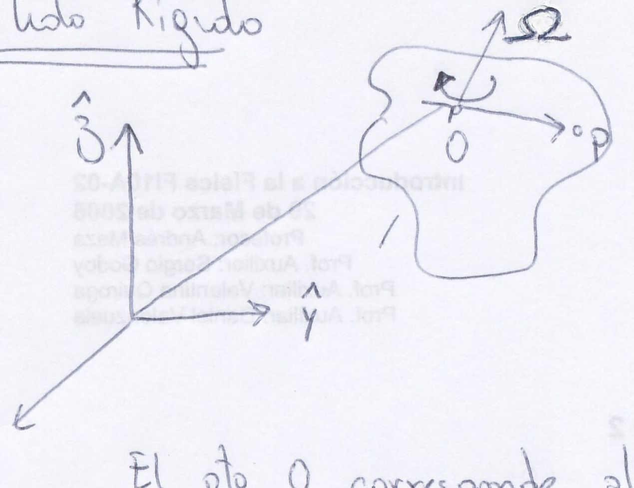
Sólido Rígido



$$\vec{R}_P = \vec{R}_0 + \vec{OP}$$
$$= \vec{R}_0 + \vec{r}_{c/r\,0}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{V}}_p = \vec{V}_0 + \dot{\vec{r}}_{c/r\,0}$$
$$= \vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{c/r\,0}$$

El pto 0 corresponde al pto. c/r al cual el sólido está rotando, es por esto que $\dot{\vec{r}}_{c/r\,0} = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{c/r\,0}$

$$\Rightarrow \underset{\text{cinética}}{\text{Energía}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{R}}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left(\vec{V}_0 + \dot{\vec{r}}_{i\,c/r\,0} \right)^2$$

discretizo el sólido en N masas pequeñas

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left(\vec{V}_0^{\,2} + 2\vec{V}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_{i\,c/r\,0} + \dot{\vec{r}}_{i\,c/r\,0}^{\,2} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \vec{V}_0^{\,2} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_{i\,c/r\,0} + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_{i\,c/r\,0}^{\,2}$$

$$= \vec{V}_0^{\,2} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} + \vec{V}_0 \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_{i\,c/r\,0} + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_{i\,c/r\,0}^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2} M \vec{V}_0^{\,2} + \vec{V}_0 \cdot \vec{V}_{CM\,c/r\,0} \cdot M + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_{i\,c/r\,0}^{\,2}}_{(\star)}$$

pero $\sum_{i=1}^{N} m_i = M$

$$\frac{\sum^{N} m_i \dot{\vec{r}}_{i\,c/r\,0}}{M} = \vec{V}_{CM\,c/r\,0}$$

$$(\star) \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}_{i\,c/r\,0} \right) \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}_{i\,c/r\,0} \right)$$

Utilizaré:
$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}_{i\,c/rO}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\, \vec{\Omega} \cdot \underbrace{\left(\vec{r}_{i\,c/rO} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}_{i\,c/rO}\right)}_{\vec{r}_{i\,c/rO} \times \dot{\vec{r}}_{i\,c/rO} = \vec{L}_{i\,c/rO}}$$

$$= \frac{\vec{\Omega}}{2} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \left(\vec{r}_{i\,c/rO} \times \dot{\vec{r}}_{i\,c/rO}\right)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\, \dot{r}^2_{i\,c/rO} = \frac{\vec{\Omega}}{2} \cdot \vec{L}_{c/rO}$$ momentum angular con respecto a O.

Pero $\vec{r}_{i\,c/rO} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}_{i\,c/rO} = -\vec{r}_{i\,c/rO} \times \left(\vec{r}_{i\,c/rO} \times \vec{\Omega}\right)$

y si aplicamos el producto cruz matricialmente

$$\Rightarrow \vec{r}_{i\,c/rO} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}_{i\,c/rO} = -\begin{pmatrix} -(r_y^2 + r_z^2) & r_x r_y & r_x r_z \\ r_x r_y & -(r_x^2 + r_z^2) & r_y r_z \\ r_x r_z & r_y r_z & -(r_x^2 + r_y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}$$

Si $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$

$$\Rightarrow \vec{L}_{i\,c/rO} = \underbrace{\begin{pmatrix} (y^2+z^2) & -xy & -xz \\ -xy & (x^2+z^2) & -yz \\ -xz & -yz & (x^2+y^2) \end{pmatrix}}_{\mathbb{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}}_{\vec{\Omega}}$$

