

Capítulo 8

Sistemas extendidos

8.1. Repaso

8.1.1. Centro de masa

En la sección §2.2 se dió algunas de las definiciones básicas necesarias para describir sistemas de muchas partículas. Entre ellos, la masa total del sistema y la posición y velocidad del centro de masa,

$$M = \sum_{k=1}^N m_a, \quad \vec{R}_G = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^N m_a \vec{r}_a, \quad \vec{V}_G = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^N m_a \vec{v}_a \quad (8.1.1)$$

El centro de masa tiene como ecuación de movimiento

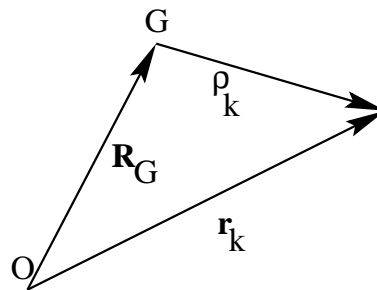
$$M \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{F}^{\text{total}} \quad \text{donde} \quad \vec{F}^{\text{ext}} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_a \quad (8.1.2)$$

y se demostró que la fuerza a la derecha es la suma de las fuerzas externas sobre el sistema.

8.1.2. Posiciones con respecto al centro de masa

Ya se ha visto que la energía cinética puede ser separada en la energía cinética del sistema en su conjunto y la energía cinética total con respecto al sistema de referencia que acompaña al centro de masa:

$$\begin{aligned} K^{\text{tot}} &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a v_a^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \left(\vec{V}_G + \dot{\vec{\rho}}_a \right)^2 \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \left(v_G^2 + \dot{\rho}_a^2 + 2\dot{\vec{\rho}}_a \cdot \vec{v}_G \right)$$

pero el último término en el paréntesis es nulo debido a (2.3.24). De aquí que

$$K^{\text{tot}} = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \dot{\rho}_a^2 \quad (8.1.3)$$

8.1.3. Momento angular

En §2.2 también se definió el momento angular total del sistema y se vió que obedece a la ecuación

$$\frac{d\vec{\ell}_O}{dt} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{f}_a^{\text{ext}} \quad (8.1.4)$$

Hasta aquí se ha trabajado sólo con un sistema inercial S .

También se define

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_G &= \sum_a m_a \vec{\rho}_a \times \vec{v}_a \\ &= \sum_a m_a \vec{\rho}_a \times \dot{\vec{\rho}}_a \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

y el momento angular de la masa total ubicada en el centro de masa

$$\vec{\ell}_O^G = M \vec{R}_G \times \vec{v}_G \quad (8.1.6)$$

de modo que se cumple que

$$\vec{\ell}_O = \vec{\ell}_O^G + \vec{\ell}_G \quad (8.1.7)$$

La dinámica de $\vec{\ell}_G$ se obtiene a partir de tomar la derivada $\dot{\vec{\ell}}_G = \sum m_a \vec{\rho}_a \times \dot{\vec{\rho}}_a$ y hacer uso de que $m_a \dot{\vec{\rho}}_a = m_a \ddot{\vec{r}}_a - m_a \ddot{\vec{R}}_G$. El primer término es la fuerza total \vec{F}_a sobre la partícula a mientras que el segundo, al sumar sobre a se anula porque queda $(\sum_a m_a \vec{\rho}_a) \times \ddot{\vec{R}}_G$ por lo cual

$$\dot{\vec{\ell}}_G = \vec{\tau}_G \equiv \sum_a \vec{\rho}_a \times \vec{F}_a \quad (8.1.8)$$

Todo esto fue visto en el capítulo 2. También se vió que

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_O &= \vec{R}_G \times \sum_a \vec{f}_a^{\text{ext}} + \sum_a \vec{\rho}_a \times \vec{f}_a^{\text{ext}} \\ &= \vec{\tau}_O^G + \vec{\tau}_G \end{aligned} \quad (8.1.9)$$

8.2. Sistemas rígidos con punto fijo

El movimiento de sistemas rígidos puede ser bastante complejo. Es conveniente plantear el tema a partir de casos relativamente sencillos. Se comienza por el caso en que el sistema rígido se mueve manteniendo un punto fijo. Los trompos suelen girar manteniendo fijo el punto de contacto con el suelo.

La expresión “sistema rígido con punto fijo” significa que la distancia entre los puntos del sistema permanecen fijos y que la distancias entre los puntos del sistema y el punto fijo también permanecen constantes.

8.2.1. Momento angular y matriz de inercia

Si P es el punto fijo y existe un sistema inercial $S = (P; X, Y, Z)$, interesa además introducir un sistema de referencia $S' = (P; X', Y', Z')$ en el cual el sistema rígido está fijo. Puesto que el vector \vec{R} de posición relativa de ambos sistemas es nulo y puesto que $\vec{v}' = 0$, la expresión (7.2.3) se reduce a

$$\vec{v}(t) = \vec{\Omega} \times \vec{r}'$$

En particular, la velocidad de cada masa m_a del sistema es

$$\vec{v}_a = \vec{\Omega} \times \vec{r}_a' \quad (8.2.1)$$

teniendo presente que en general $\vec{\Omega}$ cambia en el tiempo. Además notamos que, puesto que $\vec{R} = 0$ se cumple que $\vec{r}_a = \vec{r}_a'$ (ver (7.2.1)). De aquí que

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_P &= \sum_a m_a \vec{r}_a \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_a) \\ &= \sum_a m_a (r_a^2 \vec{\Omega} - \vec{r}_a \cdot \vec{\Omega} \vec{r}_a) \end{aligned}$$

que por componentes es (se usa la notación $x_{ai} \equiv (\vec{r}_a)_i$)

$$\begin{aligned} (\vec{\ell}_P)_i &= \sum_a m_a \left[r_a^2 \Omega_i - \sum_j x_{aj} \Omega_j x_{ai} \right] \\ &= \sum_a m_a \sum_j \left[r_a^2 \delta_{ij} - x_{ai} x_{aj} \right] \Omega_j \\ &= \sum_j I_{ij}^P \Omega_j \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

lo que se resume como

$$\vec{\ell}_P = \mathbf{I}^P \vec{\Omega} \quad (8.2.3)$$

donde la *matriz de inercia* es

$$I_{ij}^P = \sum_a m_a (r_a^2 \delta_{ij} - x_{ai} x_{aj})$$

La definición de matriz de inercia contiene N sumandos, uno por cada partícula del sistema.

