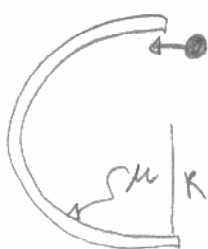
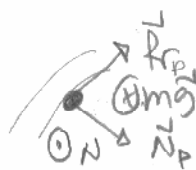


P1) Considere una superficie horizontal sobre la cual desliza con roce despreciable una partícula de masa m , moviéndose con una velocidad constante v_0 . En un punto de su trayectoria, la partícula se empieza a mover a lo largo de la parte cóncava de una pared semi circular, con la cual, tienen un coef de roce cinético μ_c . Calcule la velocidad de la partícula al llegar al otro extremo de la pared y el tiempo que demora en hacerlo.



$\otimes \vec{g}$



$$\begin{aligned}\vec{r} &= R \hat{e}_r \\ \vec{v} &= R \dot{\phi} \hat{e}_\phi \\ \vec{a} &= -R \dot{\phi}^2 \hat{e}_r + R \ddot{\phi} \hat{e}_\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{k}) \quad m \vec{a} &= N \\ \vec{N}_p &= -N_p \hat{e}_r \quad \vec{f}_r = -f_r \hat{e}_\phi \\ N_p &= m R \dot{\phi}^2 \quad -f_r = m R \ddot{\phi}\end{aligned}$$

$$-m \mu_c R \dot{\phi}^2 = m R \frac{d\dot{\phi}}{dt}$$

→ 2 caminos
integrar

para

t)

$\mu_c t \Big|_0^t = \frac{1}{\dot{\phi}} \Big|_{\phi_0}^{\dot{\phi}}$

$\Rightarrow \mu_c t = \frac{1}{\dot{\phi}} \Big|_{\phi_0}^{\dot{\phi}}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R + \mu_c v_0 t}$

$\phi)$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$-\mu_c \dot{\phi}^2 = R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{v_0}{R} e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\mu_c \phi}$$

$$\Rightarrow \text{a la salida} \Rightarrow \|\vec{v}_s\| = R \dot{\phi}(\pi)$$

$$|v_s| = v_0 e^{-\mu_c \pi} \hat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \phi(\bar{t}) = \pi$$

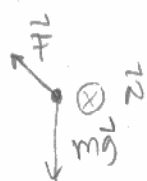
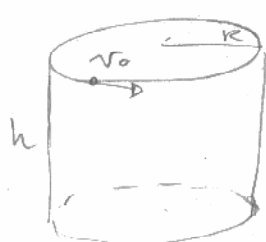
$$\phi(t) = \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{R + v_0 \mu t}{R} \right)$$

$$\Rightarrow \mu \pi = \ln \left(\frac{R + v_0 \mu \bar{t}}{R} \right)$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \frac{R(e^{\mu \pi} - 1)}{v_0 \mu}$$

P) (C1 P3 2005) Una partícula P de masa m se lanza por el interior de un recipiente cilíndrico con eje vertical, radio R y altura h . El roce de P con la pared cilíndrica es despreciable; domina el roce viscoso $\vec{F}_{r.v} = -c\vec{v}$ de P con el fluido que llena el recipiente. La partícula es lanzada en contacto con la superficie cilíndrica, con velocidad horizontal de magnitud v_0 . Determine:

- la velocidad vertical v_z como función del tiempo y la función $z(t)$
- la velocidad angular de P como función del tiempo.
- Valor que debe tener el coeficiente c para que P alcance justo a dar una sola vuelta suponiendo que este es infinitamente alto ($h \rightarrow \infty$)?



$$\begin{aligned}\vec{r} &= R\hat{p} + z\hat{k} \\ \vec{v} &= R\dot{\phi}\hat{p} + \dot{z}\hat{k} \\ \vec{a} &= -R\dot{\phi}^2\hat{p} + R\ddot{\phi}\hat{p} + \ddot{z}\hat{k}\end{aligned}$$

$$\dot{z}(0) = 0 \quad \dot{\phi}(0) = v_0/R$$

$$\sum \vec{F} = \vec{F} + m\vec{g} = -cR\dot{\phi}\hat{p} + c\dot{z}\hat{k} - mg\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\hat{k} \cdot \sum \vec{F} &= -c\dot{z} - mg = m\ddot{z} \\ \int_0^t \frac{-d\dot{z}}{c\dot{z} + mg} &= -\frac{dt}{m} \Rightarrow \ln\left(\frac{c\dot{z} + mg}{mg}\right) = -\frac{ct}{m}\end{aligned}$$

