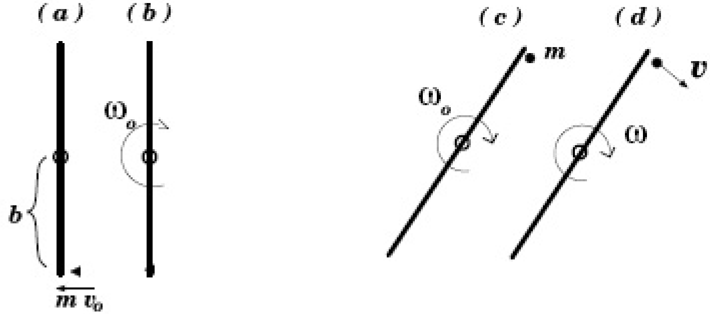


• En proceso (a→b) se conserva el momentum angular con respecto a $\boldsymbol{P}$. Sea $\boldsymbol{\omega_\circ}$ la velocidad adquirida por la barra una vez que se incrusta el dardo. Así, la velocidad del dardo incrustado es $\boldsymbol{b\omega_\circ}$. Tomando dirección de rotación positiva en el sentido de rotación de los punteros del reloj, y denotando por $\boldsymbol{I_o}$ el momento de inercia de la barra con respecto a su centro,

$$L_a = L_b \quad \rightarrow \quad b(mv_\circ) + 0 = b(mb\omega_\circ) + I_\circ\omega_\circ \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_\circ = \frac{bmv_\circ}{I_\circ + mb^2}} \tag{5}$$

• En proceso (c→d) se conservan el momentum angular con respecto a $\boldsymbol{P}$ y la energía cinética. Para el mtum. angular c/r a $\boldsymbol{P}$, (denotando por $\boldsymbol{I_1 \equiv I_\circ + mb^2}$ para la varilla con dardo):

$$L_c = L_d \quad \rightarrow \quad I_1\omega_\circ + 0 = I_1\omega + b(mv) \quad \rightarrow \quad \boxed{I_1(\omega_\circ - \omega) = bmv} \tag{6}$$

• Para la energía cinética,

$$K_c = K_d \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}I_1\omega_\circ^2 + 0 = \frac{1}{2}I_1\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{I_1(\omega_\circ^2 - \omega^2) = mv^2} \tag{7}$$

• La ecuación anterior se puede escribir $\boldsymbol{I_1(\omega_\circ - \omega)(\omega_\circ + \omega) = mv^2}$, que combinada con Ec. (6) nos da

$$mvb(\omega_\circ + \omega) = mv^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\omega_\circ + \omega)b = v} \tag{8}$$

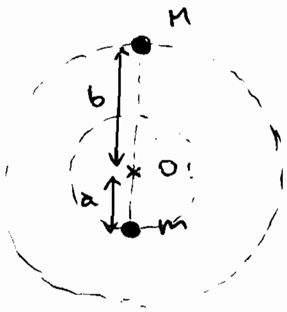
• Para obtener $\boldsymbol{v}$ combinamos Ecs. (6) y (8):

$$(\omega_\circ - \omega) + (\omega_\circ + \omega) = bmv/I_1 + v/b \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2\omega_\circ}{bm/I_1 + 1/b}\,.$$

Sustituyendo valores de $\boldsymbol{\omega_\circ}$ y de $\boldsymbol{I_1}$, tomando $\boldsymbol{b = L/2}$, y considerando $\boldsymbol{I_\circ = ML^2/12}$

$$v = \frac{2\omega_\circ}{bm/I_1 + 1/b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = v_\circ\frac{m}{m + M/6}}$$

P2]



Datos: M, m, d

M y m giran en torno al centro de masas

$$Y_{CM} = \frac{\sum m_i Y_i}{\sum m_i}$$

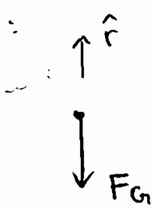
$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{m(-a) + M b}{m + M}$$

$$\Rightarrow \quad a\, m = b\, M \quad (1)$$

Además $\quad a + b = d \quad (2)$

$$(1) \text{ y } (2) \Rightarrow \quad a = \frac{M}{m+M} d \quad \text{y} \quad b = \frac{m}{m+M} d$$