En algunos casos puede ser útil separar a un sistema rígido en dos sistemas con N_1 y N_2 partículas cada uno, $N = N_1 + N_2$ y en tal caso la matriz de inercia se puede separar en dos, una con índices a que toma N_1 valores y la otra que toma el resto de los valores. La matriz de inercia del sistema completo no es más que la suma de las dos matrices de inercia parciales,

$$I_{ij}^P = {}^{(1)}I_{ij}^P + {}^{(2)}I_{ij}^P \quad (8.2.4)$$

Un paréntesis sobre notación: el producto escalar entre dos vectores tridimensionales puede ser escrito como la suma de los productos de sus componentes cartesianas,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned}$$

donde las componentes son designadas sub- una letra (como a_y) y luego por un número (como a_2). Esta última notación nos resultará más cómoda, porque ahora se puede escribir

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

También el producto de una matriz por un vector, $A\vec{a}$ se puede escribir por componentes,

$$(A\vec{a})_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} a_j$$

Y por último δ_{ij} se usa para designar a los elementos de la matriz identidad, es decir, δ_{ij} vale cero si $i \neq j$ y vale la unidad si $i = j$.

Las componentes en la diagonal de la matriz I^P se llaman los *momentos de inercia*. Por ejemplo

$$I_{11}^P = \sum_a m_a (r_a^2 - x_a^2) = \sum_a m_a (y_a^2 + z_a^2)$$

y los tres son:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_a m_a (y_a^2 + z_a^2) \\ I_{22} &= \sum_a m_a (z_a^2 + x_a^2) \\ I_{33} &= \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2) \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

En el caso de I_{ii} el paréntesis en la sumatoria contiene la distancia entre la partícula a y el eje en dirección X_i que pasa por P .

$$I = \sum_a m_a \begin{pmatrix} y_a^2 + z_a^2 & -x_a y_a & -x_a z_a \\ -x_a y_a & z_a^2 + x_a^2 & -y_a z_a \\ -x_a z_a & -y_a z_a & x_a^2 + y_a^2 \end{pmatrix} \quad (8.2.6)$$

♠ Obtenga el valor de la tensión de la barra en el punto \mathcal{O} como función del ángulo.

8.2.2. Ejes apropiados para la matriz de inercia

Normalmente es conveniente calcular la matriz de inercia en ejes en los que \mathbf{I}_P resulta constante. Puede existir más de una elección de ejes “acompañantes” en los cuales esto se logra.

La matriz de inercia es real y simétrica y además, como se comentó bajo (8.2.7), es positiva semidefinida, lo que implica que es diagonalizable y en la diagonal quedan cantidades no negativas. La orientación de los ejes en que se logra esta forma para \mathbf{I}_P se llaman los ejes principales y son autovectores de \mathbf{I}_P .

Si un cuerpo es simétrico existen planos distintos (perpendiculares entre sí) respecto a los cuales, al reflejar el sistema, este queda igual. El caso extremo es una esfera que queda igual al ser reflejada con respecto a cualquier plano que pase por su centro. Un cubo es un caso donde no cualquier plano sirve. Un cilindro es simétrico con respecto al plano perpendicular a su eje y que pasa por su punto medio, y también lo es con respecto a cualquier plano que contenga al eje del cilindro.

8.2.3. Ejemplo: péndulo cónico doble

Descripción directa

Consideremos un péndulo cónico doble como el de la figura. Está caracterizado por un ángulo θ fijo y por brazos para las masas m_1 y m_2 colineales de largos b y c respectivamente. Los vectores de posiciones y velocidades de las dos partículas del péndulo cónico que se muestra en la figura son

$$\vec{r}_1 = \hat{k}b \cos \theta + \hat{\rho}b \sin \theta \quad \vec{r}_2 = -\hat{k}c \cos \theta - \hat{\rho}c \sin \theta$$

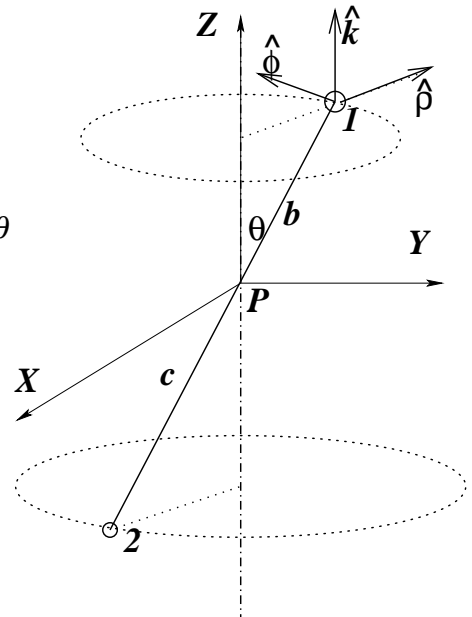
$$\vec{v}_1 = \hat{\phi} \omega b \sin \theta \quad \vec{v}_2 = -\hat{\phi} \omega c \sin \theta$$

Con ellos fácilmente se calcula que

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_P &= m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 \\ &= \omega (m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin \theta (\hat{k} \sin \theta - \hat{\rho} \cos \theta) \end{aligned}$$

La velocidad angular del péndulo cónico es

$$\vec{\Omega} = \omega \hat{k}$$

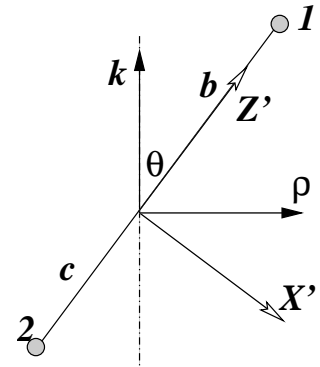


Ahora se describirá lo mismo pero usando, por un lado, la matriz de inercia descrita en el sistema de referencia S' unida al péndulo, para luego calcular el momento angular como producto de esa matriz con el vector de velocidad angular.

