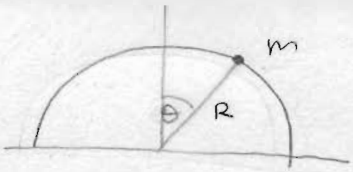
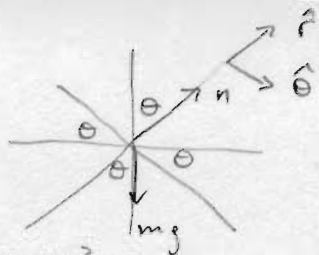
P1]



$\downarrow \vec{g}$



Newton $\rightarrow$ $\hat{r})\ n - mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R}$ (1)

Conservación energía $\rightarrow$ $\cancel{m}gR = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \cancel{m}gR\cos\theta$

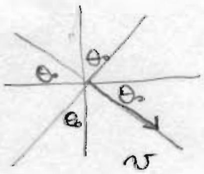
$\Rightarrow \quad v^2 = 2gR(1-\cos\theta) \qquad (2)$

(2) en (1) $\Rightarrow$ $n - mg\cos\theta = -\frac{m}{\cancel{R}}\, 2g\cancel{R}(1-\cos\theta)$

Condición $n=0$ $\Rightarrow$ $\cancel{mg}\cos\theta_0 = 2\cancel{mg}(1-\cos\theta_0)$

$\Rightarrow \quad \boxed{\cos\theta_0 = 2/3}$

velocidad en $\theta=\theta_0$: (2) $\rightarrow$ $v^2 = 2gR(1-2/3) = \frac{2}{3}gR$



$v_x = v\cos\theta_0 = \sqrt{\frac{2}{3}gR}\cdot\frac{2}{3}$

$v_y = -v\sin\theta_0 = \sqrt{\frac{2}{3}gR}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}$

Cinemática (origen en el centro de la semiesfera)

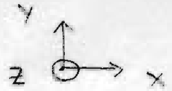
$Y(t) = R\cos\theta_0 - v\sin\theta_0\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \longrightarrow t_{caída}$

$X(t) = R\sin\theta_0 + v\cos\theta_0\cdot t$

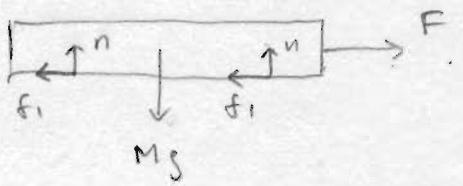
$\therefore$ distancia del impacto $= X(t_{caída})$

$= \boxed{R\sin\theta_0 + v\cos\theta_0\cdot t_{caída}}$

P2

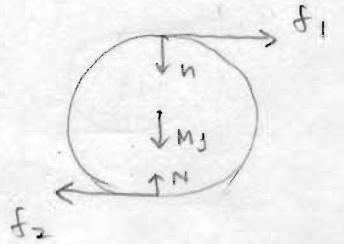


M:



x) $F - 2f_1 = M a_M$ (1)

m:



x) $f_1 - f_2 = m \underbrace{a_m}_{\frac{a_M}{2}}$

$\Rightarrow \quad f_1 - f_2 = \frac{m}{2} a_M$ (2)

z) (torque) $-R f_1 - R f_2 = \underbrace{I}_{\frac{1}{2} m R^2} \underbrace{\alpha}_{-\frac{a_m}{R} = -\frac{a_M}{2R}}$

$\Rightarrow \quad f_1 + f_2 = \frac{m}{4} a_M$ (3)

(2) + (3) $\Rightarrow \quad 2 f_1 = \frac{3}{4} m a_M$ (4)

(4) en (1) $\Rightarrow \quad F - \frac{3}{4} m a_M = M a_M$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_M = \frac{F}{M + \frac{3}{4} m}}$$