a)

$$z(t) = \frac{mg}{c} \left(-\frac{m}{c} e^{-ct/m} - t' \right) \Big|_0^t \Rightarrow \dot{z} = \frac{mg}{c} (e^{-ct/m} - 1)$$

$$z(t) = H - \frac{mg}{c} \left(\frac{m}{c} e^{-ct/m} + t - \frac{m}{c} \right) \Rightarrow z(t) = H - \frac{m^2 g}{c^2} (e^{-ct/m} + \frac{ct}{m} - 1)$$

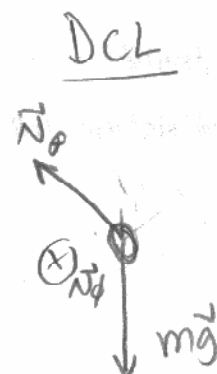
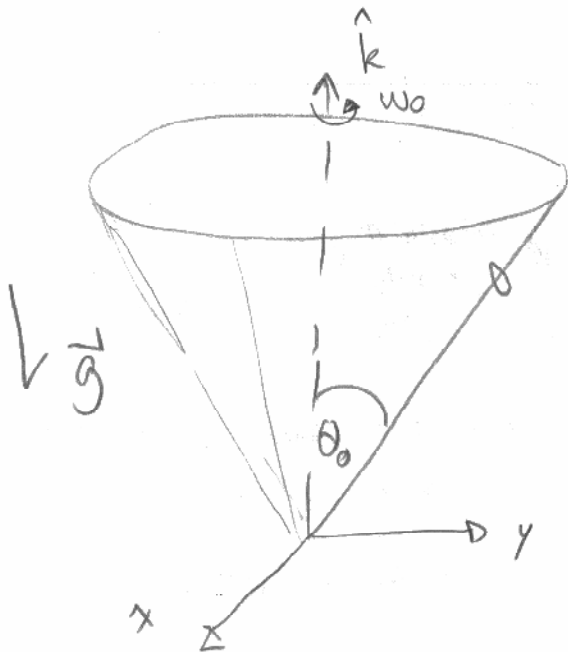
$$\hat{\phi} \quad -cR\dot{\phi} = mR\ddot{\phi} \quad -\frac{c}{m}\dot{\phi} = \frac{d\dot{\phi}}{dt} \quad -\frac{c}{m}t = \ln \dot{\phi} \Big|_{\frac{v_0}{R}}^{\dot{\phi}} = \ln \frac{\dot{\phi} R}{v_0}$$

$$b) \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{R} e^{-\frac{ct}{m}} \Rightarrow \phi(t) = \frac{v_0 m}{R c} (1 - e^{-\frac{ct}{m}})$$

$$c) \quad h \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty \Rightarrow \phi = \frac{v_0 m}{R c} = 2\pi \Rightarrow c = \frac{v_0 m}{2\pi R}$$

Un anillo de masa m está en una varilla que gira con velocidad angular constante ω_0 , siempre formando un ángulo θ_0 con respecto a la vertical. Inicialmente, el anillo se encuentra a una altura $z(0) = z_0$.

- Suponga que no hay roce entre el anillo y la varilla. Escriba vectorialmente las fuerzas del problema.
- Escriba las ecuaciones escalares en función de r, \dot{r} y \ddot{r} .
- Asuma que $r(t)$ es de la forma $r = A \cosh(\beta t) + B$. Encuentre los valores de A, β y B .
- La partícula (el anillo) puede caer hacia el vértice, o puede alejarse infinitamente. Obtenga las condiciones para que no caiga.
- Encuentre las componentes en \hat{r} y $\hat{\theta}$ de la Normal en función del tiempo.
- Suponga ahora que hay roce entre el anillo y la varilla, siendo μ el coeficiente de roce cinético entre ambos. Obtenga una EDO para r .



$$= r \hat{r}$$

$$(r^2)' = 2r\dot{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi} \quad \vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \omega \sin \theta \hat{\phi}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\theta} + \frac{(r^2 \dot{\phi} \sin \theta)'}{r \sin \theta} \hat{\phi}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\omega^2 \sin^2 \theta) \hat{r} + r\omega^2 \sin \theta \cos \theta \hat{\theta} + 2\dot{r}\omega \sin \theta \hat{\phi}$$

$$(a) \quad \Sigma F' = m\vec{g} + \vec{N} = -mg \cos \theta_0 \hat{r} + mg \sin \theta_0 \hat{\theta} - N_{\theta} \hat{\theta} + N_{\phi} \hat{\phi}$$