Matriz de inercia y momento angular

Se define el sistema acompañante S' con eje Z' coincidiendo con la barra del péndulo y se escoje el eje X' en el plano ZZ' . La matriz de inercia de la barra con dos masas en sus extremos es particularmente sencilla en el sistema S' porque las coordenadas de las dos masas son $\vec{r}_1' = (0, 0, b)$ y $\vec{r}_2' = (0, 0, -c)$ lo que da la matriz de inercia

$$I = \begin{pmatrix} m_1 b^2 + m_2 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 b^2 + m_2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



La matriz de inercia que se definiera con respecto a los ejes de S es dependiente del tiempo y conduce a una descripción correcta pero más bastante complicada.

La velocidad angular y el momento angular

La matriz de inercia está expresada en la base de S' , de modo que la velocidad angular se debe escribir en la misma base. De la figura se ve que $\hat{k} = \hat{k}' \cos \theta - \hat{i}' \sin \theta$ por lo cual

$$\vec{\Omega} = \omega (\hat{k}' \cos \theta - \hat{i}' \sin \theta) = \begin{pmatrix} -\omega \sin \theta \\ 0 \\ \omega \cos \theta \end{pmatrix}$$

De esta forma los vectores cilíndricos de S se relacionan con los vectores cartesianos de S'

El momento angular se calcula multiplicando a la matriz de inercia con la velocidad angular,

$$\vec{\ell}_P = \begin{pmatrix} m_1 b^2 + m_2 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 b^2 + m_2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega \sin \theta \\ 0 \\ \omega \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \sin \theta (m_1 b^2 + m_2 c^2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_P &= -\omega \sin \theta (m_1 b^2 + m_2 c^2) \hat{i}' \\ &= \omega \sin \theta (m_1 b^2 + m_2 c^2) (\hat{k} \sin \theta - \hat{\rho} \cos \theta) \end{aligned}$$

que es el resultado que se obtuvo en la primera parte.

Torque y velocidad angular

Aun no se ha dicho el valor de ω , pero si se desea que la única fuerza externa que ejerza torque desde P sea el peso, entonces ω debe tener un valor muy preciso. Para determinar ω se exige que $\vec{\ell}_P = \vec{\tau}_P$ y se deduce que el torque del peso es

$$\vec{\tau}_P = (m_1 b - m_2 c) \sin \theta g \hat{\phi}$$

mientras que la derivada del momento angular es

$$\dot{\vec{\ell}}_P = -\omega^2 (m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin \theta \cos \theta \hat{\phi}$$

Puesto que estas dos expresiones deben ser iguales se obtiene que

$$\omega^2 = \frac{(m_2 c - m_1 b)g}{(m_1 b^2 + m_2 c^2) \cos \theta}$$

Pareciera que el numerador pudiera ser negativo, pero se puede ver que tal situación es inestable. En efecto, para que este sistema sea estable el centro de masa G , que está en la recta que une a las dos masas, tiene que estar debajo de P .

8.2.4. Propiedades de la matriz de inercia

Expresión para la energía cinética

Aproverchando que $\vec{v}_a = \vec{\Omega} \times \vec{r}_a$ se puede deducir:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \vec{v}_a \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}_a) \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \vec{\Omega} \cdot (\vec{r}_a \times \vec{v}_a) \\ &= \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\ell}_P \\ &= \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \mathbf{I}_P \vec{\Omega} \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

Puesto que esta propiedad es válida para cualquier velocidad angular $\vec{\Omega}$ que se le dé al sistema, y puesto que $K \geq 0$ entonces la matriz \mathbf{I}_P es positiva semidefinida. Esto implica que \mathbf{I}_P es diagonalizable y sus autovalores son nonegativos.

Si se define \hat{n} como el vector unitario que en cada instante apunta en la dirección de $\vec{\Omega}$, es decir,

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{n}$$

entonces

$$K = \frac{1}{2} \Omega^2 \hat{n} \cdot \mathbf{I}_P \hat{n} = \frac{1}{2} I_{P,n} \Omega^2 \quad (8.2.8)$$

Aquí $I_{P,n}$ es el escalar *momento de inercia* relativo al eje que pasa por P y tiene dirección \hat{n} , (P, \hat{n}) y su forma explícita es

$$I_{P,n} = \sum_a m_a (r_a^2 - (\vec{r}_a \cdot \hat{n})^2) \quad (8.2.9)$$

Relación con el momento de inercia respecto a G

Es útil notar que

$$\begin{aligned}
 (\vec{r} \times \hat{n}) \cdot (\vec{r} \times \hat{n}) &= \vec{r} \cdot (\hat{n} \times (\vec{r} \times \hat{n})) \\
 &= \vec{r} \cdot (\vec{r} - \hat{n} \cdot \vec{r} \hat{n}) \\
 &= r^2 - (\vec{r} \cdot \hat{n})^2
 \end{aligned} \tag{8.2.10}$$

lo que permite ver que otra forma de escribir la matriz de inercia es

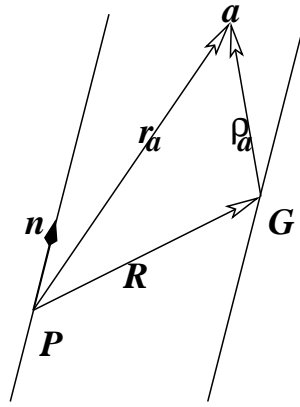
$$I_{P,n} = \sum_a m_a (\vec{r}_a \times \hat{n}) \cdot (\vec{r}_a \times \hat{n}) \tag{8.2.11}$$

Si G es el centro de masa, el que suponemos que no está en el eje (P, \hat{n}) , se puede relacionar los momentos de inercia $I_{P,n}$ y $I_{G,n}$ donde el segundo se define relativo a un eje (G, \hat{n}) con la misma dirección \hat{n} . Si se denota por \vec{r}_a la posición de m_a desde P y $\vec{\rho}_a$ la posición desde G , y el vector de P a G se le designa \vec{R} entonces

$$\vec{r}_a = \vec{R} + \vec{\rho}_a$$

A partir de (8.2.11) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 I_{P,n} &= \sum_a m_a (\vec{r}_a \times \hat{n})^2 \\
 &= \sum_a m_a (\vec{\rho}_a \times \hat{n})^2 + \sum_a m_a (\vec{R} \times \hat{n})^2 + 2 \sum_a m_a (\vec{R} \times \hat{n}) \cdot (\vec{\rho}_a \times \hat{n})
 \end{aligned}$$



La última de las sumatorias se anula debido a (2.3.23) lo que finalmente conduce a

$$I_{P,n} = I_{G,n} + M (\vec{R} \times \hat{n})^2 \tag{8.2.12}$$

Si G estuviese sobre el eje (P, \hat{n}) , entonces $\vec{R} \times \hat{n} = 0$ y ambos momentos resultarían iguales.

