) nos da la siguiente ecuación diferencial

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ ,} \tag{3}$$

donde los puntos indican derivación respecto del tiempo, y $\omega_0^2 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural de vibración. La solución general a esta ecuación se puede escribir de la forma

$$x(t) = A \sin(\omega_o t + \varphi_0) \ , \tag{4}$$

donde A y φ_0 se obtienen imponiendo las condiciones iniciales.

2.2 Oscilador armónico amortiguado

Este caso más realista consiste en tener en cuenta el rozamiento del aire, que tiende a amortiguar la oscilación. El modelo más usual consiste en tomar un rozamiento proporcional a la velocidad,

$$F_r = -b\dot{x} \ , \tag{5}$$

con lo que la ecuación diferencial, obtenida a partir de la segunda ley de Newton, queda de la forma

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ ,} \tag{6}$$

donde $\gamma = b/2m$. La solución general a esta ecuación depende de la relación entre γ y ω_0 . Tenemos tres casos:

Oscilador infraamortiguado:

Este es el caso $\gamma < \omega_0$. La solución es de la forma

$$x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\gamma t} \sin\left(\omega_1 t + \varphi_0\right) \quad , \tag{7}$$

donde $\omega_1 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$.

Oscilador crítico:

En este caso $\gamma = \omega_0$. La solución general es

$$x(t) = \left(A + Bt\right) \mathrm{e}^{-\gamma t} \ . \tag{8}$$

Oscilador sobreamortiguado:

Por último, tenemos el caso $\gamma > \omega_0$. La nueva solución general es

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma t} \sinh\left(\omega_1 t + \varphi_0\right) \quad , \tag{9}$$

donde $\omega_1 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$.

2.3 Oscilador simple forzado

Decimos que un oscilador está forzado si sobre él se aplica una fuerza externa. El caso más interesante es cuando la fuerza de forzamiento es también periódica, por ejemplo sinuosidal,

$$F\mathrm{for} = f_0 \cos\omega t \ . \tag{10}$$

Esta fuerza se convierte en un término inhomogéneo en la ecuación diferencial del movimiento

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m}\ \cos\omega t \ ,} \tag{11}$$

y la solución general es de la forma

$$x(t) = A\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) + \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t \ . \tag{12}$$

2.4 Oscilador simple resonante

Como vemos, la solución anterior, ec. (12), es singular en el caso que la fuerza de forzamiento tenga la misma frecuencia que la frecuencia natural del oscilador. En este caso, tenemos un oscilador simple resonante, cuya solución es

$$x(t) = A\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) - \frac{f_0}{2m\omega_0^2}\, t\, \sin\omega t \ . \tag{13}$$

En este caso, obtenemos una solución secular, es decir, cuya amplitud aumenta en el tiempo hasta hacerse muy grande. Físicamente, esta solución no tiene sentido, ya que tarde o temprano el rozamiento, que siempre existe pero que en este caso despreciamos, entrará en juego impidiendo que la amplitud de oscilación crezca indefinidamente.

2.5 Oscilador amortiguado y forzado

En este caso más general incluimos una fuerza de forzamiento del tipo (10) a un oscilador amortiguado. La ecuación diferencial completa es, pues,

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m}\cos\omega t \ .} \tag{14}$$

En este caso, la solución general es de la forma

$$x(t) = x\,\mathrm{hom}\,(t) + A_p\cos\left(\omega t + \alpha\right) \ , \tag{15}$$

donde $x\,\mathrm{hom}\,(t)$ es la solución general del oscilador sin forzar, dada por las ecuaciones (7)-(9) según la relación entre γ y ω_0 , y además

$$A_p = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \ ;$$
$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \ .$$

Como vemos, la solución particular, proporcional a A_p , es la única que importa para tiempos grandes, ya que todas las soluciones de la ecuación homogénea decaen exponencialmente. Así, pues, tenemos un estado estacionario, correspondiente a oscilaciones de amplitud A_p .

En este caso, la solución es válida para todas las frecuencias de la fuerza de forzamiento. Sin embargo, vemos que la amplitud de respuesta es máxima para una frecuencia: la frecuencia de resonancia,

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}\ . \qquad (17)$$