

Clase auxiliar 02/05

P1. Solución

a) Escribimos la ecuación de la Energía para coordenadas polares (r, ϕ) :

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + U(r)$$

Por la conservación del momentum angular: $\dot{\phi} = \frac{l}{mr^2}$, luego:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2}}_{U_{eff}(r)} + U(r)$$

Pero sabemos que: $F = -\frac{d}{dr}U(r)$

$$\Rightarrow -\frac{k}{r}dr = dU \quad \Leftrightarrow \quad U(r) = k \ln r + c$$

$$\Rightarrow U_{eff}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + k \ln r + c$$

La constante de integración c depende de dónde definamos $U(r) = 0$, por lo que es suficiente dejarla así.

b) Para la órbita circular necesitamos que $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Esta condición se logra haciendo $\frac{d}{dr}U_{eff}(r_c) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{l^2}{mr_c^2} + \frac{k}{r} = 0 \Rightarrow r_c = \frac{l}{\sqrt{mk}}$$

Como la órbita es circular, la rapidez está dada por:

$$v = r_c\dot{\phi} = \frac{l}{mr_c} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

c) Esta parte es sólo graficar el potencial efectivo como la suma de la barrera centrífuga más el potencial original.

P2. Solución

Dado que el movimiento es vertical, escribimos la ecuación de movimiento como:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= m \frac{dv}{dt} = -mg - \gamma v \\ \Rightarrow \quad -dt &= \frac{m dv}{mg + \gamma v} \end{aligned}$$

Integrando:

$$-\int_0^t dt' = m \int_v^{v_0} \frac{dv'}{mg + \gamma v'}$$

De aquí:

$$t = \frac{m}{\gamma} \ln \left(\frac{mg + \gamma v_0}{mg + \gamma v} \right) \quad (1)$$

Cuando el cuerpo alcanza su punto más alto, $v = 0$, por lo tanto:

$$t^* = \frac{m}{\gamma} \ln \left(\frac{mg + \gamma v_0}{mg} \right) = \frac{m}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{\gamma v_0}{mg} \right)$$

Para la altura máxima, debemos despejar v de la ecuación (1), de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dy}{dt} = \left(\frac{mg}{\gamma} + v_0 \right) e^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mg}{\gamma} \\ \Leftrightarrow \quad dy &= \left[\left(\frac{mg}{\gamma} + v_0 \right) e^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mg}{\gamma} \right] dt \end{aligned}$$

Integrando entre $t = 0$ y $t = t^*$ para el tiempo, y entre $y = 0$ y $y = y_{max}$, se obtiene, álgebra mediante:

$$y_{max} = \frac{v_0^2}{g} \left[\frac{\frac{\gamma v_0}{mg} - \ln(1 + \frac{\gamma v_0}{mg})}{(\frac{\gamma v_0}{mg})^2} \right].$$