Teorema de Steiner

Consideremos la matriz de inercia \mathbf{I}_P con respecto a ciertos ejes con origen en un punto P y veamos su relación con la matriz de inercia con respecto al centro de masa G y ejes paralelos a los anteriores. La relación entre los vectores posición es

$$\vec{r}_a = \vec{R} + \vec{\rho}_a$$

y

$$\begin{aligned}
 \sum_a m_a r_a^2 &= \sum_a m_a (\rho_a^2 + R^2 + 2\vec{\rho}_a \cdot \vec{R}) \\
 &= \sum_a m_a (\rho_a^2 + R^2)
 \end{aligned}$$

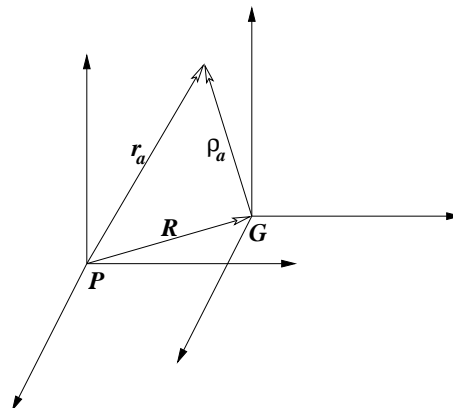
mientras que

$$\sum_a m_a x_{ai} x_{aj} = \sum_a m_a \left(\rho_{ai} \rho_{aj} + R_i \rho_{aj} + \rho_{ai} R_j + R_i R_j \right) = \sum_a m_a \rho_{ai} \rho_{aj} + M R_i R_j$$

lo que determina que

$$I_{ij}^P = I_{ij}^G + M \left(R^2 \delta_{ij} - R_i R_j \right) \quad \text{Teorema de Steiner} \quad (8.2.13)$$

EJERCICIO: Escriba la relación anterior para dos puntos P_1 y P_2 (ejes paralelos) y reste ambas relaciones. Vea que obtiene una relación entre I^{P_1} e I^{P_2} .



8.3. Límite al caso continuo

8.3.1. Ejemplo: Péndulo de N masas y su límite al continuo

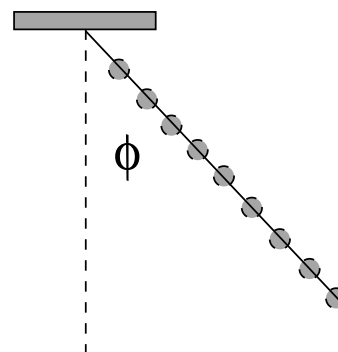
Del discreto al continuo

Veamos el caso de un péndulo que consta de una barra de masa despreciable a la cual están fijas N masas m a intervalos regulares,

$$\vec{r}_k = k a \hat{\rho} \quad \vec{v}_k = k a \dot{\phi} \hat{\phi} \quad (8.3.14)$$

donde $k = 1, 2, \dots, N$. El momento angular con respecto al punto fijo es

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_O &= \sum_{k=1}^N m \vec{r}_k \times \vec{v}_k \\ &= m \left(\sum_k k^2 \right) a^2 \dot{\phi} \hat{k} \\ &= \frac{m}{6} N(N+1)(2N+1) a^2 \dot{\phi} \hat{k} \end{aligned} \quad (8.3.15)$$



En este caso el momento de inercia I es

$$I = \frac{m}{6} N(N+1)(2N+1) a^2 \rightarrow \frac{M}{3} R^2 \quad (8.3.16)$$

El torque que produce el peso de las partículas puede ser reducido siguiendo un procedimiento similar al usado para determinar el momento angular. Se obtiene

$$\vec{\tau}_O = -\frac{m}{2} N(N+1) a g \sin \phi \hat{k} \quad (8.3.17)$$

Se concluye que la ecuación dinámica es

$$\ddot{\phi} = -\frac{3g}{(2N+1)a} \sin \phi \quad (8.3.18)$$

El caso $N = 1$ recupera lo que ya se conocía del péndulo simple. Otro caso interesante es aquel en que se toma el límite $N \rightarrow \infty$ con $a \rightarrow 0$ tal que $R = Na$ quede fijo. En tal límite se trata de un péndulo en forma de barra con masa distribuida a todo lo largo en forma continua. La ecuación queda

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\frac{2}{3}R} \sin \phi \quad (8.3.19)$$

La diferencia entre la ecuación para el péndulo simple y esta ecuación es que en la primera aparece R donde acá aparece $\frac{2}{3}R$. Tangencialmente se menciona que en este caso límite también se debe tomar $m \rightarrow 0$ tal que la masa total $M = Nm$ permanezca fija.

♠ *Determinar la energía cinética y potencial para el péndulo de N masas y luego determinar los casos extremos $N = 1$ y $N \rightarrow \infty$. En particular demuestre que la energía cinética es*

$$\begin{aligned} K &= \frac{m}{2} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} a^2 \dot{\phi}^2 \\ &= \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (8.3.20)$$

La cantidad I es el ya definido *momento de inercia* que juega un papel importante en la dinámica de cuerpos rígidos.