Producto cruz escrito matricialmente:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \vec{c}$$

pero:

$$\vec{a}\times\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})}_{\vec{c}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{pmatrix} -(a_y^2+a_z^2) & a_x a_y & a_x a_z \\ a_x a_y & -(a_x^2+a_z^2) & a_y a_z \\ a_x a_z & a_y a_z & -(a_x^2+a_y^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

y si consideramos $N \to \infty \Rightarrow \sum \to \int$

$$\Rightarrow \vec{L}_{c/r_O} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{L}_{i c/r_O} \to \int dm \, \mathbb{M} \cdot \vec{\Omega}$$

$$\to \mathbb{I} \, \vec{\Omega} \quad , \text{con } \mathbb{I}_{ij} = \int \mathbb{M}_{ij} \, dm$$

matriz de inercia.

Propiedades matriz de inercia.

- Simétrica, real $\Rightarrow$ diagonalizable en la base de vectores propios. (ver apunte MA11A si no me creen)

  Estos vectores propios se llaman direcciones o ejes principales de inercia. (en el pto. seleccionado).

- 2 valores propios iguales $\Rightarrow$ todos los ejes del plano correspondiente a esos dos vectores propios son ejes principales de inercia.

- 3 valores propios iguales $\Rightarrow$ todo eje en ese pto es eje principal de inercia.

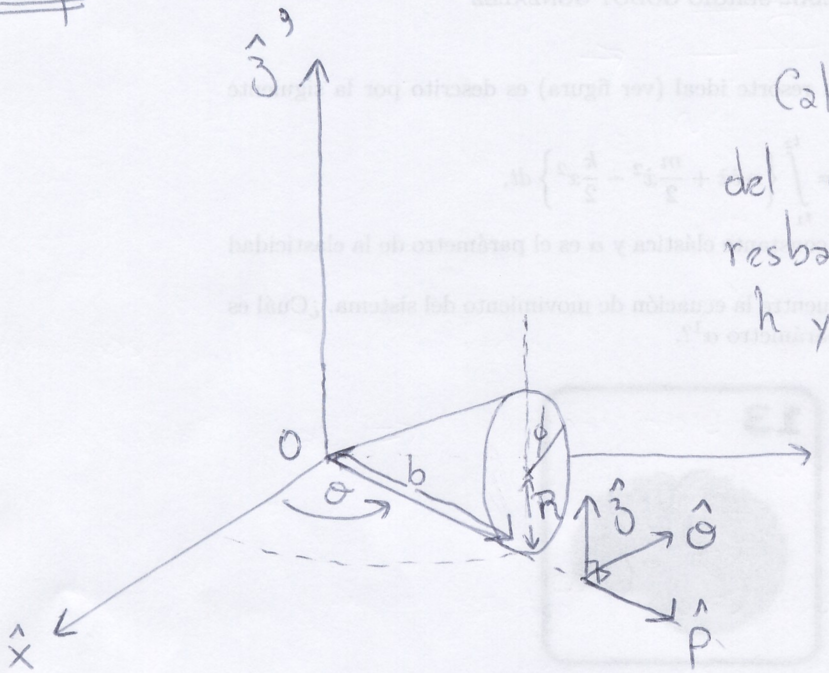
Recordar que $\mathbb{I}_{ij}$ depende del pto c/r al cual estamos calculando las velocidades

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{I}_{ij} \to \mathbb{I}_{ij}^{[O]}}$$

Finalmente:

$$\boxed{\Rightarrow T = \frac{1}{2} M \vec{V}_0^{\,2} + M \vec{V}_0 \cdot \vec{V}_{cm\,c/r\,O} + \frac{1}{2} \vec{\Omega}\, \mathbb{I}^{[0]} \vec{\Omega}}$$

Ejemplo



Calcular energía cinética del cono que rueda sin resbalar. Cono de altura h y ángulo α, masa M y densidad de masa homogénea ρ.