Solución al problema 9

La trayectoria de la masa m que cae hacia el Sol es el límite de una elipse en que el semieje menor b tiende a cero. En ese caso la trayectoria es una línea recta estando el Sol en uno de los extremos. El semieje mayor de tal elipse es $a = R/2$, donde $R = a_T$ es el radio (igual al semieje mayor) de la trayectoria circular de la Tierra. De acuerdo a la tercera ley de Kepler

$$\frac{T_m}{T_T} = \left(\frac{a}{a_T}\right)^{3/2} = 2^{-3/2} = 0,3536 \ .$$

El tiempo t_0 que demora la masa m en llegar al sol es la mitad del período de su órbita, o sea,

$$t_0 = \frac{T_m}{2} = \frac{T_T}{2} \cdot 0,3536 \simeq 64,5 \text{ días} \ .$$

Solución al problema 14

(a) Sea M la masa del Sol, entonces, igualando la fuerza gravitacional con la fuerza centrípeta

$$-\frac{GMm}{R_0^2}\hat{r} = -\frac{mv_0^2}{R_0}\hat{r}$$

se obtiene

$$v_0^2 = \frac{GM}{R_0} \ .$$

(b) La energía meánica de Venus (antes de la colisión) es

$$E_i = -\frac{GMm^2}{R_0} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{GMm}{2R_0^2} \ .$$

(c) Como el cometa (cuando está lejos) se mueve radialmente hacia el sol, no tiene momento angular (respecto al origen en el Sol). Luego el momento angular de Vennus es el mismo que el de Venus

$$L = R_0 m v_0 \ .$$

Esto nos permite encontrar la componente $\hat{\theta}$ de la velocidad de Vennus justo después de la colisión. El momento angular justo despues de la colisión es

$$L = R_0(m + \alpha m)v_\theta \ .$$

Como el momento angular se conserva se deduce que

$$v_\theta = \frac{v_0}{1+\alpha} \ .$$

La conservación del momento lineal en la dirección radial hay que darse cuenta que la interacción entre Venus y el cometa son fuerzas internas y, por lo tanto, para calcular la velocidad del cometa podemos ignorar el efecto introducido por la interacción entre el cometa y Venus. El cometa tiene energía nula, luego,

$$K = -U = +\frac{GM\alpha m}{R_0} = \frac{1}{2}\alpha m v_C^2 \ .$$

(v_C es la velocidad del cometa justo antes de la colisión ignorando el efecto introducido por Venus). Se deduce que

$$v_C^2 = \frac{2GM}{R_0} \ .$$

Aplicamos ahora la conservación del momento lineal a lo largo de la dirección radial

$$\alpha m v_C = (m + \alpha m) v_r \ ,$$

donde v_r es la velocidad de Vennus justo después de la colisión. Se deduce que

$$v_r = \frac{\alpha}{1+\alpha} v_C \ .$$

(d) La energía mecánica de Vennus (la evaluamos justo después del choque) es

$$\begin{aligned} E_f &= U + K = -\frac{GMm(1+\alpha)}{R_0} + \frac{1}{2}m(1+\alpha)(v_\theta^2 + v_r^2) \\ &= -(1+\alpha)\frac{GMm}{R_0} + \frac{1}{2}(1+\alpha)\left[2\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2 + \frac{1}{(1+\alpha)^2}\right]\frac{GMm}{R_0} \\ &= -\frac{GMm}{2R_0}\left(\frac{1+4\alpha}{1+\alpha}\right) = E_i\left(\frac{1+4\alpha}{1+\alpha}\right) \ . \end{aligned}$$

(e) la órbita de Vennus obviamente ya no es un círculo. Como la energía es negativa debe, por lo tanto, ser elíptica. Se tiene que

$$\frac{E_i}{E_f} = \frac{a_f}{a_i} = \frac{a_f}{R_0} \ .$$

Aquí a_i y a_f son los semiejes mayores de las órbitas de Venus y Vennus, respectivamente. Se deduce que

$$a_f = R_0\frac{E_i}{E_f} = R_0\frac{1+\alpha}{1+4\alpha} \ .$$

(f) Usando la tercera ley de Kepler podemos calcular la razón del período de Vennus y Venus:

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{a_f}{r_0}\right)^{3/2} = \left(\frac{1+\alpha}{1+4\alpha}\right)^{3/2} \ .$$