En el caso límite ya discutido la energía cinética toma la forma

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 \quad \text{con} \quad I = \frac{1}{3} M R^2 \quad (8.3.21)$$

Directamente el caso continuo

Existe una forma diferente de estudiar el caso de la barra continua. En el planteamiento se reemplaza a por un diferencial de largo $a = d\rho$, se reemplaza $\frac{m}{a}$ por una densidad lineal de masa, $\frac{m}{a} \rightarrow \lambda$ y en lugar del producto ka se escribe la variable continua de longitud ρ . Entonces el momento angular es

$$\vec{\ell}_O = \int_0^R \rho \hat{\rho} \times (\lambda \rho \dot{\phi} \hat{\phi}) d\rho = \hat{k} \lambda \dot{\phi} \int_0^R \rho^2 d\rho = \hat{k} \lambda \dot{\phi} \frac{R^3}{3} \quad (8.3.22)$$

En forma semejante el torque es

$$\vec{\tau}_O = -\hat{k} g \sin \phi \lambda \int_0^R \rho d\rho = -\hat{k} \lambda g \sin \phi \frac{R^2}{2} \quad (8.3.23)$$

lo que permite recuperar (8.3.19).

♠ *Obtenga la ecuación de péndulos continuos para los cuales la densidad lineal no es uniforme, sino que depende de s , $\lambda(s)$. Hágalo para el caso general y también aplique sus resultados para algunas funciones $\lambda(s)$ sencillas.*

8.3.2. Densidades de masa y el centro de masa

Un cuerpo rígido continuo ya no es descrito por un conjunto discreto de masas sino por medio de una función *densidad de masa*. Si el cuerpo puede ser asimilado a una línea (el caso de una delgada barra ideal), la densidad de masa es una densidad por unidad de largo y se designa $\lambda(\vec{r})$. Si el cuerpo es una lámina entonces es descrito por una densidad de masa por unidad de superficie, la que se denota $\sigma(\vec{r})$ y si se trata de un volumen se usa la densidad volumétrica $\rho(\vec{r})$. Por definición la integral de la densidad sobre todo el cuerpo da la masa total M del cuerpo.

La masa total del cuerpo continuo se obtiene integrando su densidad. Según la dimensión y lo dicho en el párrafo anterior la masa se calcula

$$\begin{aligned} M &= \int \lambda(\vec{r}) ds \\ M &= \int \sigma(\vec{r}) d\mathcal{S} \\ M &= \int \rho(\vec{r}) dV \end{aligned} \quad (8.3.24)$$

donde ds es un elemento de línea, $d\mathcal{S}$ es un elemento de área (como $dx dy$ ó $\rho d\rho d\phi$) y dV es un elemento de volumen (como $dx dy dz$ ó $\rho d\rho d\phi dz$ ó $r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$).

El centro de masa en estos casos continuos es una integral de $\frac{1}{M}\vec{r}$ multiplicado por la densidad que corresponda y se integra sobre todo el cuerpo. Por ejemplo,

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M} \int_{\text{volumen}} \vec{r} \rho(\vec{r}) d^3r \quad (8.3.25)$$

Ejemplo: círculo con punto fijo en su perímetro

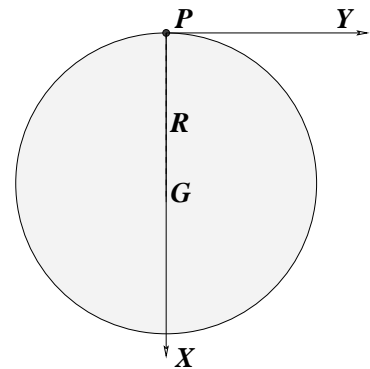
Se quiere calcular el momento de inercia de una lámina circular de masa M relativo a un eje perpendicular al círculo y que pasa por un punto P en el perímetro. Se supone densidad uniforme por lo que ella es

$$\sigma_0 = \frac{M}{\pi R^2}$$

Se designará Z al eje perpendicular a la figura.

El momento de inercia relativo al eje que pasa por el centro G del círculo (el centro de masa) con dirección \hat{k} es, según (8.2.11),

$$I_{G,\hat{k}} = \int (\vec{p} \times \hat{k})^2 dm$$



donde, $\vec{p} = \rho \hat{p}$ y si dS es el elemento de superficie, $dm = \sigma_0 dS$ y en coordenadas polares $dS = \rho d\rho d\phi$. Nótese que $\vec{p} \times \hat{k} = \rho \hat{p} \times \hat{k} = -\rho \hat{\phi}$ por lo que la integral anterior es

$$I_{G,\hat{k}} = \frac{M}{\pi R^2} \int \rho^3 d\rho d\phi = \frac{MR^2}{2}$$

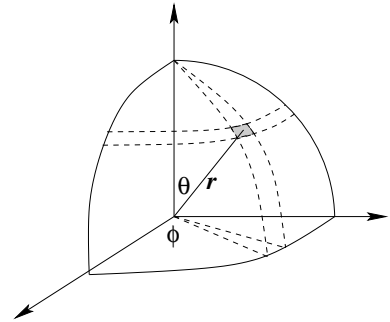
Lo que se necesita es $I_{P,\hat{k}}$ y, según (8.2.12) se cumple que $I_{P,\hat{k}} = I_{G,\hat{k}} + M \left(\vec{R} \times \hat{k} \right)^2$. En esta última expresión el vector \vec{R} es el que va de P a G : $\vec{R} = R \hat{r}'$, de modo que $I_{P,\hat{k}} = \frac{MR^2}{2} + MR^2$, esto es

$$I_{P,\hat{k}} = \frac{3}{2} MR^2$$

Elementos de superficie y de volumen en coordenadas esféricas

La figura adjunta muestra un elemento de superficie en coordenadas esféricas. Como se explica en la leyenda de la figura, ese elemento de superficie vale $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$. Integrando sobre ϕ entre cero y 2π y sobre θ entre cero y π se cubre la superficie completa. $\int d\phi = 2\pi$ mientras que $\int \sin \theta d\theta = 2$, con lo cual se obtiene que $S = 4\pi r^2$, como debe ser.

Usando la misma figura se puede agregar una tercera dimensión colocando una pequeña superficie semejante a distancia dr de la anterior. Se obtiene algo como un pequeño cubo de volumen $dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$. Si se integra este elemento de volumen usando los mismos límites angulares e integrando sobre r entre cero y R se obtiene $\frac{4}{3}\pi R^3$.