Entonces:

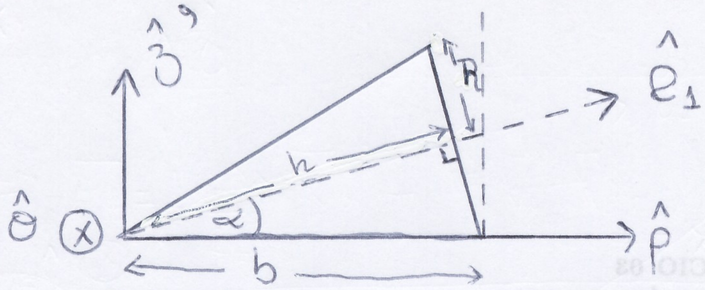
Notemos que el pto O está fijo en el origen $\Rightarrow \vec{V}_0 = \vec{0}$ (pto O = vértice del cono)

$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \vec{\Omega}\, \mathbb{I}^{[0]} \vec{\Omega}$. Nos falta encontrar $\vec{\Omega}$ e $\mathbb{I}^{[0]}$.

Como rueda sin resbalar $\Rightarrow b\theta = R\phi$

$$\boxed{\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{R}{b}\dot{\phi}}$$

Debido a que el cono descansa o resbala sobre el plano notemos que:



Notemos que $\dot{\phi}$ va según $-\hat{e}_1$

y que $\dot{\theta}$ según $\hat{z}'$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Omega} = \dot{\theta}\,\hat{z}' - \dot{\phi}\,\hat{e}_1}$$

$$\tan\alpha = \frac{R}{h} \Rightarrow R = h\tan\alpha$$

$$\cancel{\Rightarrow R = h\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} \qquad \cancel{R = h\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

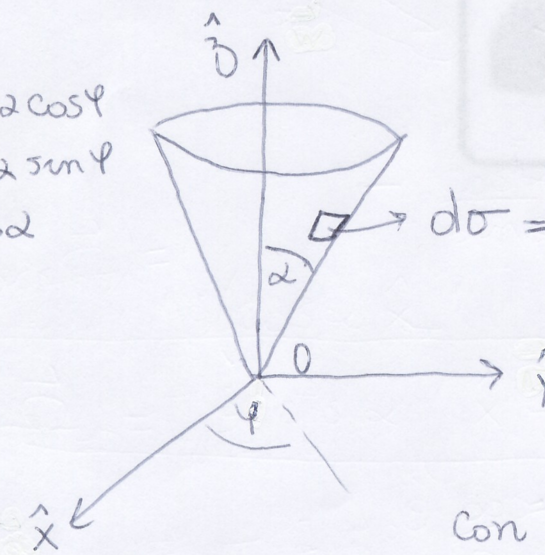
$$\cos\alpha = \frac{h}{b}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{h}{\cos\alpha}}$$

Nos falta $\mathbb{I}^{[O]}$:

Voy a calcular los momentos de inercia en estos ejes. (son ejes apartes, este es cálculo paralelo)

$x = r\sin\alpha\cos\varphi$
$y = r\sin\alpha\sin\varphi$
$z = r\cos\alpha$



$\rightarrow d\sigma = r\sin\alpha\, dr\, d\varphi$ elemento de área en el manto del cono.

el elemento $dm = \rho\, d\sigma$

con $\rho = \dfrac{M}{\pi \cdot R \cdot b} = \dfrac{\text{masa total}}{\text{area del manto}}$

$$I_{xx} = \int \rho\, d\sigma\,(y^2+z^2) = \int \rho\,\underbrace{r^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}_{y^2}\,\underbrace{r\sin\alpha\, dr\, d\varphi}_{d\sigma}$$

$$+ \int \rho\, r^2\cos^2\alpha\,\underbrace{r\sin\alpha\, dr\, d\varphi}_{d\sigma}$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_{xx} = \rho \operatorname{sen}^3\alpha \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{b} r^3 \operatorname{sen}^2\varphi \, dr\, d\varphi + \rho \cos^2\alpha \operatorname{sen}\alpha \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{b} r^3 \, dr\, d\varphi$$

$$= \frac{M}{\cancel{\pi} R b}\left(\frac{R}{b}\right)^3 \cdot \frac{b^4}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\cancel{\pi} + \frac{M}{\cancel{\pi} R b}\left(\frac{h}{b}\right)^2 \cdot \frac{R}{b} \cdot 2\cancel{\pi} \, \frac{b^4}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{I}_{xx} = \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{2}}$$

$$\mathbb{I}_{yy} = \int \rho \, d\sigma \left(x^2 + z^2\right) = \rho \operatorname{sen}^3\alpha \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{b} r^3 \cos^2\varphi \, dr\, d\varphi + \frac{Mh^2}{2}$$

$$= \frac{M}{\pi R b}\left(\frac{R}{b}\right)^3 \frac{b^4}{4} \cdot \frac{2\pi}{2} + \frac{Mh^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{I}_{yy} = \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{2}}$$

¿por qué? ¿por qué $\mathbb{I}_{xx} = \mathbb{I}_{yy}$?

