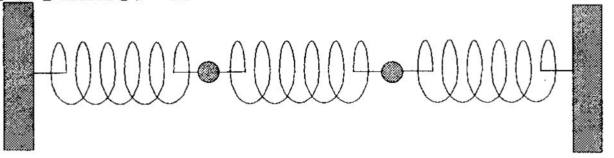
Problema 1



Si x_1 y x_2 indican las desviaciones de las partículas respecto a sus posiciones de equilibrio, la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}(m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2),$$

y la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2.$$

De allí las matrices **K** y **V** son

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} k+k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k+k_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo cual los valores propios satisfacen

$$\det\left(\omega^2 m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k+k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k+k_1 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

o bien

$$\omega^4 m^2 - 2\omega^2 mk - 2\omega^2 mk_1 + k^2 + 2kk_1 = 0,$$

de donde resultan

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_1}{m}}.$$

El sistema de ecuaciones lineales es

$$\omega^2 m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k+k_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene

$$(\omega^2 - \frac{(k+k_1)}{m})a_1 = -\frac{k_1}{m}a_2,$$

$$\boxed{a_1 = -\frac{\frac{k_1}{m}}{(\omega^2 - \frac{(k+k_1)}{m})}a_2,}$$

y para las dos frecuencias propias resulta

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{\frac{k_1}{m}}{\left(\frac{k}{m}-\frac{(k+k_1)}{m}\right)}a_{21} = a_{21},\\
a_{12} &= -\frac{\frac{k_1}{m}}{\left(\frac{k+2k_1}{m}-\frac{(k+k_1)}{m}\right)}a_{22} = -a_{22}.
\end{aligned}
$$

Normalización requiere que $\mathbf{A}^T\mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, por lo cual

$$
m\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ -a_{22} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{pmatrix} = I,
$$

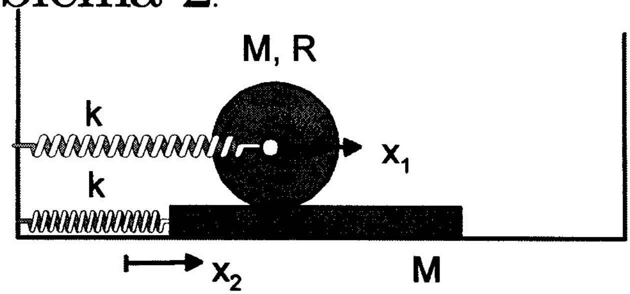
entonces $2ma_{11}^2 = 1$ y $2ma_{22}^2 = 1$, obteniendo

$$
\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},
$$

También indicaremos los modos normales $\boldsymbol{\varsigma} = \mathbf{A}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\eta}$ que resultan ser

$$
\begin{aligned}
\varsigma_1 &= \sqrt{\frac{m}{2}}\,(x_1 + x_2)\,,\\
\varsigma_2 &= \sqrt{\frac{m}{2}}\,(-x_1 + x_2)\,.
\end{aligned}
$$

Problema 2.



Tenemos

$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{R}\\
K &= \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2\\
&= \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}M(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2\\
&= \frac{3}{4}M\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}M(\dot{x}_1\dot{x}_2) + \frac{3}{4}M\dot{x}_2^2\\
V &= \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2
\end{aligned}
$$

De allí las matrices $\mathbf{K}$ y $\mathbf{V}$ son

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= M\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},\end{aligned}$$

por lo cual los valores propios satisfacen

$$\det\left(\omega^2 M\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\right) = 0,$$

o bien

$$2\omega^4 M^2 - 3\omega^2 Mk + k^2 = 0,$$

de donde resulta

$$\omega_1^2 = \frac{k}{M}, \qquad \omega_2^2 = \frac{k}{2M}.$$

El sistema de ecuaciones lineales es

$$\omega^2 M\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene

$$a_1 = \frac{\frac{1}{2}\omega^2}{\frac{3}{2}\omega^2 - \frac{k}{M}} a_2,$$

y para las dos frecuencias propias resultan

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{\frac{1}{2}\frac{k}{M}}{\frac{3}{2}\frac{k}{M} - \frac{k}{M}} a_{21} = a_{21}, \\ a_{12} &= \frac{\frac{1}{2}\frac{k}{2M}}{\frac{3}{2}\frac{k}{2M} - \frac{k}{M}} a_{22} = -a_{22}.\end{aligned}$$

Normalización requiere que $\mathbf{A}^T\mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, por lo cual

$$\begin{aligned}M\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ -a_{22} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{pmatrix} &= I, \\ M\begin{pmatrix} 2a_{11}^2 & 0 \\ 0 & 4a_{22}^2 \end{pmatrix} &= I\end{aligned}$$

entonces $2Ma_{11}^2 = 1$ y $4Ma_{22}^2 = 1$, obteniendo

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2M}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

También indicaremos los modos normales $\boldsymbol{\varsigma} = \mathbf{A}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\eta}$ que resultan ser

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^T\mathbf{K} &= \frac{M}{\sqrt{2M}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{M}{\sqrt{2M}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varsigma_1 &= \sqrt{\frac{M}{2}}\,(x_1 + x_2)\,, \\
\varsigma_2 &= \sqrt{M}\,(-x_1 + x_2)\,.
\end{aligned}
$$