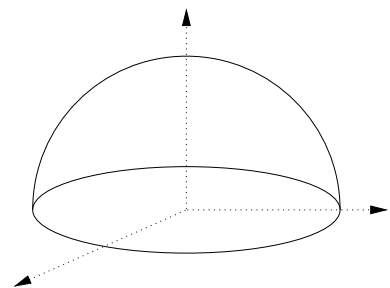
En gris un paralelepípedo con lados: $r \sin \theta d\phi$ y $rd\theta$.

Ejemplo

Esto se puede ilustrar calculando la posición del centro de masa de la semiesfera $z > 0$ cuyo centro está en el origen y radio R . Por simetría se infiere que \vec{R}_G tiene tan solo componente a lo largo del eje Z , $\vec{R}_G = (0, 0, z_G)$ y z_G se calcula integrando z por la densidad que supondremos uniforme.

Una forma cómoda de integrar hace uso de coordenadas esféricas. El elemento de volumen es $dV = d\cos \theta d\phi r^2 dr$ mientras que $z = r \cos \theta$. Entonces

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{V} \int_0^1 \cos \theta d\cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{3R}{8} \end{aligned} \quad (8.3.26)$$



♠ Demuestre que el centro de masa de un alambre semicircular apoyado en el plano XY de radio R , $y > 0$, centrado en el origen y con densidad λ uniforme está en

$$x_G = 0, \quad y_G = \frac{2R}{\pi}. \quad (8.3.27)$$

8.3.3. Matriz de inercia

En tales casos los momentos de inercia se definen como

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \int \lambda(\vec{r}) \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right) ds && \text{caso lineal} \\ I_{ij} &= \int \sigma(\vec{r}) \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right) d\mathcal{S} && \text{caso laminar} \\ I_{ij} &= \int \rho(\vec{r}) \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right) dV && \text{caso volumétrico} \end{aligned} \quad (8.3.28)$$

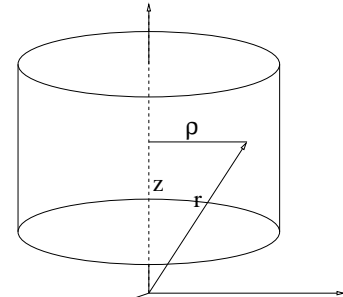
Ejemplo

Cálculo de los momentos de inercia de un cilindro de densidad uniforme ρ_0 , radio R , eje es el eje Z , altura h y cuya cara inferior está a altura z_0 sobre el origen. Su volumen es $V = \pi R^2 h$. Su masa es $M = \rho_0 \pi R^2 h$. El elemento de volumen es

$$dV = \rho d\rho d\phi dz \quad (8.3.29)$$

En este caso r^2 es $z^2 + \rho^2$ y

$$\begin{aligned} I_{33} &= \rho_0 \int [(z^2 + \rho^2) \delta_{33} - z^2] \rho d\rho d\phi dz \\ &= \rho_0 2\pi h \int_0^R \rho^3 d\rho \\ &= \frac{M}{2} R^2 \end{aligned} \quad (8.3.30)$$



La magnitud de un vector posición es $\sqrt{z^2 + \rho^2}$.

$$\begin{aligned} I_{11} &= \rho_0 \int [(z^2 + \rho^2) \delta_{11} - \rho^2 \cos^2 \phi] \rho d\rho d\phi dz \\ &= \frac{M}{12} (4(3z_0^2 + 3z_0 h + h^2) + 3R^2) \end{aligned} \quad (8.3.31)$$

El mismo resultado se obtiene al calcular I_{22} .

De este ejemplo se puede tomar casos particulares:

Primero, una vara se obtiene en el límite $R \rightarrow 0$ manteniendo M fijo, lo que requiere que la densidad volumétrica tienda a infinito, la matriz de inercia es

$$\mathbf{I}_{\text{vara}} = \frac{M}{3} \begin{pmatrix} 3z_0^2 + 3z_0h + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3z_0^2 + 3z_0h + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.3.32)$$

Primer caso especial, vara con extremo en \mathcal{O} , es decir, $z_0 = 0$,

$$\mathbf{I}_{\text{vara}} = \frac{Mh^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.3.33)$$

Segundo caso especial, vara centrada en \mathcal{O} , es decir, $z_0 = -\frac{h}{2}$,

$$\mathbf{I}_{\text{vara}} = \frac{Mh^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.3.34)$$

El caso de un disco se obtiene del caso del cilindro tomando el límite $h \rightarrow 0$ y masa fija M ,

$$\mathbf{I}_{\text{disco}} = \frac{M}{4} \begin{pmatrix} 4z_0^2 + R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4z_0^2 + R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix} \quad (8.3.35)$$

Caso especial, disco centrado en \mathcal{O} , es decir, $z_0 = 0$,

$$\mathbf{I}_{\text{disco}} = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (8.3.36)$$

♠ Calcule la matriz de inercia de una superficie cilíndrica de radio R , altura h centrada en el eje Z , con su parte inferior con coordenada z_0 .

♠ Determine la matriz de inercia de un cuerpo cónico con Z como su eje de simetría, altura h , radio basal R y densidad uniforme ρ_0 .

8.3.4. Ejemplo: péndulo circular que oscila en torno a un punto en su perímetro

Se considerará un péndulo como el que se vió en un ejemplo en §8.3.2.

a) Si el péndulo oscila en el plano del círculo la velocidad angular es $\Omega = \dot{\phi} \hat{k}$. El momento angular se debe descomponer en $\vec{\ell}_P = \vec{\ell}_P^G + \vec{\ell}_G$. El último término, $\vec{\ell}_G$ se obtiene de $\mathbf{I}_{\text{disco}} \vec{\Omega}$ usando la expresión (8.3.36), que es la matriz de inercia con respecto al centro de masa. Así se obtiene que

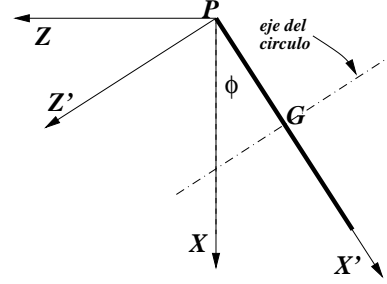
$$\vec{\ell}_G = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \frac{MR^2}{2} \dot{\phi} \hat{k}$$