Debido a la simetría del cono, da lo mismo mirarlo y/o moverlo con respecto a $\hat{x}$ e $\hat{y}$, es más, si muevo los ejes $\hat{x}$ e $\hat{y}$ voy a seguir viendo lo mismo.

Seguimos calculando ...

$$\mathbb{I}_{zz} = \int \rho\, d\sigma\, (x^2+y^2) = \int \rho\, r^2 \sin^2\alpha\, r \sin\alpha\, dr\, d\varphi$$

$$= \frac{M}{\cancel{\pi} R b}\left(\frac{R}{b}\right)^3 \cdot \cancel{2\pi} \cdot \frac{b^4}{\cancel{4}_2} = \frac{MR^2}{2}$$

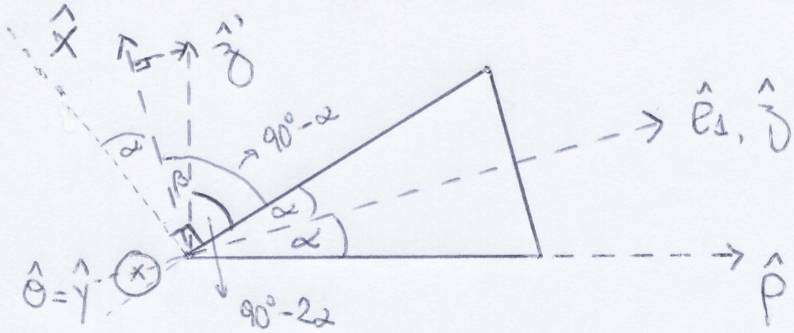
queda como propuesto demostrar que los demás términos de la matriz son ceros.

$$\Rightarrow \mathbb{I}^{[O]} = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4}+\frac{Mh^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4}+\frac{Mh^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}$$ "Matriz de Inercia de un cono c/r a su vértice"

Hemos dicho anteriormente que la matriz de inercia es diagonal cuando es calculada en los vectores propios de ella $\Rightarrow \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ son esos ejes.

Ahora debemos calcular $\vec{\Omega}$ en los ejes principales del cono, de modo contrario tendríamos que calcular la matriz en los ejes en los que conocemos $\vec{\Omega}$

Más fácil lo primero, entonces veamos que podemos reconocer: $\hat{e}_1 = \hat{z}$, $\hat{\theta} = \hat{y}$ pero $\vec{\Omega}$ tiene componente según $\hat{z}'$ tb. debemos escribir $\hat{z}'$ en función de $\hat{x}, \hat{y}$ y $\hat{z}$



$$\cancel{90°} - 2\alpha + \beta + \alpha = \cancel{90°}$$

$$\beta - \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{z}' = \text{sen}\,\alpha\,\hat{z} + \cos\alpha\,\hat{x}}$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} = \dot{\theta}\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{z} + \dot{\theta}\cos\alpha\,\hat{x} - \dot{\phi}\,\hat{z}$$

$$= \dot{\theta}\cos\alpha\,\hat{x} + \left(\dot{\theta}\,\text{sen}\,\alpha - \frac{b}{R}\,\dot{\theta}\right)\hat{z}$$

$$\text{pero} \quad \frac{b}{R} = \frac{\cancel{h}}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cancel{h}\cdot\tan\alpha} = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} = \dot{\theta}\left(\cos\alpha\,\hat{x} - \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\,\hat{z}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Omega} = \dot{\theta}\cos\alpha\left(\hat{x} - \text{cotg}\,\alpha\,\hat{z}\right)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2\cos^2\alpha\cdot I_{xx}\right) + \frac{1}{2}\,\dot{\theta}^2\cos^2\alpha\,\text{cotg}^2\alpha\, I_{zz}$$