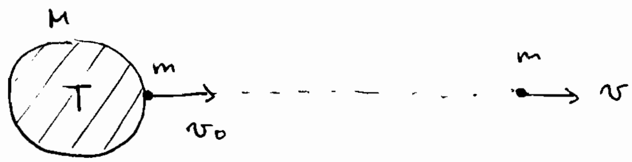
P1

(a)



$$E_i = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G M_T m}{R_T}$$

$$E_f = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_T m}{r}$$

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G M_T m}{R_T} = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\substack{0 \\ \text{(vel. mínima)}}} - \underbrace{\frac{G M_T m}{r}}_{\substack{0 \\ \text{(muy lejos)}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 = \frac{G M_T \cancel{m}}{R_T}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T}}$$

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{m^3}{Kg\, s}\right]$

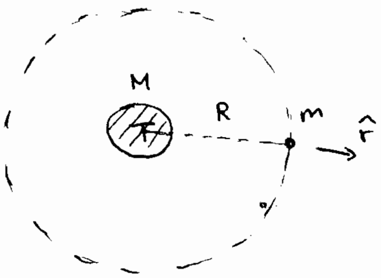
$M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ [Kg]

$R_T = 6{,}38 \cdot 10^{6}$ [m]

$$\Rightarrow v_0 = 11.180 \; [m/s]$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0 \approx 11 \; [km/s]}$$

(b)



$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$-\frac{G M_T \cancel{m}}{R^2}\,\hat{r} = -\cancel{m}\,\omega^2 R\,\hat{r} \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{G M_T}{R^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

$$\Rightarrow \quad R = \left(\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 42{,}240\ [\mathrm{km}]$$

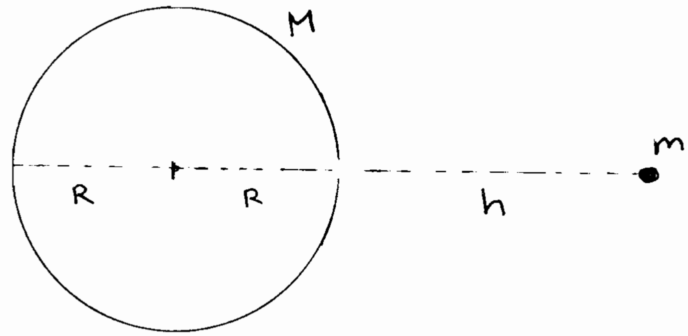
$$\therefore \quad d = R - R_T$$

$$= \left(\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_T$$

$$\boxed{d \approx 35{,}860\ [\mathrm{km}]}$$

P2

Datos: M, m, R, h



(a) $M >> m$

$$E = K + U_g$$

$$E_i = 0 - \frac{GMm}{R+h}$$

$$E_f = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$E_i = E_f \Rightarrow -\frac{GM\cancel{m}}{R+h} = \frac{1}{2}\cancel{m} v^2 - \frac{GM\cancel{m}}{R}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GMh}{R(R+h)}}$$

Dentro del cascarón, m describe un MRU

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{2R}{v} = 2R\sqrt{\frac{R(R+h)}{2GMh}}}$$

(b) Caso genérico para M y m

$$E_i = -\frac{GMm}{R+h}$$

$$E_f = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$E_i = E_f \Rightarrow -\frac{GMm}{R+h} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 - \frac{GMm}{R} \quad (1)$$

Además, se conserva el momentum lineal para el sistema m+M

$$P_i = P_f \Rightarrow 0 = -m v + M V$$

$$\Rightarrow V = \frac{m}{M} v \quad (2)$$

(2) en (1) $\Rightarrow$

$$-\frac{GMm}{R+h} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{m}{M} v\right)^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{M}\right) v^2 = \frac{GMh}{R(R+h)}$$

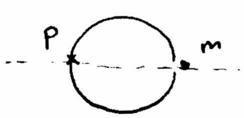
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM^2h}{R(R+h)(M+m)}}$$

$V = \frac{m}{M} v \Rightarrow$

$$V = \sqrt{\frac{2Gm^2h}{R(R+h)(M+m)}}$$

Ahora m dentro del cascarón:

Calculo tiempo de encuentro entre m y el pto P



Fijo el cero en P.