Mientras que $\vec{\ell}_P^G$ es el momento angular con respecto a P de una masa M ubicada en G : $\vec{\ell}_P^G = MR^2\dot{\phi}\hat{k}$. El torque del peso es trivialmente $\tau = R\hat{\rho} \times M\vec{g}$ y $\vec{g} = g(\hat{\rho}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi)$, de donde, $\tau = -MRg\sin\phi\hat{k}$. La ecuación de este péndulo entonces es

$$\ddot{\phi} = -\frac{2g}{3R}\sin\phi$$

b) Más interesante es el caso en que el círculo oscila en torno a un eje Y' tangente a él. La matriz de inercia con respecto a G expresada en el sistema S' de la figura es precisamente la dada en (8.3.36). La velocidad angular es $\vec{\Omega} = \Omega\hat{j}$, donde $\hat{j} = \hat{j}'$. Por lo tanto

$$\vec{\ell}_G = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{MR^2}{4}\dot{\phi}\hat{j}'$$



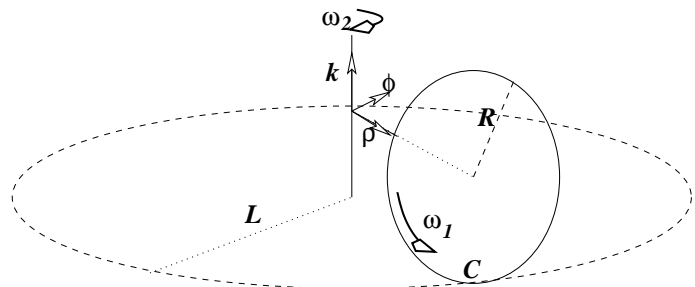
Mientras que $\vec{\ell}_P^G$ es el momento angular con respecto a P de una masa M ubicada en G : $\vec{\ell}_P^G = MR\hat{r}' \times (-R\dot{\phi}\hat{k}') = MR^2\dot{\phi}\hat{j}'$ lo que da un momento angular total $\vec{\ell}_P = \frac{5}{4}MR^2\dot{\phi}\hat{j}'$.

Al igual que antes, el torque total coincide con el torque de una masa M ubicada en G , $\vec{\tau} = R\hat{r}' \times M\vec{g}$ pero $\vec{g} = g(\hat{r}'\cos\phi + \hat{k}'\sin\phi)$ lo que da $\vec{\tau} = -MRg\sin\phi$ y la ecuación es

$$\ddot{\phi} = -\frac{4g}{5R}\sin\phi$$

8.3.5. Disco que rota en círculos sobre un plano

Se tiene un eje vertical que nace de un plano horizontal, de él nace, a altura R sobre el plano, un brazo horizontal de largo L y en cuyo extremo hay un disco de radio R . El disco tiene densidad uniforme, masa total M y gira en torno a su eje con una velocidad angular dada $\vec{\omega}_1$. Puesto que no desliza sobre el plano, además gira en torno al eje vertical con velocidad angular $\vec{\omega}_2$, totalmente determinada por la anterior. Se desea determinar el momento angular del disco.



Se escoge coordenadas polares, con lo cual

$$\vec{\omega}_1 = \hat{\rho}\omega_1, \quad \vec{\omega}_2 = -\hat{k}\omega_2$$

lo que determina que la velocidad angular total del disco sea

$$\vec{\Omega} = \hat{\rho}\omega_1 - \hat{k}\omega_2$$

El punto material C del disco que en el instante actual está apoyado sobre el plano tiene velocidad nula en ese instante, pero, porque es parte de un sistema rígido con punto fijo, tiene que valer $\vec{v}_C = \vec{\Omega} \times \vec{r}_C$, esto es,

$$0 = \vec{\Omega} \times \vec{r}_C = (\hat{\rho}\omega_1 - \hat{k}\omega_2) \times (L\hat{\rho} - R\hat{k}) \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{R}{L}\omega_1$$

Para calcular el momento angular se va a usar la matriz de inercia del disco que ya fue calculada y se la va a multiplicar por $\vec{\Omega}$ y como matriz de inercia se va a usar directamente (8.3.35) con $z_0 = L$. Para poder hacer eso es necesario identificar las direcciones de los ejes (X, Y, Z) usados al calcular (8.3.35) con las direcciones $(\hat{\phi}, \hat{k}, \hat{\rho})$ respectivamente. Entonces $\vec{\ell} = \mathbf{I}_{\text{disco}} \vec{\Omega}$ se escribe

$$\begin{aligned} \vec{\ell} &= \frac{M}{4} \begin{pmatrix} 4L^2 + R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4L^2 + R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{R}{L}\omega_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{M}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ -(4L^2 + R^2)\frac{R}{L}\omega_1 \\ 2R^2\omega_1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\hat{\rho}2R - \hat{k}\frac{4L^2 + R^2}{L} \right) \frac{MR\omega_1}{4} \end{aligned} \quad (8.3.37)$$

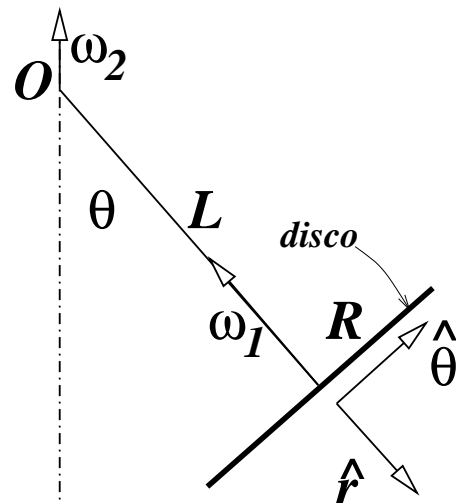
8.3.6. Trompo en movimiento cónico

Se considera un trompo que consiste en un brazo de largo L que nace de un punto \mathcal{O} en cuyo extremo hay un disco de densidad uniforme, radio R y masa M .