DCL M:



$$-\frac{G \cancel{M} m}{d^2} = -\cancel{M} \omega^2 \cdot b$$

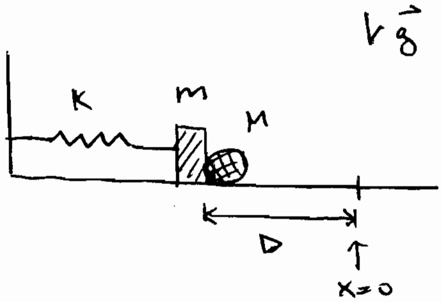
$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{G m}{d^2 \cdot b}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{G m}{d^2 \cdot \frac{m}{m+M} d}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2 d^2}{G(m+M)}}$$

P3

Datos: K, m, M, D



(a) Antes que M pierda contacto

m: $\overset{n}{\longleftarrow}\bullet\overset{f_K}{\longrightarrow}$

$$\underbrace{f_K}_{-KX} - n = m\ddot{X}$$

$$-KX - n = m\ddot{X} \quad (1)$$

M: $\bullet\overset{n}{\longrightarrow}$

$$n = M\ddot{X} \quad (2)$$

(2) en (1) para n $\Rightarrow$ $-KX - M\ddot{X} = m\ddot{X}$

$$\Rightarrow \ddot{X} + \frac{K}{M+m}X = 0$$

$$\Rightarrow X(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{K}{M+m}}\,t + \phi\right)$$

CI: $\left.\begin{aligned} X(0) &= -D \\ \dot{X}(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{X(t) = -D\cos\left(\sqrt{\frac{K}{M+m}}\,t\right)} \quad (3)$

(b) M pierde contacto cuando $n = 0$

de (2) $\Rightarrow \ddot{X} = 0$

(3) $\Rightarrow \ddot{X} = -D\cos\left(\sqrt{\frac{K}{M+m}}\,t\right)\frac{K}{M+m} \underset{\text{se impone}}{=} 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{K}{M+m}}\,t^* = \pi/2$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M+m}{K}}$$

Entonces, $X(t) = -D\cos\left(\sqrt{\frac{K}{M+m}}\,t\right) \Rightarrow \boxed{X(t^*) = 0}$

$$\dot{X}(t) = D\sqrt{\frac{K}{M+m}}\sin\left(\sqrt{\frac{K}{M+m}}\,t\right) \Rightarrow \boxed{\dot{X}(t^*) = D\sqrt{\frac{K}{M+m}}}$$

(c) Después que M pierde contacto la ecuación (1) queda:

$$-KX = M\ddot{X}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{X} + \frac{K}{M}X = 0$$

$$\Rightarrow \quad X(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{K}{M}}\,t + \phi\right)$$

CI_1: $X(0) = 0 \Rightarrow \underbrace{A}_{\neq 0}\cos\phi = 0$

$$\Rightarrow \quad \phi = \pi/2$$

$$\Rightarrow \quad X(t) = -A\sin\left(\sqrt{\frac{K}{M}}\,t\right)$$

CI_2: $\dot{X}(0) = D\sqrt{\frac{K}{M+m}}$

$$\dot{X}(t) = -A\cos\left(\sqrt{\frac{K}{M}}\,t\right)\sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$\Rightarrow \quad -A\sqrt{\frac{K}{M}} = D\sqrt{\frac{K}{M+m}}$$

$$\Rightarrow \quad A = -D\sqrt{\frac{M}{M+m}}$$

$$\therefore \quad X(t) = D\sqrt{\frac{M}{M+m}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{K}{M}}\,t\right)$$

$$\boxed{\text{Amplitud} = D\sqrt{\frac{M}{M+m}}}$$