$$X_m(t) = 2R - vt$$

$$X_p(t) = Vt$$

$$X_m(t^*) = X_p(t^*) \Rightarrow 2R - vt^* = Vt^*$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{2R}{v+V}$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{2R}{v + \frac{m}{M} v}$$

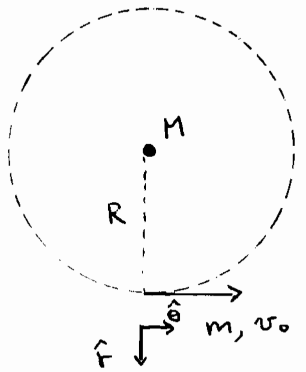
$$\Rightarrow \boxed{t^* = \frac{2R}{\sqrt{\frac{2Gh}{R(R+h)}(M+m)}}}$$

Si $M \gg m$ el resultado coincide con el de la parte (a)

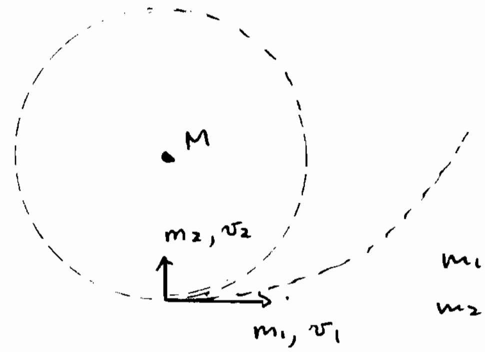
P3)

Datos: M, m, v_0

¿ λ, ΔE ?



Antes de la eyección



$m_1 = \lambda m$

$m_2 = (1-\lambda) m$

Después de la eyección

Primero calculo el radio de la órbita R. Aplico F= ma antes de la eyección.

$$F = ma \Rightarrow \frac{GMm}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{GM}{v_0^2}$$

Ahora aplico cons. momentum lineal sobre m. antes y después de la eyección.

$$\hat{\theta}) \quad P_{f\hat{\theta}} - P_{i\hat{\theta}} = \underbrace{F_{\hat{\theta}}}_{0} \cdot \Delta t$$

no hay f3zas sobre m en $\hat{\theta}$

$$\Rightarrow m_1 v_1 - m v_0 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \cancel{m} v_1 - \cancel{m} v_0 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda v_1 = v_0 \qquad (1)$$

$$\hat{r}) \quad P_{f\hat{r}} - P_{i\hat{r}} = \underbrace{F_{\hat{r}}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\Delta t}_{0}$$

se asume que la eyección es instantánea

$$\Rightarrow m_2 v_2 - 0 = 0$$

$$\Rightarrow v_2 = 0$$

$$E_i = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{R} \qquad \text{pero} \quad R = \frac{GM}{v_0^2}$$

$$\Rightarrow \; E_i = \frac{1}{2} m v_0^2 - m v_0^2$$

$$\Rightarrow \; E_i = -\frac{1}{2} m v_0^2 \qquad (2)$$

$$E_f = E_{f\,m_1} + E_{f\,m_2}$$

$$\Rightarrow \; E_f = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{GMm_1}{R} + \frac{1}{2} m_2 \overset{0}{\cancel{v_2}}{}^2 - \frac{GMm_2}{R} \qquad (3)$$

Pero se quiere que m_1 sea eyectado con la mínima energía (que en el infinito tenga energía cero)

$$\Rightarrow \; \frac{1}{2} \cancel{m_1} v_1^2 - \frac{GM\cancel{m_1}}{R} = E_{m_1\,\infty} = 0$$

$\uparrow$ se impone

$$\Rightarrow \quad v_1^2 = 2\,\frac{GM}{R} \qquad ; \quad R = \frac{GM}{v_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad v_1^2 = 2 v_0^2 \qquad (4)$$

(1) en (4) $\Rightarrow \; \cancel{v_1^2} = 2\lambda^2 \cancel{v_1^2}$

Para v_0^2

$$\Rightarrow \; \lambda = \sqrt{2}/2$$

$$\Delta E = E_f - E_i$$

$$= -\frac{GMm_2}{R} - \left(-\frac{1}{2} m v_0^2\right) \quad ; \quad R = \frac{GM}{v_0^2} \qquad m_2 = (1-\lambda)\,m$$

$$= -(1-\lambda)\,m v_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$= (\lambda - 1/2)\, m v_0^2$$

$$\boxed{\Delta E = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\, m v_0^2}$$