

Tarea Numérica 1

FI21A - Mecánica

Prof. N. Mujica

Profs. Auxs. Paulina Cecchi y Kim Hauser

16 de mayo de 2006

Dos partículas de masa m están unidas por un hilo de largo D . Una de estas masas desliza sin roce en una vara horizontal que gira con velocidad angular constante ω con respecto a un eje vertical. La otra masa desliza sin roce por una vara contenida en el eje horizontal. No importa cómo, pero las partículas pueden cruzar la intersección de las dos varas sin alteración de su movimiento rectilíneo. El objetivo de esta tarea es de integrar numéricamente el movimiento del sistema. Suponga que el hilo se encuentra siempre tenso, es decir su largo es siempre D .

En clases se mostró que si α es el ángulo que forma el hilo con la vara horizontal, $\alpha(t)$ obedece la siguiente ecuación:

$$\ddot{\alpha} = -\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{g}{D} \cos \alpha \equiv f(\alpha). \quad (1)$$

Se trata de integrar numéricamente esta ecuación para obtener $\alpha(t)$. Para ello se recomienda usar el algoritmo de Verlet, el cual se explica brevemente a continuación para este caso particular. Para integrar numéricamente una ecuación, se reemplazan las derivadas por diferencias finitas. Tomando un desarrollo en series de Taylor de la función $\alpha(t)$ se tiene

$$\alpha(t \pm \epsilon) = \alpha(t) \pm \epsilon \dot{\alpha}(t) + \frac{\epsilon^2}{2} \ddot{\alpha}(t) + \dots \quad (2)$$

despreciando los términos superiores. Se obtiene entonces

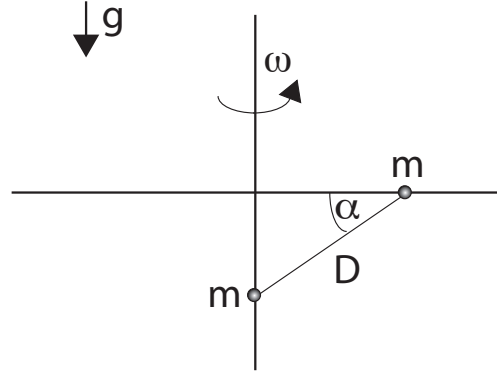
$$\alpha(t + \epsilon) + \alpha(t - \epsilon) = 2\alpha(t) + \epsilon^2 \ddot{\alpha}(t) + O(\epsilon^4), \quad (3)$$

de donde se despeja una forma aproximada para la segunda derivada

$$\ddot{\alpha}(t) \approx \frac{\alpha(t + \epsilon) - 2\alpha(t) + \alpha(t - \epsilon)}{\epsilon^2}. \quad (4)$$

Con este resultado, la ecuación (1) se puede escribir de la forma

$$\alpha(t + \epsilon) = 2\alpha(t) - \alpha(t - \epsilon) + \epsilon^2 f(\alpha(t)) + O(\epsilon^4). \quad (5)$$



El algoritmo de Verlet usa la ecuación (5), donde el tiempo se divide en pequeños intervalos talque $t_n = n\epsilon$, con n un número entero. En lugar de escribir (5) en forma continua en el tiempo se escribe

$$\alpha_{n+1} = 2\alpha_n - \alpha_{n-1} + \epsilon^2 f_n, \quad (6)$$

donde f_n es la función $f(\alpha)$ evaluada para el valor α_n . Si se conoce α_o y α_1 , la ecuación (6) da el valor α_2 . Usando α_1 y α_2 se obtiene α_3 , etc. De esta manera de los valores iniciales se obtienen los valores de los α_n , hasta n tan grande como sea necesario.

El programa debe calcular además $\dot{\alpha}$, usando la aproximación

$$\dot{\alpha}_n \approx \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1}}{2\epsilon}. \quad (7)$$

El valor de ϵ se debe escoger de modo que $\epsilon = \epsilon_1$ y $\epsilon = \frac{1}{2}\epsilon_1$ den funciones $\alpha(t)$ indistinguibles.

Para resolver este problema escoja $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$, $D = 1 \text{ m}$, $\alpha_o = \alpha(0) = \frac{\pi}{4}$ y $\alpha_1 = \alpha_o$ (esto corresponde a suponer $\dot{\alpha}(0) = 0$). Escoja dos valores de ω , medido en s^{-1} , tal que $3 < \omega < 5$ y $1 < \omega < 2$. En ambos casos dibuje $\alpha(t)$ hasta un instante en que el ángulo haya hecho unas cuatro oscilaciones completas. En ese mismo rango de t dibuje $C(t) = \dot{\alpha}^2 - \omega^2 \cos^2 \alpha - \frac{2g}{D} \sin \alpha$. Por qué interesa esta cantidad?