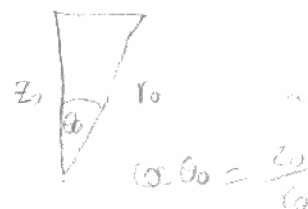
$$(b) \quad \hat{r}) \quad -mg \cos \theta_0 = m\ddot{r} - mr\omega^2 \sin^2 \theta_0$$

$$\Rightarrow -g \cos \theta_0 = \ddot{r} - r\omega^2 \sin^2 \theta_0$$

$$\hat{\theta}) \quad mg \sin \theta_0 - N_{\theta} = mr\omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0$$

$$\hat{\phi}) \quad N_{\phi} = 2m\dot{r}\omega \sin \theta_0$$

$$(c) \quad x(t) = A \cosh(\beta t) + B = A + B = \frac{z_0}{\cos \theta_0}$$



$$\dot{x} = \beta A \sinh(\beta t) \quad , \quad \ddot{x} = \beta^2 A \cosh(\beta t)$$

$$\ddot{x} = \beta^2 (A \cosh(\beta t) + B) - \beta^2 B$$

$$\ddot{x} = \beta^2 x - \beta^2 B$$

$$\ddot{x} = \frac{r\omega^2 \sin^2 \theta_0}{\beta^2} - \frac{g \cos \theta_0}{\beta^2 B} \quad \Rightarrow \quad \beta = \omega \sin \theta_0$$

$$B = \frac{g \cos \theta_0}{\omega^2 \sin^2 \theta_0}$$

$$\Rightarrow A = \frac{z_0}{\cos \theta_0} - \frac{g \cos \theta_0}{\omega^2 \sin^2 \theta_0}$$

(d) Para que não saia, necessariamente se $\dot{x} \geq 0$ 'para andar' $\Rightarrow \dot{x} \geq 0$

$$\beta A \sinh(\beta t) \geq 0 \quad \sinh(1) \geq 0 \quad \forall \gamma > 0, \beta > 0$$

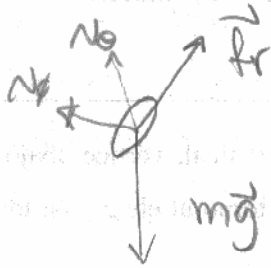
$$\Rightarrow A \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{z_0}{\cos \theta_0} \geq \frac{g \cos \theta_0}{\omega^2 \sin^2 \theta_0} \quad \Rightarrow \quad \omega \geq \sqrt{\frac{g \cos \theta_0}{z_0 \sin^2 \theta_0}}$$

$$N(\phi) = 2m A \beta \sinh(\beta t) \omega \sin \theta_0$$

$$N(\phi) = 2m \left(\frac{z_0}{\cos \theta_0} - \frac{g \cos \theta_0}{\omega^2 \sin^2 \theta_0} \right) \sinh(\omega \sin \theta_0 t) \omega^2 \sin^2 \theta_0$$

$$N_\theta = m \sin \theta_0 \left(g - r \omega^2 \cos \theta_0 \right) [A \cosh(\beta t) + B]$$

(f)



$$\Sigma \vec{F} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}_r$$

$$= -mg \cos \theta_0 \hat{r} + m g \sin \theta_0 \hat{\theta} - N_\theta \hat{\theta} + N_\phi \hat{\phi} + \mu (N_\theta^2 + N_\phi^2)^{1/2} \hat{r}$$

$$\text{ii)} \quad \mu (N_\theta^2 + N_\phi^2)^{1/2} - mg \cos \theta_0 = m \ddot{r} - m r \omega^2 \sin^2 \theta_0$$

$$\mu (2 \dot{r} \omega \sin \theta_0 + \sin \theta_0 (g - r \omega^2 \cos \theta_0)) = \ddot{r} - r \omega^2 \sin^2 \theta_0$$

$$\sin \theta_0 \mu (2 \dot{r} \omega + g - r \omega^2 \cos \theta_0) = \ddot{r} - r \omega^2 \sin^2 \theta_0 \quad \text{E.D.O}$$