El brazo mantendrá un ángulo $\theta = \text{constante}$ con la vertical tal como indica la figura. En cada instante el disco está girando con velocidad angular $\vec{\omega}_1$ respecto a un sistema fijo al brazo, pero el brazo mismo está girando con una velocidad angular $\vec{\omega}_2 = \hat{k}\omega_2$. Este movimiento es posible tan solo si ω_1 y ω_2 satisfacen una condición que se deduce en lo que sigue. En general el ángulo θ no es constante y el movimiento del trompo es bastante complicado.

En general el torque es $\vec{\tau}_{\mathcal{O}} = \vec{\tau}_{\mathcal{O}}^G + \vec{\tau}_G$ pero si la única fuerza externa es el peso, se cumple que $\vec{\tau}_G = 0$ por lo que el torque es

$$\vec{\tau} = MgL\hat{r} \times (\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta) = -MgL\sin\theta\hat{\phi} \quad (8.3.38)$$



La velocidad angular total del sistema es

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= -\omega_1 \hat{r} + (\hat{\theta} \sin \theta - \hat{r} \cos \theta) \omega_2 \\ &= -\hat{r} (\omega_1 + \omega_2 \cos \theta) + \hat{\theta} \omega_2 \sin \theta\end{aligned}$$

El momento angular es $\mathbf{I}_{\text{disco}} \vec{\Omega}$ y, para poder hacer uso directo de (8.3.35) se hace la identificación (X, Y, Z) con las direcciones $(\hat{\theta}, \hat{\phi}, \hat{r})$,

$$\begin{aligned}\vec{\ell} &= I_{11} \Omega_{\theta} + I_{33} \Omega_r \\ &= \frac{M}{4} [(4L^2 + R^2) \omega_2 \sin \theta \hat{\theta} - 2R^2 (\omega_1 + \omega_2 \cos \theta) \hat{r}]\end{aligned}\quad (8.3.39)$$

Para obtener la relación entre ω_1 y ω_2 se impone que $\dot{\vec{\ell}} = \vec{\tau}$. Para tomar la derivada de $\vec{\ell}$ se hace uso que $\dot{\phi} = \omega_2 = \text{constante}$, ω_1 y θ también son constantes. En tal caso

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\phi} \omega_2 \sin \theta, \quad \dot{\hat{\theta}} = \dot{\phi} \omega_2 \cos \theta$$

lo que asegura que $\dot{\vec{\ell}} \propto \hat{\phi}$ y se obtiene

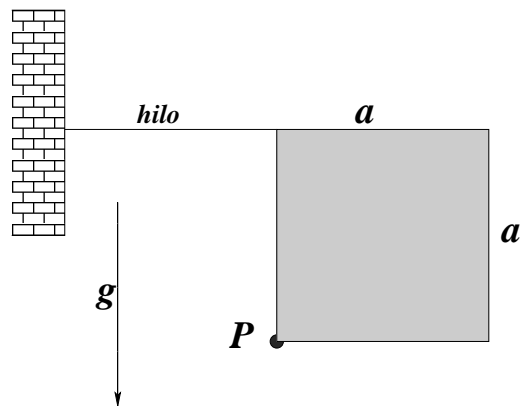
$$\frac{M}{4} [(4L^2 + R^2) \omega_2^2 \sin \theta \cos \theta - 2R^2 (\omega_1 + \omega_2 \cos \theta) \omega_2 \sin \theta] = -MgL \sin \theta$$

que es la relación que deben satisfacer ω_1 y ω_2 para que el trompo tenga un movimiento cónico. Nótese que si se cambia el signo de ω_1 y de ω_2 la ecuación no cambia. Se puede reescribir en la forma

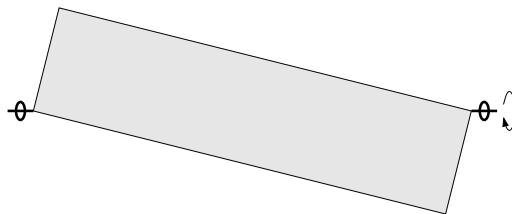
$$\left(L^2 - \frac{R^2}{4}\right) \omega_2^2 \cos \theta - \frac{1}{2} R^2 \omega_1 \omega_2 + gL = 0$$

8.4. Problemas

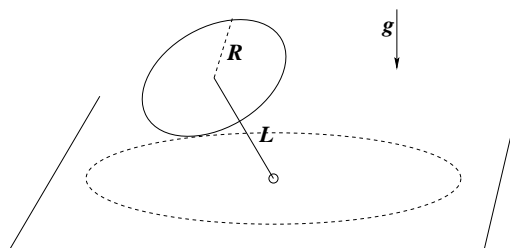
- 8.1 Una placa cuadrada de lado a y masa total M puede girar libremente en torno a un eje perpendicular al plano de la figura y que pasa por su vértice P (ver figura). Inicialmente el cuadrado está sujeta por un hilo horizontal como indica la figura. (a) Obtenga la tensión del hilo. (b) Si el hilo se corta obtenga la velocidad angular máxima que puede alcanzar el sistema. (c) Obtenga la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a su posición de equilibrio.



8.2 Una placa rectangular de masa M , lados a y b y espesor despreciable se hace girar con velocidad angular constante Ω_0 por un eje que pasa por la diagonal del rectángulo. El movimiento ocurre en ausencia de gravedad. Determine las fuerzas que ejercen los soportes en cada extremo del eje. Comente.



8.3 Sistema: un disco de densidad uniforme, radio R y masa M y un eje de masa despreciable que une un punto fijo de un plano horizontal con el centro del disco. El disco gira apoyado en el plano horizontal. (a) Determine el momento angular. (b) Determine el torque total que actúa sobre el disco.



8.4 Se tiene una especie de péndulo que consta de una vara de masa despreciable y largo L que solo puede girar en un plano vertical en torno a un punto fijo P . En su extremo libre la vara tiene un disco de densidad uniforme, radio R y masa M en forma perpendicular a la vara. El disco gira, con respecto a la vara (ella como eje), con velocidad angular uniforme $\vec{\omega}$. (a) Determine el momento angular del sistema. (b) Si el sistema se suelta cuando la vara está vertical apuntando hacia arriba, una ecuación para la velocidad angular de la vara con respecto al ángulo que ella forma con la vertical.

